

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

**«РАСПАД ЛОЖНОГО ВАКУУМА В ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ»**

Выполнил студент

643 группы

Джамалдинов Эльдар Шахмирзаевич

\_\_\_\_\_

подпись студента

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. Демидов Сергей Владимирович

\_\_\_\_\_

подпись научного руководителя

Допущена к защите

Зав.кафедрой \_\_\_\_\_

подпись зав.кафедрой

Москва

2026

# Оглавление

1	Введение . . . . .	2
2	Квазиклассическое описание распада ложного вакуума . . . . .	3
3	Модель . . . . .	6
3.1	Существующие подходы для нахождения вероятности распада ложного вакуума в модели (3.1) . . . . .	8
4	Деформация потенциала . . . . .	10
5	Поиск констант сшивки . . . . .	15
6	Применение деформации потенциала к вычислению квантовых поправок	23
7	Выводы . . . . .	25
8	Заключение . . . . .	27
	Список литературы . . . . .	28
A	Асимптотики параметров отскокового решения и евклидова действия в пределе снятия регуляризации . . . . .	29
B	Вычисление $\xi( \tilde{\Lambda} )$ . . . . .	39

## 1. Введение

Ложный вакуум — состояние в теории поля, которое не является состоянием глобального минимума энергии, а соответствует ее локальному минимуму. Такое состояние метастабильно, и оно «туннелирует» в состояние истинного вакуума. Такой процесс называют распадом ложного вакуума.

Для нахождения вероятности распада ложного вакуума обычно используется квазиклассический метод, основанный на вычислении евклидова действия на отскоковом решении [1]. Однако существуют системы с такими потенциалами, для которых не существует отскокового решения, а значит, подход Коулмана [1] неприменим.

Для решения этой проблемы в работах [3, 4, 5] было предложено использовать вместо отскокового решения альтернативные полевые конфигурации, не являющиеся точными решениями уравнения поля во всем пространстве. Так, авторы [5] вводят класс «новых инстантонов», обрезая сингулярное классическое решение вблизи центра пузыря из-за доминирования квантовых флуктуаций. В свою очередь, в работах [3, 4] предлагается использовать «псевдо-отскоки» — конфигурации с постоянным полем в центре, которые минимизируют действие при фиксированном значении поля в центре и обеспечивают строго нулевую энергию туннелирования.

В настоящей работе разработан альтернативный подход, который заключается во введении регуляризации — гладкой деформации потенциала, которая приводит к появлению отскоковых решений. При снятии регуляризации отскоковые решения стремятся к сингулярным в центре конфигурациям, однако действие на них остается конечным.

В работе показано, как этот метод может быть обобщен для вычисления квантовых поправок.

## 2. Квазиклассическое описание распада ложного вакуума

Рассмотрим модель одного действительного скалярного поля в  $d$ -мерном пространстве-времени, где  $d \geq 3$ . Для дальнейшего анализа удобно явно выделить временную и пространственные координаты. В этом случае действие можно переписать в форме

$$S = \int d^{d-1}\mathbf{x} dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 - V(\varphi) \right]. \quad (2.1)$$

При исследовании туннельных процессов естественно перейти к евклидову времени, выполнив замену  $t = -i\tau$ . Тогда действие (2.1), с точностью до общего множителя  $i$ , переходит в евклидово действие

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^{d-1}\mathbf{x} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 + V(\varphi) \right] = \\ &= \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) + V(\varphi) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $x^\mu = (\tau, \mathbf{x})$ , а суммирование ведется с евклидовой метрикой  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ .

Варьируя действие (2.2) по полю  $\varphi$ , получаем уравнение поля

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.3)$$

Предположим теперь, что потенциал  $V(\varphi)$  имеет локальный, но не глобальный минимум. В этом случае соответствующее вакуумное состояние является ложным и может распадаться за счет туннелирования. В квазиклассическом подходе для описания такого процесса необходимо найти специальное решение евклидовых уравнений поля — отскоковое решение (bounce). Это решение должно стремиться к ложному вакууму  $\varphi_-$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  и обладать так называемой точкой поворота.

Под точкой поворота будем понимать такой момент евклидова времени, в который

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{x}. \quad (2.4)$$

Таким образом, отскоковое решение должно удовлетворять условиям

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi_- \quad \text{при } \tau \rightarrow \pm \infty \quad (2.5)$$

и (2.4) одновременно.

Этим условиям можно удовлетворить, если искать гладкие  $O(d)$ -симметричные конфигурации поля, зависящие только от евклидова радиуса

$$r = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2} = \sqrt{x_\mu x^\mu}. \quad (2.6)$$

Тогда поле имеет вид  $\varphi = \varphi(r)$ , а условие (2.5) приобретает вид

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = \varphi_-. \quad (2.7)$$

С другой стороны, для сферически-симметричного поля зависимость от евклидова времени определяется соотношением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(x^\mu) = \frac{\tau}{r} \frac{d\varphi}{dr}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что при  $\tau = 0$  производная по евклидову времени обращается в нуль всюду, кроме точки  $r = 0$ . Для того чтобы конфигурация оставалась гладкой в точке  $r = 0$  и условие (2.4) выполнялось автоматически, необходимо дополнительно потребовать:

$$\frac{d\varphi}{dr}(r = 0) = 0. \quad (2.9)$$

После подстановки сферически-симметричного анзаца  $\varphi = \varphi(r)$  уравнение поля (2.3) сводится к дифференциальному уравнению

$$\varphi'' + \frac{d-1}{r} \varphi' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (2.10)$$

где штрих обозначает производную по  $r$ .

Таким образом, задача о распаде ложного вакуума в квазиклассическом приближении сводится к поиску решения уравнения (2.10), удовлетворяющего граничным условиям (2.7) и (2.9). После нахождения такого решения можно вычислить на нем евклидово действие.

В квазиклассическом приближении удельная вероятность туннелирования имеет стандартный вид

$$\frac{\Gamma}{V} = \mathcal{A}e^{-S_b}, \quad (2.11)$$

где  $S_b$  — евклидово действие, вычисленное на отскоковом решении, а множитель  $\mathcal{A}$  представляет собой префактор, возникающий из квантовых флуктуаций вблизи классической конфигурации [1].

В дальнейшем основной интерес будет представлять как вычисление евклидова действия  $S_b$ , так и изучение методов нахождения префактора  $\mathcal{A}$  для рассматриваемого класса потенциалов.

### 3. Модель

В данном разделе рассмотрим теорию скалярного поля в  $(3 + 1)$  – измерениях с потенциалом вида [5]

$$V(\varphi) = \begin{cases} -\frac{\lambda_-}{4} (\varphi^4 - \beta^3 \varphi_0^4), & \varphi < \beta \varphi_0 \\ \frac{\lambda_+}{4} (\varphi - \varphi_0)^4, & \varphi > \beta \varphi_0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

где

$$\beta = \frac{\lambda_+^{1/3}}{\lambda_+^{1/3} + \lambda_-^{1/3}}. \quad (3.2)$$

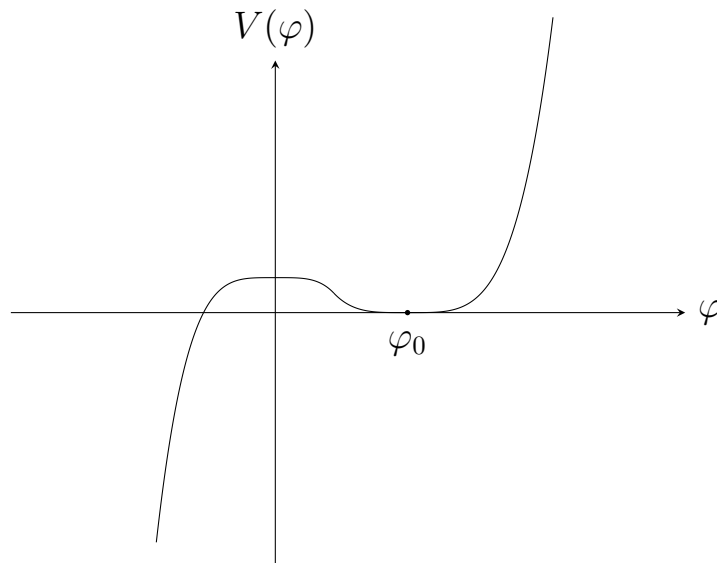


Рис. 3.1: Потенциал рассматриваемой модели

Найдем решения уравнения (2.10) в обеих областях потенциала (3.1), удовлетворяющие в левой части граничному условию (2.9), а в правой –

граничному условию (2.7) и запишем их:

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho_-}{\sqrt{\lambda_-}(\rho_-^2 + r^2)}, \quad \varphi < \beta\varphi_0 \quad (3.3)$$

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}(\rho_+^2 - r^2)} + \varphi_0, \quad \varphi > \beta\varphi_0. \quad (3.4)$$

Выполним сшивку в точке  $\varphi = \beta\varphi_0$ . Из равенства значений поля следует соотношение

$$\rho_- = -\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \left( \frac{\beta}{\beta - 1} \right)^2 \rho_+, \quad (3.5)$$

при этом можно показать, что квадрат радиуса, при котором поля одинаковы, равен:

$$r^2 = \rho_+^2 - \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}\varphi_0(\beta - 1)}. \quad (3.6)$$

Приравнивая значения производных в точке  $\varphi = \beta\varphi_0$ , находим выражение для  $\rho_+$ :

$$\rho_+ = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_+}\varphi_0(\beta - 1)^2 \left[ 1 + \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \left( \frac{\beta}{\beta - 1} \right)^4 \right]}. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.6) и учитывая (3.2), получим, что сшивка возможна только при  $r = 0$ . Следовательно, нетривиальное гладкое отскоковое решение для потенциала (3.1) отсутствует. Более того, отсутствие отскокового решения можно понять, анализируя механическую аналогию уравнений поля. Движение поля можно представить как движение скатывающейся с трением частицы в перевернутом потенциале  $-V(\varphi)$  [2]. Чтобы частица остановилась в точке ложного вакуума  $\varphi = \varphi_0$  при  $r \rightarrow \infty$ , она должна стартовать из некоторой точки левого склона перевернутого потенциала с нулевой скоростью и, теряя энергию на трение, точно прийти в  $\varphi_0$ . Однако для данного кусочного потенциала оказывается невозможным подобрать такую точку старта: любое решение либо не достигает  $\varphi_0$ , либо нарушает условия гладкости.

В работе [5] для потенциала вида (3.1) показано, что  $O(4)$ -симметричный инстантон с граничными условиями Коулмана не существует. Это можно установить, понижая порядок уравнения поля в области  $\varphi < \beta\varphi_0$ . После замены

переменных

$$\phi = r\varphi, \quad \eta = \ln r \quad (3.8)$$

уравнение поля приводится к виду

$$\ddot{\phi} - \phi + \lambda_- \phi^3 = 0, \quad (3.9)$$

где точка обозначает производную по переменной  $\eta$ . Первый интеграл такого уравнения

$$E_- = \dot{\phi}^2 - \phi^2 + \frac{\lambda_-}{2} \phi^4. \quad (3.10)$$

В исходных переменных это выражение принимает вид

$$E_- = r^4(\varphi')^2 + 2r^3\varphi\varphi' + \frac{\lambda_-}{2}r^4\varphi^4. \quad (3.11)$$

Граничное условие Коулмана  $\varphi'(0) = 0$  приводит к требованию  $E_- = 0$ , тогда как условие гладкой сшивки с решением во внешней области требует  $E_- > 0$ . Это противоречие и означает отсутствие обычного отскокового решения.

### 3.1. Существующие подходы для нахождения вероятности распада ложного вакуума в модели (3.1)

Отсутствие отскокового решения для потенциала (3.1) не означает отсутствия распада ложного вакуума. В литературе были предложены альтернативные подходы, позволяющие описывать туннелирование и в тех случаях, когда стандартный подход Коулмана неприменим.

Вместо стандартного отскока в [5] вводится семейство так называемых новых инстантонов. Основная идея состоит в том, что классическое решение не следует продолжать вплоть до центра пузыря, поскольку в ультрафиолетовой области начинают доминировать квантовые флуктуации. Поэтому вводится масштаб обрезания  $r_{uv}$ , определяемый условием порядка

$$\varphi'(r_{uv}) \sim \frac{\sigma}{r_{uv}^2}, \quad (3.1.1)$$

ниже которого классическое описание считается неприменимым. В результате сингулярное решение заменяется регуляризованной конфигурацией с

квантовым ядром, а вероятность распада вычисляется по действию такого регуляризованного инстантона.

Альтернативный подход предложен в работах [3, 4], где используются так называемые псевдо-отскоки. Псевдо-отскок представляет собой конфигурацию, в которой поле постоянно внутри некоторого ядра  $r < r_-$ , а при  $r > r_-$  удовлетворяет обычному уравнению поля с граничными условиями отскока. Таким образом, псевдо-отскок не является точным решением уравнения поля во всем пространстве, однако он минимизирует евклидово действие в классе конфигураций с фиксированным значением поля в центре.

Тем самым оба подхода заменяют единственное отскоковое решение семейством допустимых полевых конфигураций, параметризуемых значением поля в ядре или некоторым характерным радиусом. В нашей работе предлагается использовать иной подход, основанный не на модификации самой полевой конфигурации, а на регуляризации потенциала. Такой подход позволяет построить точное отскоковое решение для модифицированной задачи и затем исследовать, что происходит в пределе снятия регуляризации.

#### 4. Деформация потенциала

Поскольку для потенциала (3.1) построить отскоковое решение не удастся, естественно рассмотреть его гладкую деформацию, обладающую следующим свойством: при предельном переходе модифицированный потенциал должен стремиться к исходному.

Модифицируем потенциал задачи следующим образом: в области  $\varphi < \Lambda$  заменим левую ветвь потенциала на квадратичную функцию с массовым параметром  $m_0^2/2$ , сшиваемую гладким образом с исходной левой ветвью в точке  $\varphi = \Lambda$ . Возьмем квадратичный потенциал общего вида:

$$V(\varphi) = \frac{m_0^2}{2}\varphi^2 + b\varphi + c. \quad (4.1)$$

Потребуем непрерывности первой производной потенциала в точке  $\varphi = \Lambda$ :

$$m_0^2\varphi + b \Big|_{\varphi=\Lambda} = -\lambda_- \varphi^3 \Big|_{\varphi=\Lambda}, \quad (4.2)$$

Откуда имеем

$$b = -\lambda_- \Lambda^3 - m_0^2 \Lambda. \quad (4.3)$$

Аналогично, из условия непрерывности самого потенциала в точке  $\varphi = \Lambda$  получаем

$$\frac{m_0^2\varphi^2}{2} + (-\lambda_- \Lambda^3 - m_0^2 \Lambda)\varphi + c \Big|_{\varphi=\Lambda} = -\frac{\lambda_-}{4}(\varphi^4 - \beta^3 \varphi_0^4) \Big|_{\varphi=\Lambda}, \quad (4.4)$$

Значит,

$$c = \frac{m_0^2 \Lambda^2}{2} + \frac{3\lambda_- \Lambda^4}{4} + \frac{\lambda_-}{4} \beta^3 \varphi_0^4. \quad (4.5)$$

Таким образом, модифицированный потенциал вместо (3.1) примет вид:

$$V(\varphi) = \begin{cases} \frac{m_0^2}{2}\varphi^2 + b\varphi + c, & \varphi < \Lambda, \\ -\frac{\lambda_-}{4}(\varphi^4 - \beta^3\varphi_0^4), & \Lambda < \varphi < \beta\varphi_0, \\ \frac{\lambda_+}{4}(\varphi - \varphi_0)^4, & \varphi > \beta\varphi_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

при этом

$$b = -\lambda_- \Lambda^3 - m_0^2 \Lambda, \quad c = \frac{m_0^2 \Lambda^2}{2} + \frac{3\lambda_- \Lambda^4}{4} + \frac{\lambda_-}{4} \beta^3 \varphi_0^4. \quad (4.7)$$

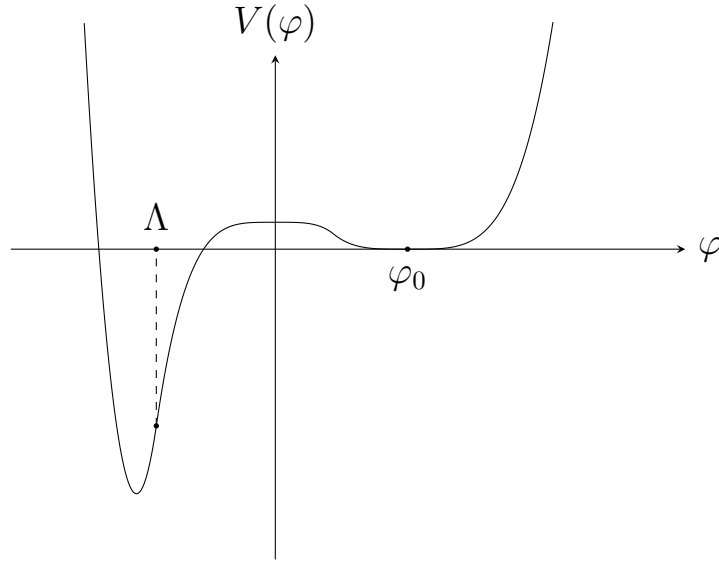


Рис. 4.1: График деформированного потенциала  $V(\varphi)$

Таким образом, уравнения поля во всех областях потенциала будут выглядеть следующим образом:

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = \lambda_+(\varphi - \varphi_0)^3, \quad \varphi > \beta\varphi_0, \quad (4.8)$$

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = -\lambda_-\varphi^3, \quad \Lambda < \varphi < \beta\varphi_0, \quad (4.9)$$

$$\varphi'' + \frac{3}{r}\varphi' = m_0^2\varphi - \lambda_-\Lambda^3 - m_0^2\Lambda, \quad \varphi < \Lambda. \quad (4.10)$$

Решая эти уравнения, получим поля, на которые нужно наложить граничные условия отскока, после чего выполнить сшивку. В области  $\varphi < \Lambda$  уравнение с помощью подходящей замены сводится к модифицированному уравнению

Бесселя и имеет решение

$$\varphi(r) = \frac{\lambda_- \Lambda^3 + m_0^2 \Lambda}{m_0^2} + A \frac{I_1(m_0 r)}{r} + B \frac{K_1(m_0 r)}{r}, \quad (4.11)$$

где  $I_\nu(x)$ ,  $K_\nu(x)$  есть соответственно функции Инфеляда и Макдональда  $\nu$ -го порядка. Накладывая на это решение граничное условие  $\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ , получим, что  $B = 0$ , то есть, решение при  $\varphi < \Lambda$  примет вид:

$$\varphi(r) = \frac{\lambda_- \Lambda^3 + m_0^2 \Lambda}{m_0^2} + A \frac{I_1(m_0 r)}{r}. \quad (4.12)$$

При  $\Lambda < \varphi < \beta\varphi_0$  общее решение (4.9) можно найти в виде

$$\varphi(r) = \sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \operatorname{cn} \left[ \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right], \quad (4.13)$$

где  $\operatorname{cn}(x) = \operatorname{cn}(x, k)$  — эллиптический косинус Якоби. Здесь  $r_0$  и  $k$  — постоянные интегрирования. Для области  $\varphi > \beta\varphi_0$  решение, стремящееся при  $r \rightarrow \infty$  к  $\varphi = \varphi_0$ , нам известно:

$$\varphi(r) = \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}(\rho_+^2 - r^2)} + \varphi_0. \quad (4.14)$$

Для получения всей полевой конфигурации необходимо выполнить сшивку найденных решений на границах соответствующих областей. Из

условий сшивки находим следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_- \Lambda^3}{m_0^2} + A \frac{I_1(m_0 r_1)}{r_1} = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\lambda_-}} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \frac{\text{cn}(g_{k,1})}{r_1} = \Lambda, \\ \frac{A}{r_1^2} \left[ \frac{r_1 m_0}{2} (I_0(m_0 r_1) + I_2(m_0 r_1)) - I_1(m_0 r_1) \right] = \\ = -\sqrt{\frac{2}{\lambda_-}} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \frac{1}{r_1^2} \left( \frac{\text{sn}(g_{k,1}) \text{dn}(g_{k,1})}{\sqrt{2k^2 - 1}} + \text{cn}(g_{k,1}) \right), \\ \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}(\rho_+^2 - r_2^2)} + \varphi_0 = \beta\varphi_0, \\ \sqrt{\frac{2}{\lambda_-}} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \frac{\text{cn}(g_{k,2})}{r_2} = \beta\varphi_0, \\ \frac{4\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}} \frac{r_2}{(\rho_+^2 - r_2^2)^2} = -\sqrt{\frac{2}{\lambda_-}} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}} \frac{1}{r_2^2} \left( \frac{\text{sn}(g_{k,2}) \text{dn}(g_{k,2})}{\sqrt{2k^2 - 1}} + \text{cn}(g_{k,2}) \right), \end{array} \right. \quad (4.15)$$

где введено обозначение  $g_{k,i} = \ln(r_i/r_0)/\sqrt{2k^2 - 1}$ ,  $i = 1, 2$ . Из этой системы находятся константы сшивки  $r_0, r_1, r_2, A, k, \rho_+$ . Ввиду трансцендентности уравнений, найти эти константы аналитически не представляется возможным. Метод численного нахождения этих констант будет рассмотрен в следующей главе.

Хотя константы сшивки находятся только численно, евклидово действие на таком отскоковом решении можно вычислить аналитически. Оно будет зависеть от параметров квадратичной части потенциала  $m_0, \Lambda$ , а также от констант сшивки  $r_0, r_1, r_2, A, k, \rho_+$ . Вычислим евклидово действие. Для этого воспользуемся стандартным соотношением, получаемым после подстановки уравнения поля в евклидово действие [2]:

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^{+\infty} \left[ V(\varphi) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right] r^3 dr. \quad (4.16)$$

Получим следующие выражения:

$$S_E^I = 2\pi^2 \int_0^{r_1} \left[ \frac{b}{2}\varphi + c \right] r^3 dr = \pi^2 r_1^2 \left( \frac{cr_1^2}{2} - \frac{b^2 r_1^2}{4m_0^2} + A \frac{b}{m_0} I_2(m_0 r_1) \right), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} S_E^{II} &= 2\pi^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_-}{4} \left( \beta^3 \varphi_0^4 + \frac{4}{\lambda_-^2} \frac{k^4}{(2k^2 - 1)} \left[ \frac{1}{r^4} \text{cn}^4 \left[ \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \right] \right) r^3 dr = \\ &= \frac{\pi^2 \lambda_- \beta^3 \varphi_0^4}{8} (r_2^4 - r_1^4) + \frac{2\pi^2}{3\lambda_- (2k^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{(1 - k^2)(2 - 3k^2)}{\sqrt{2k^2 - 1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \right. \\ &+ k^2 \left( \text{sn} \left[ \frac{\ln \frac{r_2}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \text{cn} \left[ \frac{\ln \frac{r_2}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \text{dn} \left[ \frac{\ln \frac{r_2}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] - \right. \\ &- \left. \text{sn} \left[ \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \text{cn} \left[ \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \text{dn} \left[ \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \right) - \\ &\left. - 2(1 - 2k^2) \left[ E \left( \text{am} \left[ \frac{\ln \frac{r_2}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \right) - E \left( \text{am} \left[ \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}} \right] \right) \right] \right], \quad (4.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_E^{III} &= 2\pi^2 \int_{r_2}^{+\infty} \left( -\frac{\lambda_+}{4} \right) \left( \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}(\rho_+^2 - r^2)} \right)^3 \left( \frac{2\sqrt{2}\rho_+}{\sqrt{\lambda_+}(\rho_+^2 - r^2)} + 2\varphi_0 \right) r^3 dr = \\ &= \frac{16\pi^2}{3\lambda_+} \frac{1}{\left( 1 - \left( \frac{r_2}{\rho_+} \right)^2 \right)^3} + \frac{4\sqrt{2}\pi^2}{\sqrt{\lambda_+}} \frac{\varphi_0 \rho_+ - \sqrt{\frac{2}{\lambda_+}}}{\left( 1 - \left( \frac{r_2}{\rho_+} \right)^2 \right)^2} - \frac{8\sqrt{2}\pi^2}{\sqrt{\lambda_+}} \frac{\varphi_0 \rho_+}{1 - \left( \frac{r_2}{\rho_+} \right)^2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Полное евклидово действие получается суммированием вкладов от всех трех областей:

$$S_E = S_E^I + S_E^{II} + S_E^{III}. \quad (4.20)$$

## 5. Поиск констант сшивки

Система уравнений сшивки, полученная в главе 4, не допускает аналитического решения. Для ее численного решения методом Ньютона–Рафсона необходимо задать начальное приближение. Для его нахождения будем работать в режиме

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \ll 1, \quad (5.1)$$

в котором после обезразмеривания точки сшивки  $x_1$  и  $x_2$  оказываются близки друг к другу ( $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ ). Это позволяет разложить промежуточное решение по малой разности  $x_2 - x_1$  и свести систему к одному трансцендентному уравнению на  $x_1$ .

Обезразмерим систему следующим образом:

$$x_+ = \rho_+ \varphi_0, \quad x_{0,1,2} = r_{0,1,2} \varphi_0, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\varphi_0}, \quad \tilde{m}_0 = \frac{m_0}{\varphi_0}. \quad (5.2)$$

Тогда система уравнений сшивки принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_- \tilde{\Lambda}^3}{\tilde{m}_0^2} + A \frac{I_1(\tilde{m}_0 x_1)}{x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \frac{\text{cn}(u_{k,1})}{x_1} = \tilde{\Lambda}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{x_1^2} \left( \frac{x_1 \tilde{m}_0}{2} (I_0(\tilde{m}_0 x_1) + I_2(\tilde{m}_0 x_1)) - I_1(\tilde{m}_0 x_1) \right) = \\ = -\sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \frac{1}{x_1^2} \left( \frac{\text{sn}(u_{k,1}) \text{dn}(u_{k,1})}{\sqrt{2k^2 - 1}} + \text{cn}(u_{k,1}) \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{2\sqrt{2}x_+}{\sqrt{\lambda_+} (x_+^2 - x_2^2)} + 1 = \beta, \quad (5.6)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \frac{\text{cn}(u_{k,2})}{x_2} = \beta, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{2}x_+}{\sqrt{\lambda_+}} \frac{x_2}{(x_+^2 - x_2^2)^2} = \\ = -\sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \frac{1}{x_2^2} \left( \frac{\text{sn}(u_{k,2}) \text{dn}(u_{k,2})}{\sqrt{2k^2 - 1}} + \text{cn}(u_{k,2}) \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $u_{k,i} = \ln(x_i/x_0)/\sqrt{2k^2 - 1}$ ,  $i = 1, 2$ . В соответствии с указанным режимом для любой достаточно гладкой функции можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора в точке  $x_1$ :

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \mathcal{O}((x_2 - x_1)^2), \quad (5.9)$$

$$f'(x_2) = f'(x_1). \quad (5.10)$$

Обозначим через  $\tilde{\varphi}_2(x)$  обезразмеренное решение (4.13) и выразим искомые величины через  $x_1$ :

$$A = -\frac{\lambda_- \tilde{\Lambda}^3}{\tilde{m}_0^2} \frac{x_1}{I_1(\tilde{m}_0 x_1)}, \quad (5.11)$$

$$x_2 = \frac{\beta - \tilde{\Lambda}}{\tilde{\varphi}'_2(x_1)} + x_1, \quad (5.12)$$

$$x_+ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 + \lambda_+(1 - \beta)^2 x_2^2}}{\sqrt{\lambda_+}(\beta - 1)}, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_- \tilde{\Lambda}^3}{\tilde{m}_0^2} \frac{x_1}{I_1(\tilde{m}_0 x_1)} \left( \frac{x_1 \tilde{m}_0}{2} (I_0(\tilde{m}_0 x_1) + I_2(\tilde{m}_0 x_1)) - I_1(\tilde{m}_0 x_1) \right) = \\ = \tilde{\Lambda} x_1 + \sqrt{\frac{2k}{\lambda_- (2k^2 - 1)} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{k} x_1^2} \sqrt{-\frac{k}{2} + \frac{1}{2} \frac{k}{2k^2 - 1} + \frac{\tilde{\Lambda}^2 \lambda_- k}{2} x_1^2}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$x_0 = x_1 \exp \left[ -\sqrt{2k^2 - 1} \operatorname{cn}^{-1} \left( \tilde{\Lambda} \sqrt{\frac{\lambda_-}{2} \frac{\sqrt{2k^2 - 1}}{k} x_1} \right) \right]. \quad (5.15)$$

При получении уравнения (5.14) мы учли свойства эллиптических функций Якоби:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{cn}^2(u, k) &= 1, \\ \operatorname{dn}^2(u, k) + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) &= 1 \end{aligned}$$

и применили их к (5.5), выразив значение эллиптического косинуса из (5.4). В линейном приближении по малой разности  $x_2 - x_1$  производные в точках  $x_1$  и  $x_2$  совпадают:

$$\tilde{\varphi}'_2(x_2) = \tilde{\varphi}'_2(x_1). \quad (5.16)$$

Тогда из условия равенства производных на правой границе сшивки получаем:

$$\frac{4\sqrt{2}x_+}{\sqrt{\lambda_+}} \frac{x_2}{(x_+^2 - x_2^2)^2} = A \frac{\frac{x_1 \tilde{m}_0}{2} (I_0(\tilde{m}_0 x_1) + I_2(\tilde{m}_0 x_1)) - I_1(\tilde{m}_0 x_1)}{x_1^2}. \quad (5.17)$$

Подставляя (5.12), (5.13) и (5.11) соответственно в левую и правую части (5.17), получим уравнение на  $x_1$ :

$$\tilde{\varphi}'_2(x_1) = \frac{\lambda_+(\beta - 1)^3}{2} \frac{\frac{\beta - \tilde{\Lambda}}{\tilde{\varphi}'_2(x_1)} + x_1}{1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda_+(\beta - 1)^2}{2} \left( \frac{\beta - \tilde{\Lambda}}{\tilde{\varphi}'_2(x_1)} + x_1 \right)^2}}, \quad (5.18)$$

где

$$\tilde{\varphi}'_2(x_1) = -\frac{\lambda_- \tilde{\Lambda}^3 \frac{x_1 \tilde{m}_0}{2} (I_0(\tilde{m}_0 x_1) + I_2(\tilde{m}_0 x_1)) - I_1(\tilde{m}_0 x_1)}{\tilde{m}_0^2 x_1 I_1(\tilde{m}_0 x_1)}.$$

Уравнения (5.14) и (5.15) содержат неявную зависимость от  $x_1$ . Поэтому численное решение строится последовательно. Сначала из уравнения (5.18) находится значение  $x_1$ . Затем это значение подставляется в (5.14), что позволяет определить параметр  $k$ . Наконец, найденные  $x_1$  и  $k$  подставляются в (5.15), после чего определяется  $x_0$ . Для параметров  $\tilde{\Lambda} = -0.31$ ,  $\tilde{m}_0 = 0.1$ ,  $\lambda_- = 0.14$ ,  $\lambda_+ = 0.007$  численно найдено решение системы уравнений (5.3)–(5.8):

$$\begin{array}{l} x_1 = 234.682, \\ x_2 = 248.558, \\ A = 7.762406 \cdot 10^{-8}, \\ k = -0.707373, \\ x_0 = 226.502, \\ x_+ = 229.841. \end{array} \quad (5.19)$$

Соответствующая полевая конфигурация приведена на рис. 5.1

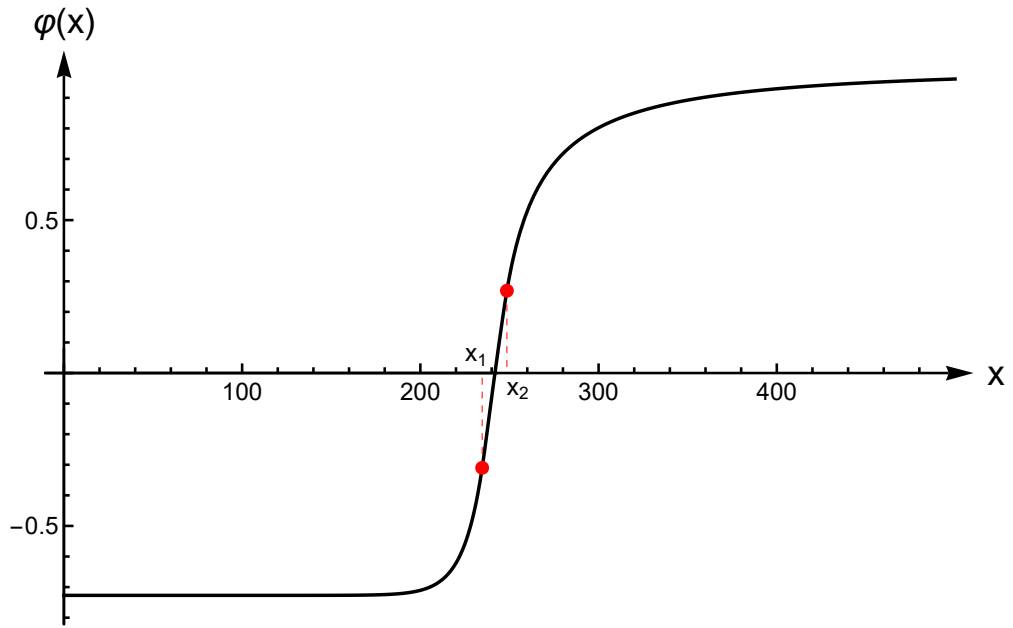


Рис. 5.1: График отскокового решения при  $\tilde{\Lambda} = -0.31$ .

Используя найденную полевую конфигурацию как начальное приближение, далее система (5.3)–(5.8) решалась численно методом Ньютона–Рафсона. Для решения для параметра  $\tilde{\Lambda} + d\tilde{\Lambda}$  решение, найденное при значении  $\tilde{\Lambda}$ , использовалось в качестве начального приближения. Это позволило численно проследить поведение коэффициентов сшивки для полной системы вплоть до  $\tilde{\Lambda} = -15000$ .

На рис. 5.2 приведены примеры различных полевых конфигураций при некоторых значениях параметра  $\tilde{\Lambda}$ .

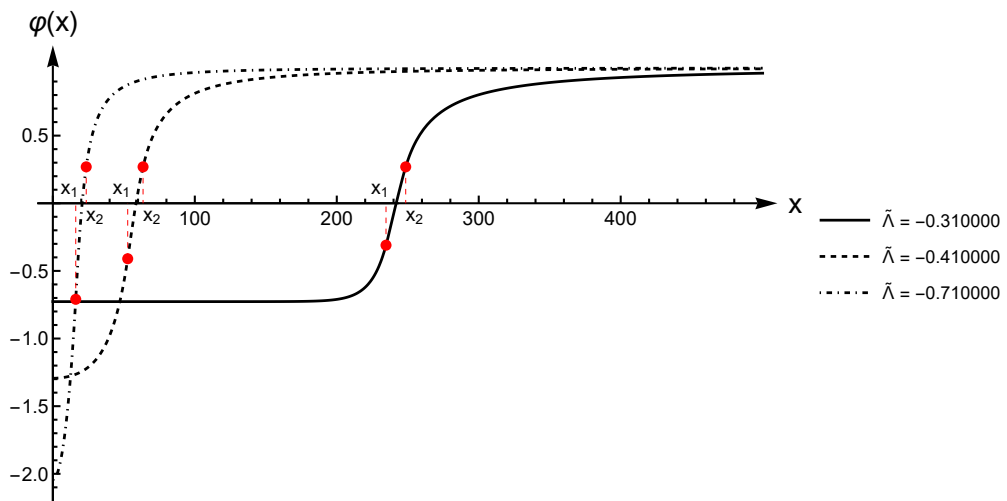


Рис. 5.2: Графики различных отскоковых решений при разных значениях  $\tilde{\Lambda}$ .

Видно, что при увеличении  $|\tilde{\Lambda}|$  размер решения уменьшается, однако его значение при  $x = 0$  растет. При  $\tilde{\Lambda} \rightarrow -\infty$  отскоковое решение становится сингулярным: точки сшивки  $x_1$  и  $x_2$  стремятся к нулю, а значение поля при  $x = 0$  стремится к  $-\infty$ . Численные результаты показывают, что данная асимптотическая тенденция устанавливается уже при сравнительно небольших по модулю значениях параметра  $\tilde{\Lambda}$ . Характерный профиль поля для такого режима представлен на рис. 5.3.

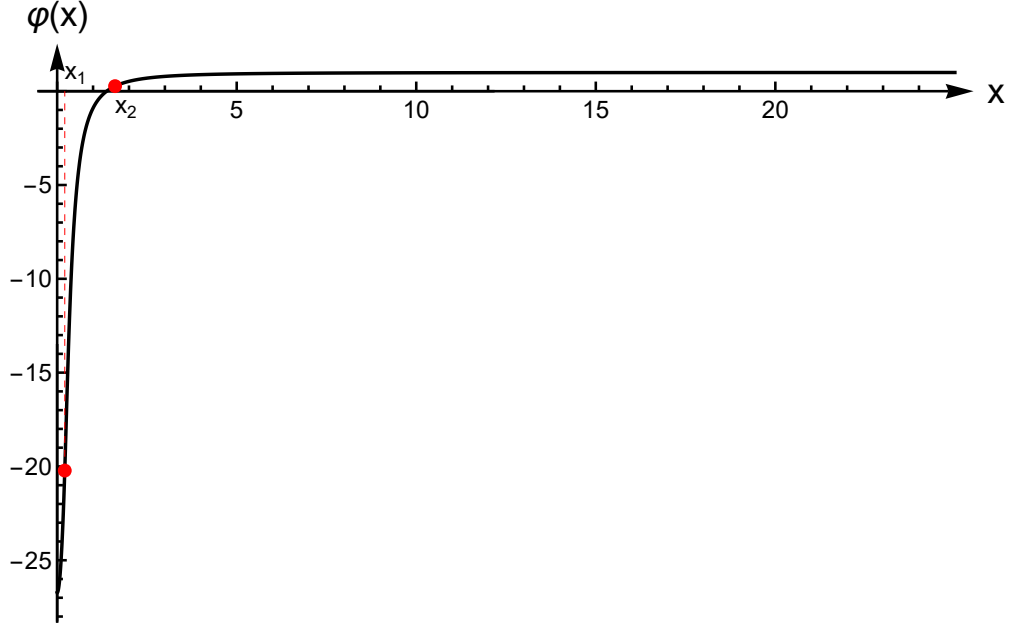


Рис. 5.3: График отскокового решения при  $\tilde{\Lambda} = -20.22$ .

Вычислим евклидово действие на полученных численно решениях. В обезразмеренных единицах  $x = r\varphi_0$ ,  $\tilde{V} = V/\varphi_0^4$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi/\varphi_0$  справедлива формула

$$S_E = 2\pi^2 \int_0^{+\infty} x^3 \left[ \tilde{V}(\tilde{\varphi}) - \frac{\tilde{\varphi}}{2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\varphi}} \right] dx. \quad (5.20)$$

Тогда вклад от каждой области потенциала записывается в виде:

$$S_E^I = 2\pi^2 \int_0^{x_1} x^3 \left[ -\frac{\lambda_- \tilde{\Lambda}^3 + \tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda}}{2} \tilde{\varphi} + \frac{\tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda}^2}{2} + \frac{3\lambda_- \tilde{\Lambda}^4}{4} + \frac{\lambda_- \beta^3}{4} \right] dx, \quad (5.21)$$

$$S_E^{II} = 2\pi^2 \int_{x_1}^{x_2} x^3 \left[ \frac{\lambda_-}{4} (\beta^3 + \tilde{\varphi}^4) \right] dx, \quad (5.22)$$

$$S_E^{III} = 2\pi^2 \int_{x_2}^{+\infty} x^3 \left[ -\frac{\lambda_+}{4} (\tilde{\varphi} - 1)^3 (\tilde{\varphi} + 1) \right] dx. \quad (5.23)$$

Помимо численного решения полной системы, асимптотическое поведение констант сшивки в пределе  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$  можно получить аналитически.

Напомним, что для нахождения евклидова действия на отскоковом решении в потенциале изначальной задачи, мы модифицировали его согласно (4.6). Итоговый ответ получается в пределе  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$  (см. Приложение А). В указанном пределе  $\tilde{m}_0 x_1 \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow -1$ . Для решения уравнений сшивки воспользуемся следующими разложениями:

$$A \frac{I_1(\tilde{m}_0 x_1)}{x_1} \simeq A \frac{\tilde{m}_0}{2} + \mathcal{O}(x_1^2), \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \frac{\text{cn}\left[\frac{\ln \frac{x}{x_0}}{\sqrt{2k^2 - 1}}\right]}{x} \simeq \\ & \simeq -2 \sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{x_0}{x^2 + x_0^2}} \left[ 1 + (k + 1) \left( 1 - \frac{3(x^2 - x_0^2) \ln \frac{x}{x_0}}{2(x^2 + x_0^2)} - \frac{(x^2 - x_0^2)^2}{8x^2 x_0^2} \right) \right] + \\ & + \mathcal{O}((k + 1)^2). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Решая систему уравнений сшивки в пределе  $\frac{x_+}{x_2} \rightarrow 0$ ,  $\frac{x_0}{x_2} \rightarrow 0$ ,  $\frac{x_1}{x_0} \rightarrow 0$ , получим асимптотические формулы:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-}} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{\frac{7}{6}}}, \quad A = \frac{2\lambda_-}{\tilde{m}_0^3} |\tilde{\Lambda}|^3, \quad (5.26)$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_- (1 - \beta)}} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{\frac{1}{2}}}, \quad x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-}} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|}, \quad (5.27)$$

$$k = -1 + \frac{8}{|\tilde{\Lambda}|}, \quad x_+ = \frac{2\sqrt{2\lambda_+}}{\lambda_-} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|}. \quad (5.28)$$

Для евклидова действия на отскоковом решении имеем:

$$S_E \xrightarrow{\tilde{\Lambda} \rightarrow -\infty} \frac{8\pi^2}{3\lambda_-}. \quad (5.29)$$

Таким образом, в пределе снятия регуляризации евклидово действие стремится к значению, совпадающему с действием масштабнo-инвариантного липатона [6], что подтверждается и численными расчетами (см. рис. 5.4).

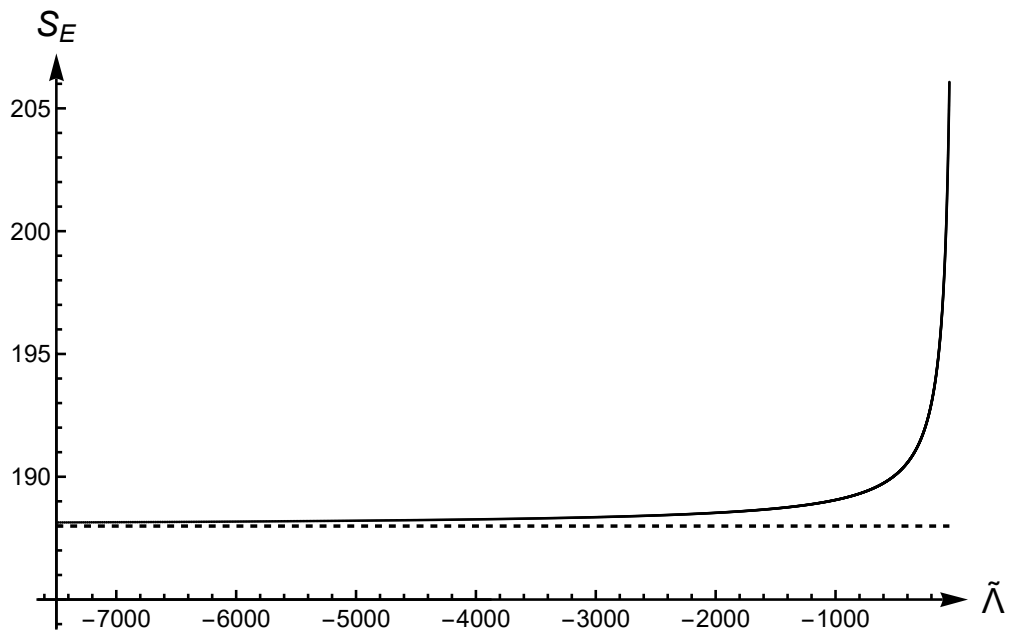


Рис. 5.4: График зависимости численно найденного евклидова действия на отскоковом решении  $S_E$  от  $\tilde{\Lambda}$ . Пунктиром показано значение евклидова действия на липатоне  $8\pi^2/(3\lambda_-)$ .

## 6. Применение деформации потенциала к вычислению квантовых поправок

Важным преимуществом предложенного в данной работе метода регуляризации потенциала по сравнению с альтернативными подходами [3, 4, 5] является возможность его применения к вычислению квантовых поправок к лидирующему квазиклассическому ответу для вероятности распада ложного вакуума. Действительно, при любом конечном значении параметра регуляризации  $\Lambda$  существует точное отскоковое решение, на фоне которого может быть построена стандартная теория возмущений.

Для реализации этого подхода воспользуемся следующим математическим тождеством:

$$1 = \int_0^{+\infty} e^{-\xi} d\xi. \quad (6.1)$$

Вставим эту единицу в евклидов функциональный интеграл

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_E[\varphi]}, \quad (6.2)$$

и сделаем замену переменных  $\xi \rightarrow \Lambda$ , где

$$\xi(\Lambda) = \int \Delta V(\Lambda) d^4x \quad (6.3)$$

и

$$\Delta V(\Lambda) = \left[ \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + b\varphi + c + \frac{\lambda_-}{4} (\varphi^4 - \beta^3 \varphi_0^4) \right] \theta(\Lambda - \varphi) \quad (6.4)$$

по сути есть разность между деформированным (4.6) и исходным (3.1) потенциалами в области  $\varphi < \Lambda$  (коэффициенты  $b$  и  $c$  определены в (4.7)).

Вычислим функцию  $\xi(\Lambda)$  в безразмерных единицах  $x = r\varphi_0$ . Подставляя профиль поля во внутренней области и раскладывая подынтегральное выражение по малому отклонению  $\delta\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} - \tilde{\Lambda}$  (подробный

вывод приведен в Приложении В), в асимптотике  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$  получаем:

$$\xi \simeq \frac{24\pi^2}{\lambda_-} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{4/3}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{1/3}}\right) \right]. \quad (6.5)$$

Производная в лидирующем порядке:

$$\frac{d\xi}{d\tilde{\Lambda}} \simeq \frac{32\pi^2}{\lambda_-} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{7/3}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{1/3}}\right) \right]. \quad (6.6)$$

Функция  $\xi(\Lambda)$ , определенная в (6.3), является строго монотонно возрастающей на интервале  $\Lambda \in (-\infty, 0]$ . Действительно, выражение под интегралом представляет собой разность деформированного и исходного потенциалов при  $\varphi < \Lambda$ . Как показано в Приложении В, эта разность положительна для всех  $\varphi < \Lambda$ . При увеличении  $\Lambda$  от  $-\infty$  до 0 область интегрирования расширяется, поэтому  $\xi(\Lambda)$  монотонно возрастает от 0 до  $+\infty$ . Тогда из (6.5) сразу находим новые пределы:  $\xi \rightarrow +\infty$  отвечает  $\tilde{\Lambda} \rightarrow 0$ , а  $\xi \rightarrow 0$  отвечает  $\tilde{\Lambda} \rightarrow -\infty$ . После замены (6.3) окончательно получаем:

$$Z = \int_{-\infty}^0 d\Lambda \int \mathcal{D}\varphi \frac{d\xi}{d\Lambda} e^{-(S_E[\varphi] + \xi(\Lambda))}. \quad (6.7)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению стандартного функционального интеграла на фоне отскокового решения  $\varphi_b(r, \Lambda)$ , существующего при каждом конечном  $\Lambda$ , с дополнительным предэкспоненциальным множителем  $d\xi/d\Lambda$  и последующему вычислению интеграла по  $\Lambda$ .

Поведение итогового интеграла по  $\Lambda$  в (6.7) будет определяться поведением функционального детерминанта оператора флуктуаций на фоне отскокового решения. Вычисление этого детерминанта представляет собой отдельную задачу, требующую в том числе перенормировки, и выходит за рамки настоящей работы. Отметим, однако, что сама возможность свести вычисление квантовых поправок к стандартному функциональному интегралу на фоне точного отскокового решения является существенным преимуществом предложенного метода.

## 7. Выводы

В данной работе было проведено исследование распада ложного вакуума в теории одного действительного скалярного поля с потенциалом (3.1), для которого стандартная квазиклассическая процедура Коулмана неприменима из-за строгого отсутствия  $O(4)$ -симметричного отскокового решения.

Для решения данной проблемы был предложен и последовательно реализован метод регуляризации потенциала. Исходный потенциал был деформирован путем введения квадратичного потенциала в области  $\varphi < \Lambda$ , что позволило искусственно ограничить потенциал снизу и обеспечить существование отскокового решения. Параметром регуляризации выступало значение поля  $\Lambda$ , при котором происходила сшивка исходного и квадратичного потенциалов.

В ходе выполнения работы были получены следующие основные результаты:

1. Аналитически найдены решения евклидовых уравнений поля во всех областях кусочно-заданного деформированного потенциала.

2. Составлена и исследована система уравнений сшивки. С помощью численных и аналитических методов были найдены асимптотики параметров отскокового решения в пределе снятия регуляризации ( $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$ ). Показано, что в данном пределе отскоковое решение стремится к сингулярной конфигурации.

3. Вычислено классическое евклидово действие на отскоковом решении. Показано, что в пределе снятия регуляризации действие стремится к конечному значению  $S_E \rightarrow 8\pi^2/(3\lambda_-)$ , а вероятность распада ложного вакуума в главном квазиклассическом приближении стремится к  $e^{-8\pi^2/(3\lambda_-)}$ .

4. Показано, что предложенный метод регуляризации может быть использован для нахождения квантовых поправок к вероятности распада ложного вакуума.

Таким образом, в дипломной работе разработан метод, позволяющий вычислять не только показатель экспоненты подавления туннелирования для потенциалов без отскокового решения, но и квантовые поправки. Это отличает данный подход от альтернативных методов (таких как псевдоотскоки или обрезанные сингулярные инстантоны) и делает его перспективным инструментом для изучения метастабильных состояний в теоретико-полевых моделях.

## 8. Заключение

В данной работе исследована задача о распаде ложного вакуума в теории одного действительного скалярного поля с потенциалом (3.1). Для такого потенциала стандартное отскоковое решение Коулмана не существует, что делает неприменимым обычный квазиклассический подход.

Предложен метод гладкой деформации потенциала, в котором потенциал модифицируется так, что отскоковое решение появляется. Для модифицированного потенциала вычислено евклидово действие, которое в пределе снятия регуляризации стремится к действию на масштабно-инвариантном липатоне [6].

Показано, что предложенный метод может быть применен для последовательного вычисления квантовых поправок к лидирующему квазиклассическому ответу для вероятности распада ложного вакуума в рассмотренной модели. В этом состоит его преимущество по сравнению с альтернативными подходами, основанными на псевдо-отскоках [3, 4] и новых инстантонах [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory,” Phys. Rev. D **15** (1977), 2929-2936 [erratum: Phys. Rev. D **16** (1977), 1248] doi:10.1103/PhysRevD.15.2929
2. В. А. Рубаков, “Классические калибровочные поля: Бозонные теории”, 2-е изд., испр. и доп. (КомКнига, Москва, 2005).
3. J. R. Espinosa and J. Huertas, “Pseudo-bounces vs. new instantons,” JCAP **12** (2021) no.12, 029 doi:10.1088/1475-7516/2021/12/029 [arXiv:2106.04541 [hep-th]].
4. J. R. Espinosa, “Tunneling without Bounce,” Phys. Rev. D **100** (2019) no.10, 105002 doi:10.1103/PhysRevD.100.105002 [arXiv:1908.01730 [hep-th]].
5. V. Mukhanov, E. Rabinovici and A. Sorin, “Quantum Fluctuations and New Instantons II: Quartic Unbounded Potential,” Fortsch. Phys. **69** (2021) no.2, 2000101 doi:10.1002/prop.202000101 [arXiv:2009.12444 [hep-th]].
6. L. N. Lipatov, “Divergence of the perturbation-theory series and the quasi-classical theory,” Sov. Phys. JETP **45** (1977), 216-223 Leningrad-76-255.

А. Асимптотики параметров отскокового решения и евклидова действия в пределе снятия регуляризации

В данном приложении приводится подробный аналитический вывод асимптотик при  $\tilde{\Lambda} \rightarrow -\infty$  параметров отскокового решения  $(x_1, x_2, x_0, x_+, A, k)$ , являющихся корнями системы уравнений сшивки (5.3)–(5.8). Полученные аналитические зависимости сравниваются с результатами численного решения этой системы (графики сравнения представлены на рис. А.1–А.6). Кроме того, аналитически вычисляется предел евклидова действия при  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим предел  $\tilde{\Lambda} \rightarrow -\infty$ . Для удобства введем обозначения  $a = \sqrt{2/\lambda_-}$ ,  $\mu = \tilde{m}_0$ ,  $M = -\tilde{\Lambda}$ .

В промежуточной области безразмерное поле  $\tilde{\varphi}(x)$  удовлетворяет уравнению (4.9) в обезразмеренных переменных:

$$\tilde{\varphi}'' + \frac{3}{x}\tilde{\varphi}' = -\lambda_- \tilde{\varphi}^3. \quad (\text{A.1})$$

Перейдем к логарифмическим переменным  $t = \ln x$  и вспомогательной функции  $\psi(t) = x\tilde{\varphi}(x)$ . Прямое вычисление производных дает выражение радиального оператора в виде  $\tilde{\varphi}'' + \frac{3}{x}\tilde{\varphi}' = x^{-3}(\ddot{\psi} - \psi)$ , где точка обозначает производную по  $t$ . Тогда исходное уравнение поля принимает автономный вид:

$$\ddot{\psi} = \psi - \lambda_- \psi^3. \quad (\text{A.2})$$

Данное уравнение обладает первым интегралом:

$$\varepsilon = \dot{\psi}^2 - \psi^2 + \frac{\lambda_-}{2}\psi^4, \quad (\text{A.3})$$

где  $\varepsilon$  — константа интегрирования.

Согласно решению (4.13), в промежуточной области

$$\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{\ln(x/x_0)}{\sqrt{2k^2 - 1}}\right)}{x}, \quad (\text{A.4})$$

поэтому для функции  $\psi(x) = x\tilde{\varphi}(x)$  имеем

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}} \operatorname{cn}\left(\frac{\ln(x/x_0)}{\sqrt{2k^2 - 1}}\right). \quad (\text{A.5})$$

При  $x = x_0$  аргумент эллиптического косинуса равен нулю, так как

$$\frac{\ln(x/x_0)}{\sqrt{2k^2 - 1}} \Big|_{x=x_0} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Используя свойства эллиптических функций Якоби

$$\operatorname{cn}(0, k) = 1, \quad \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) \Big|_{u=0} = -\operatorname{sn}(0, k) \operatorname{dn}(0, k) = 0, \quad (\text{A.7})$$

получаем

$$\psi(x_0) = a \frac{k}{\sqrt{2k^2 - 1}}, \quad \dot{\psi}(x_0) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Подстановка этих значений в (A.3) дает связь параметров  $k$  и  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{2}{\lambda_-} \frac{k^2(1 - k^2)}{(2k^2 - 1)^2}. \quad (\text{A.9})$$

Полагая  $k = -1 + \delta$  при  $\delta \rightarrow 0^+$ , в лидирующем порядке получаем:

$$\varepsilon \simeq \frac{4}{\lambda_-} \delta, \quad \text{откуда} \quad k + 1 \simeq \frac{\lambda_-}{4} \varepsilon. \quad (\text{A.10})$$

При  $\varepsilon = 0$  решение уравнения (A.3) имеет вид

$$\psi(t) = -a \operatorname{sech}(t - t_0), \quad (\text{A.11})$$

где  $x_0 = e^{t_0}$ . Учитывая, что  $\operatorname{sech}(t - t_0) = 2/(x/x_0 + x_0/x)$ , для области малых радиусов  $x \ll x_0$  первым слагаемым в знаменателе можно пренебречь, откуда имеем асимптотику  $\psi(x) \simeq -2a(x/x_0)$ . Это соответствует постоянному значению поля  $\tilde{\varphi}(x) = \psi/x \simeq -2a/x_0$ . Сшивая это выражение с условием в

минимуме потенциала  $\tilde{\varphi}(x_1) = -M$ , находим:

$$x_0 \simeq \frac{2a}{M} = 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_-} \frac{1}{M}}. \quad (\text{A.12})$$

Первое уравнение сшивки (5.3) имеет вид  $-\lambda_- M^3/\mu^2 + Ax_1^{-1}I_1(\mu x_1) = 0$ . При  $x_1 \rightarrow 0$  используем разложение функции Инфельда  $I_1(z) \simeq z/2$ , что дает:

$$A \simeq \frac{2\lambda_-}{\mu^3} M^3. \quad (\text{A.13})$$

Из уравнения (5.6) имеем

$$\frac{2\sqrt{2}x_+}{\sqrt{\lambda_+}(x_+^2 - x_2^2)} + 1 = \beta. \quad (\text{A.14})$$

В асимптотическом режиме  $x_+ \ll x_2$  в знаменателе этого выражения можно положить

$$x_+^2 - x_2^2 \simeq -x_2^2, \quad (\text{A.15})$$

что приводит к соотношению:

$$x_+ \simeq \frac{\sqrt{\lambda_+}}{2\sqrt{2}}(1 - \beta)x_2^2. \quad (\text{A.16})$$

В точке  $x = x_2$  значение поля равно  $\tilde{\varphi}(x_2) = \beta$ , следовательно,  $\psi_2 = \beta x_2$ .

Учитывая правило дифференцирования сложной функции

$$\dot{\psi} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx}(x\tilde{\varphi}) = x^2\tilde{\varphi}' + \psi \quad (\text{A.17})$$

и асимптотику производной поля во внешней области  $\tilde{\varphi}'_3(x_2) \simeq \frac{4\sqrt{2}x_+}{\sqrt{\lambda_+}x_2^3}$ , с учетом (A.16) получаем:

$$\dot{\psi}_2 \simeq 2(1 - \beta)x_2 + \beta x_2 = (2 - \beta)x_2. \quad (\text{A.18})$$

Подставляя  $\psi_2$  и  $\dot{\psi}_2$  в первый интеграл (A.3) и пренебрегая вкладом четвертого порядка, находим:

$$\varepsilon \simeq (2 - \beta)^2 x_2^2 - \beta^2 x_2^2 = 4(1 - \beta)x_2^2. \quad (\text{A.19})$$

Для области  $x \gg x_0$  значение функции мало ( $\psi \rightarrow 0$ ). Действительно, учитывая асимптотическое поведение поля  $\tilde{\varphi}(x) \sim 1/x^2$  при  $x \rightarrow \infty$ , получаем:

$$\psi = x\tilde{\varphi}(x) \sim x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{A.20})$$

Поэтому кубическим членом  $\lambda_- \psi^3$  в (A.2) можно пренебречь, и уравнение линеаризуется:  $\ddot{\psi} \simeq \psi$ . Его решение

$$\psi(x) = C_1 \left( \frac{x}{x_0} \right) + C_2 \left( \frac{x_0}{x} \right). \quad (\text{A.21})$$

На правом хвосте  $t \gg t_0$ , что соответствует  $x \gg x_0$ , полученное решение должно асимптотически совпадать с  $\psi(t) = -a \operatorname{sech}(t - t_0)$ . Используя разложение гиперболического секанса при больших положительных аргументах  $\operatorname{sech}(t - t_0) \simeq 2e^{-(t-t_0)} = 2(x_0/x)$ , находим:

$$\psi \simeq -2a \left( \frac{x_0}{x} \right). \quad (\text{A.22})$$

Сравнивая это выражение с убывающей ветвью решения (A.21), имеем:

$$C_2 = -2a. \quad (\text{A.23})$$

Для линеаризованного решения первый интеграл (A.3) упрощается до  $\varepsilon \simeq \dot{\psi}^2 - \psi^2$ . Подставляя в него полученное решение (A.21) и его производную

$$\dot{\psi} = \frac{d}{dt} \left( C_1 \frac{x}{x_0} + C_2 \frac{x_0}{x} \right) = \frac{d}{dt} (C_1 e^{t-t_0} + C_2 e^{t_0-t}) = C_1 \frac{x}{x_0} - C_2 \frac{x_0}{x}, \quad (\text{A.24})$$

находим:

$$\varepsilon \simeq \left( C_1 \frac{x}{x_0} - C_2 \frac{x_0}{x} \right)^2 - \left( C_1 \frac{x}{x_0} + C_2 \frac{x_0}{x} \right)^2 = -4C_1 C_2 \simeq 8aC_1. \quad (\text{A.25})$$

Неизвестную константу  $C_1$  найдем из сшивки  $\psi$  и  $\dot{\psi}$  в точке  $x_2$ :

$$C_1 \frac{x_2}{x_0} + C_2 \frac{x_0}{x_2} = \beta x_2, \quad (\text{A.26})$$

$$C_1 \frac{x_2}{x_0} - C_2 \frac{x_0}{x_2} = (2 - \beta)x_2, \quad (\text{A.27})$$

откуда находим  $C_1 = x_0$ . Окончательно для  $\varepsilon$  получаем:

$$\varepsilon \simeq 8ax_0 \simeq \frac{32}{\lambda_-} M^{-1}. \quad (\text{A.28})$$

Сравнивая (A.10), (A.19) и (A.28), находим:

$$k \simeq -1 + \frac{8}{M}, \quad (\text{A.29})$$

$$x_2 \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-(1-\beta)}} M^{-1/2}, \quad (\text{A.30})$$

$$x_+ \simeq \frac{2\sqrt{2\lambda_+}}{\lambda_-} M^{-1}. \quad (\text{A.31})$$

В левой точке сшивки  $\psi_1 = -Mx_1$ . Используя асимптотику производной внутреннего решения  $\tilde{\varphi}'_1(x_1) \simeq \frac{\lambda_-}{4} M^3 x_1$  и учитывая (A.17), получаем  $\dot{\psi}_1 \simeq \psi_1 + \frac{\lambda_-}{4} M^3 x_1^3 = \psi_1 - \frac{\lambda_-}{4} \psi_1^3$ . Подставляя эти выражения в первый интеграл (A.3), находим:

$$\varepsilon \simeq \left( \psi_1 - \frac{\lambda_-}{4} \psi_1^3 \right)^2 - \psi_1^2 + \frac{\lambda_-}{2} \psi_1^4 \simeq \frac{\lambda_-^2}{16} \psi_1^6. \quad (\text{A.32})$$

Сравнивая это с  $\varepsilon \simeq 32\lambda_-^{-1} M^{-1}$ , находим лидирующий порядок для  $x_1$ :

$$x_1 \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-}} M^{-7/6}. \quad (\text{A.33})$$

Используя формулы (A.12), (A.13), (A.29), (A.30), (A.31), (A.33), находим, что в главном порядке по  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$  параметры отскокового решения имеют вид:

$$x_1 \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-}} |\tilde{\Lambda}|^{-7/6}, \quad x_2 \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-(1-\beta)}} |\tilde{\Lambda}|^{-1/2}, \quad k \simeq -1 + \frac{8}{|\tilde{\Lambda}|}, \quad (\text{A.34})$$

$$A \simeq \frac{2\lambda_-}{\tilde{m}_0^3} |\tilde{\Lambda}|^3, \quad x_0 \simeq 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_-}} |\tilde{\Lambda}|^{-1}, \quad x_+ \simeq \frac{2\sqrt{2\lambda_+}}{\lambda_-} |\tilde{\Lambda}|^{-1}. \quad (\text{A.35})$$

Можно показать, что в пределе  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$  вклады  $S_E^I$  и  $S_E^{III}$  стремятся к нулю. Рассмотрим аналитическое выражение для основного вклада  $S_E^{II}$ :

$$S_E^{II} = \frac{\pi^2 \lambda_- \beta^3}{8} (x_2^4 - x_1^4) + \frac{2\pi^2}{3\lambda_- (2k^2 - 1)^{3/2}} \left[ \frac{(1 - k^2)(2 - 3k^2)}{\sqrt{2k^2 - 1}} \ln \frac{x_2}{x_1} + \right. \\ \left. + k^2 \left( \operatorname{sn}(u_2) \operatorname{cn}(u_2) \operatorname{dn}(u_2) - \operatorname{sn}(u_1) \operatorname{cn}(u_1) \operatorname{dn}(u_1) \right) - \right. \\ \left. - 2(1 - 2k^2) \left[ E(\operatorname{am}(u_2)) - E(\operatorname{am}(u_1)) \right] \right], \quad (\text{A.36})$$

где  $u_i = \frac{\ln(x_i/x_0)}{\sqrt{2k^2 - 1}}$ . В пределе  $|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty$  параметр  $k \rightarrow -1$ ,  $x_2 \rightarrow 0$ ,  $x_1 \rightarrow 0$ . Логарифмическое слагаемое исчезает, поскольку  $(1 - k^2) \propto |\tilde{\Lambda}|^{-1}$ , а  $\ln(x_2/x_1) \propto \ln |\tilde{\Lambda}|$ , что дает в пределе  $\frac{\ln |\tilde{\Lambda}|}{|\tilde{\Lambda}|} \rightarrow 0$ . Эллиптические функции вырождаются в гиперболические, при этом  $E(\operatorname{am}(u, 1), 1) = \operatorname{th}(u)$ . Используя тождество  $\operatorname{th}(\ln y) = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}$  и подставляя асимптотические отношения  $\frac{x_0}{x_2} \propto |\tilde{\Lambda}|^{-1/2} \rightarrow 0$  и  $\frac{x_1}{x_0} \propto |\tilde{\Lambda}|^{-1/6} \rightarrow 0$ , получаем точный предел:

$$S_E^{II} \xrightarrow{|\tilde{\Lambda}| \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2}{3\lambda_-} \left[ \underbrace{\left( -\frac{4\left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2 (1 - \left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2)}{\left(1 + \left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2\right)^3} - \frac{4\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 \left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 1\right)}{\left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 1\right)^3} \right)}_{\rightarrow 0} + \right. \\ \left. + 2 \underbrace{\left[ \frac{1 - \left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + 1} \right]}_{\rightarrow 1 - (-1) = 2} \right] = \frac{8\pi^2}{3\lambda_-}. \quad (\text{A.37})$$

Таким образом, евклидово действие на отскоковом решении в пределе снятия регуляризации стремится к действию масштабно-инвариантного липатона.

Для проверки полученных аналитических асимптотик проведем их сравнение с результатами численного решения полной системы уравнений сшивки (5.3)–(5.8). На рисунках А.1–А.6 представлены зависимости параметров сшивки от  $|\tilde{\Lambda}|$  в логарифмическом масштабе.

Синим цветом обозначены результаты численного расчета. Для анализа их соответствия аналитическим результатам на графиках приведены три линии:

- красная линия — аппроксимация степенной функцией  $a \cdot |\tilde{\Lambda}|^{-b}$  с подбором обоих параметров  $(a, b)$ ;
- зеленая пунктирная линия — аппроксимация той же функцией, но с зафиксированным теоретическим показателем степени (например,  $b = 7/6$  для  $x_1$ ), где подбирался только множитель  $a$ ;
- черная штрихпунктирная линия — теоретическая асимптотика, вычисленная по полученным в приложении формулам (без подгоночных параметров).

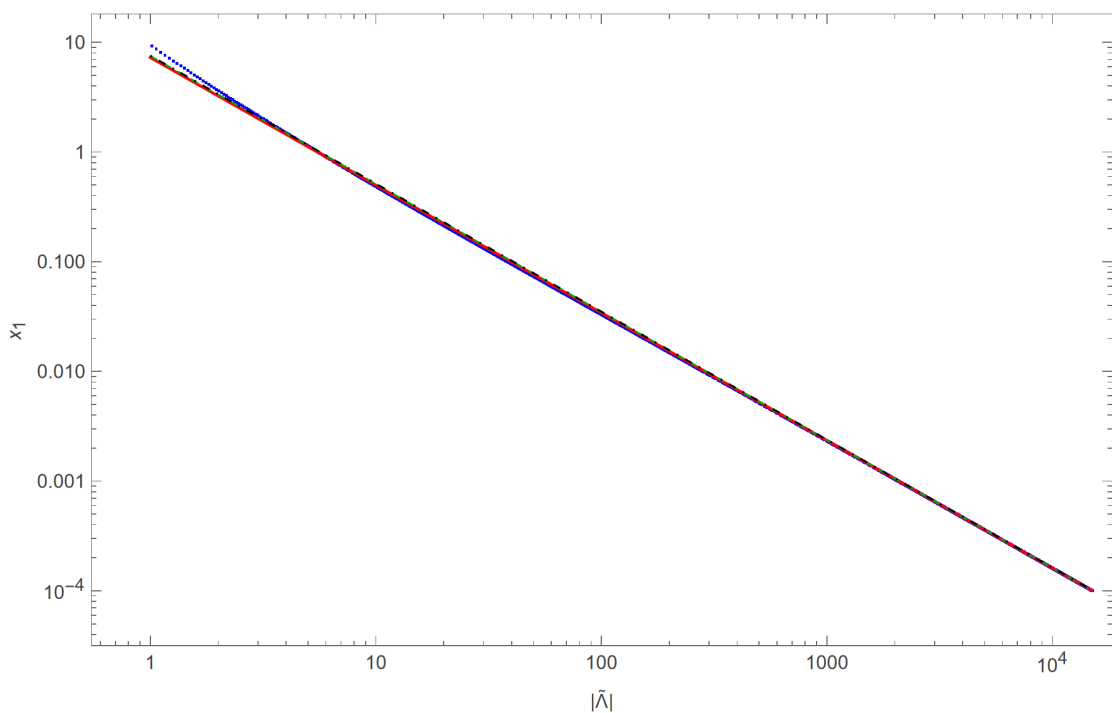


Рис. А.1: Зависимость  $x_1$  от  $|\tilde{\Lambda}|$

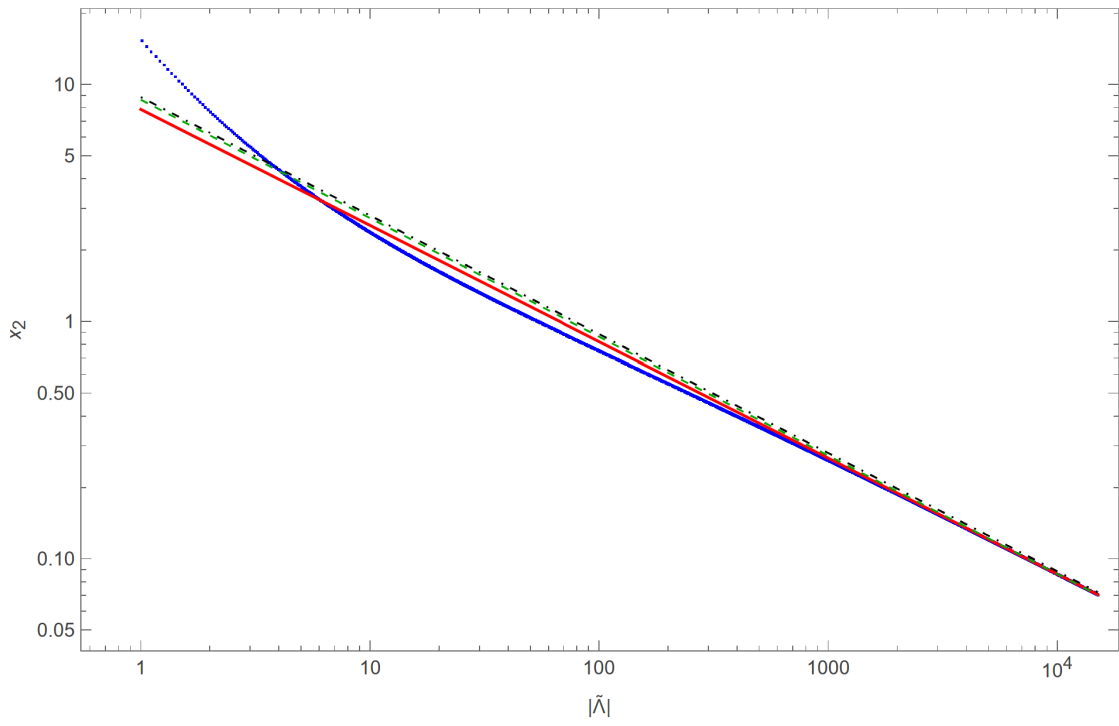


Рис. А.2: Зависимость  $x_2$  от  $|\tilde{\Lambda}|$

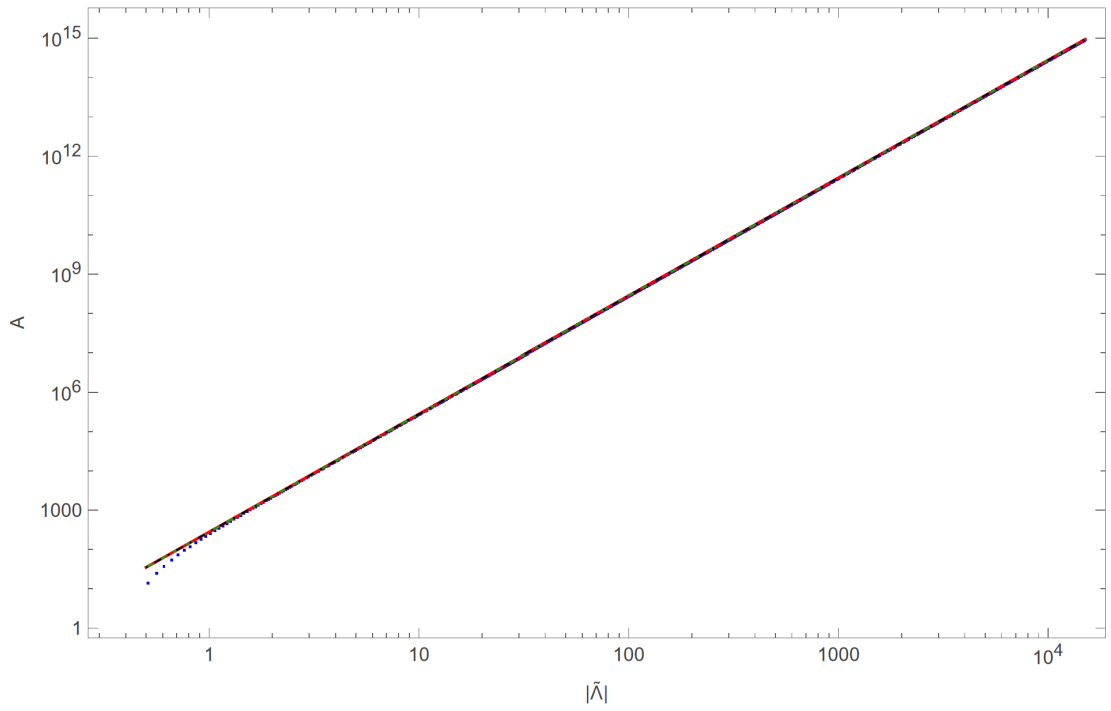


Рис. А.3: Зависимость  $A$  от  $|\tilde{\Lambda}|$

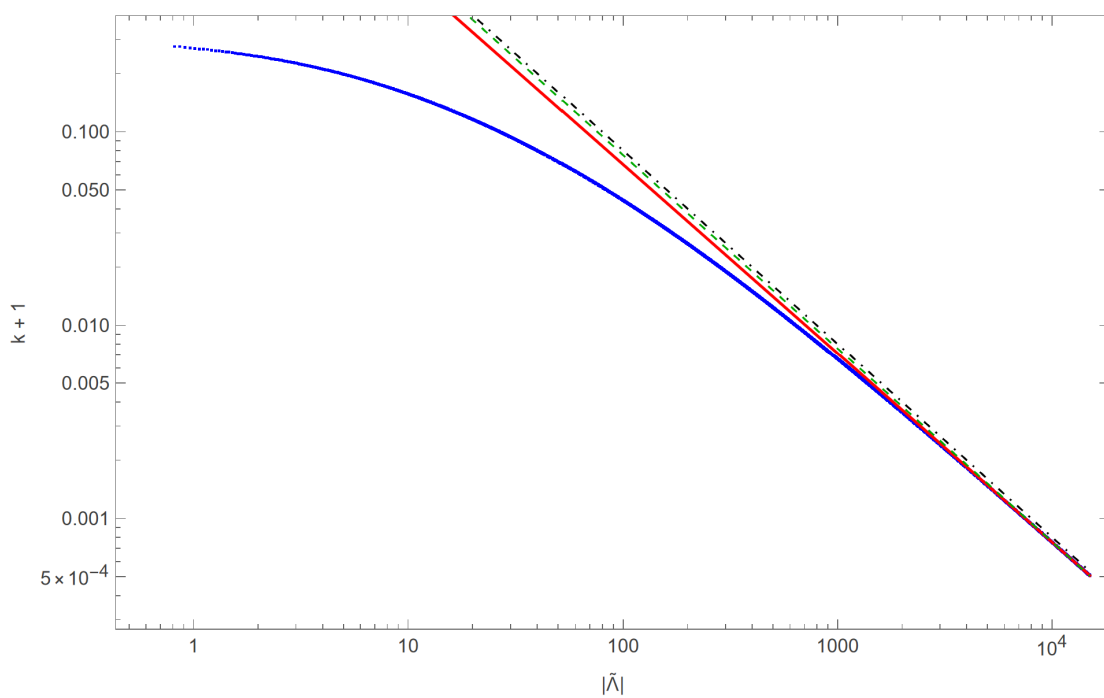


Рис. А.4: Зависимость  $k + 1$  от  $|\tilde{\Lambda}|$

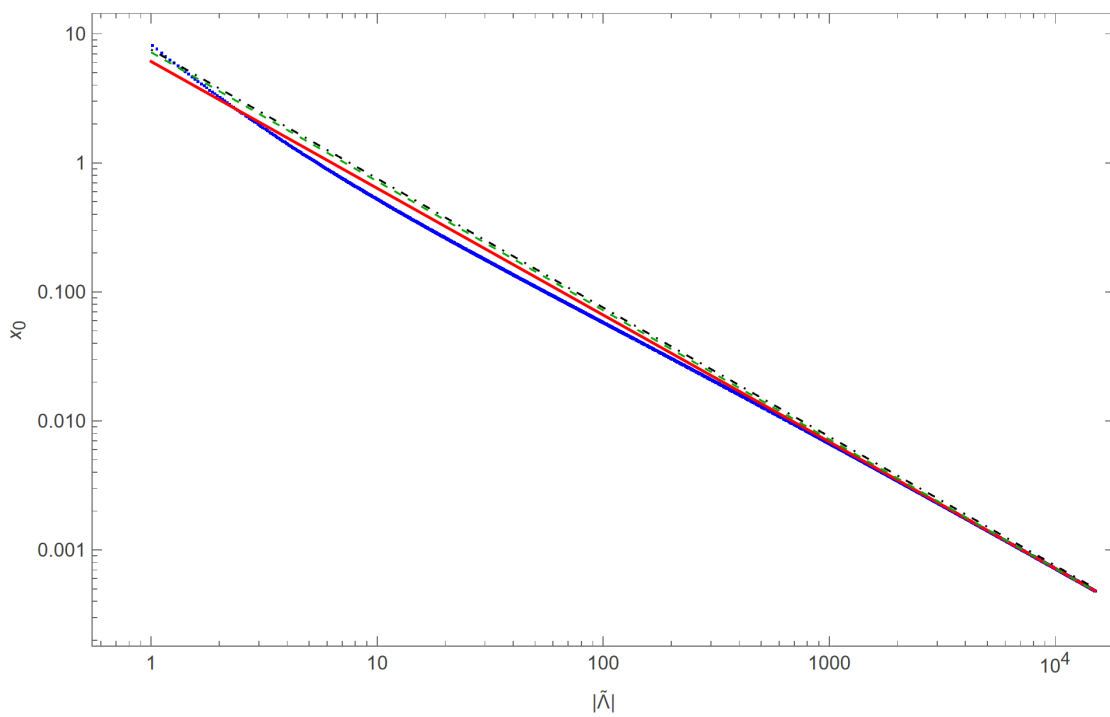


Рис. А.5: Зависимость  $x_0$  от  $|\tilde{\Lambda}|$

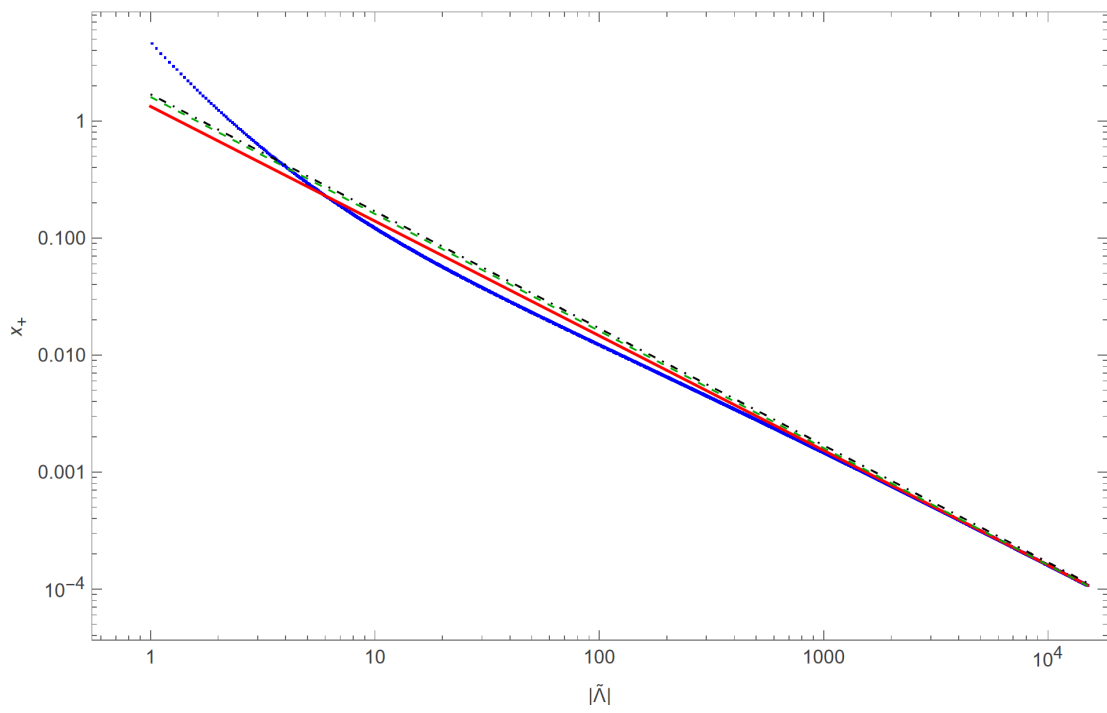


Рис. А.6: Зависимость  $x_+$  от  $|\tilde{\Lambda}|$

## В. Вычисление $\xi(|\tilde{\Lambda}|)$

В данном приложении приводится подробное вычисление функции  $\xi(|\tilde{\Lambda}|)$ , введенной в главе 6 (формула (6.3)), на фоне отскокового решения, найденного в главах 4–5, а также обсуждается смена пределов интегрирования в (6.7). Вычисления проводятся в безразмерных переменных  $x = r\varphi_0$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi/\varphi_0$ ,  $\tilde{\Lambda} = \Lambda/\varphi_0$ , с использованием асимптотик параметров сшивки, полученных в Приложении А.

По определению, введенному в главе 6, функция  $\xi$  равна интегралу по 4-объему:

$$\xi = \int \left[ \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + b\varphi + c + \frac{\lambda_-}{4} (\varphi^4 - \beta^3 \varphi_0^4) \right] \theta(\Lambda - \varphi) d^4x. \quad (\text{B.1})$$

Ввиду наличия функции Хевисайда под интегралом, интегрирование ведется по области  $\tilde{\varphi} < \tilde{\Lambda}$  ( $r < r_1$ ):

$$\xi = 2\pi^2 \int_0^{r_1} r^3 \left[ \frac{\lambda_-}{4} \varphi^4 + \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + b\varphi + c - \frac{\lambda_-}{4} \beta^3 \varphi_0^4 \right] dr. \quad (\text{B.2})$$

В безразмерных переменных этот интеграл принимает вид:

$$\xi = 2\pi^2 \int_0^{x_1} x^3 \left[ \frac{\lambda_-}{4} \tilde{\varphi}^4 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2} \tilde{\varphi}^2 + \tilde{b}\tilde{\varphi} + \tilde{c} - \frac{\lambda_-}{4} \beta^3 \right] dx. \quad (\text{B.3})$$

Так как интегрирование в (B.3) ведется по области  $\tilde{\varphi} < \tilde{\Lambda}$  ( $x < x_1$ ), то всюду под интегралом профиль поля имеет вид  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(x) = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{m}_0^2} + A \frac{I_1(\tilde{m}_0 x)}{x}$ .

Воспользуемся асимптотиками параметров:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-}} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{7/6}}, \quad A = \frac{2\lambda_-}{\tilde{m}_0^3} |\tilde{\Lambda}|^3, \quad \tilde{b} = -\lambda_- \tilde{\Lambda}^3 - \tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda}.$$

Разложим функцию Инфельда при малых аргументах:  $I_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} + \mathcal{O}(z^5)$ . Подставляя это в профиль поля, получаем:

$$A \frac{I_1(\tilde{m}_0 x)}{x} = A \left( \frac{\tilde{m}_0}{2} + \frac{\tilde{m}_0^3}{16} x^2 + \dots \right) = \frac{\lambda_-}{\tilde{m}_0^2} |\tilde{\Lambda}|^3 + \frac{\lambda_-}{8} |\tilde{\Lambda}|^3 x^2 + \dots \quad (\text{B.4})$$

С другой стороны, используя  $\tilde{\Lambda} = -|\tilde{\Lambda}|$ , получим:

$$-\frac{\tilde{b}}{\tilde{m}_0^2} = -\frac{1}{\tilde{m}_0^2} \left( \lambda_- |\tilde{\Lambda}|^3 + \tilde{m}_0^2 |\tilde{\Lambda}| \right) = -\frac{\lambda_-}{\tilde{m}_0^2} |\tilde{\Lambda}|^3 - |\tilde{\Lambda}|. \quad (\text{B.5})$$

Складывая (B.4) и (B.5), видим, что вклады  $\propto |\tilde{\Lambda}|^3$  сокращаются. Учитывая, что  $-|\tilde{\Lambda}| = \tilde{\Lambda}$ , поле  $\tilde{\varphi}$  примет вид:

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\Lambda} + \delta\tilde{\varphi}(x), \quad \text{где} \quad \delta\tilde{\varphi}(x) = \frac{\lambda_-}{8} |\tilde{\Lambda}|^3 x^2. \quad (\text{B.6})$$

Оценим порядок  $\delta\tilde{\varphi}(x)$  на верхней границе интегрирования  $x = x_1$  интеграла (B.3):  $\delta\tilde{\varphi}(x_1) \sim |\tilde{\Lambda}|^3 (|\tilde{\Lambda}|^{-7/6})^2 = |\tilde{\Lambda}|^{2/3}$ .

Выражение в квадратных скобках под интегралом (B.3) представляет собой безразмерную разность потенциалов:

$$\tilde{V}(\tilde{\varphi}) = \frac{\lambda_-}{4} \tilde{\varphi}^4 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2} \tilde{\varphi}^2 + \tilde{b} \tilde{\varphi} + \tilde{c} - \frac{\lambda_-}{4} \beta^3. \quad (\text{B.7})$$

Разложим (B.7) в ряд Тейлора в точке  $\tilde{\varphi} = \tilde{\Lambda}$ . Константы  $\tilde{b}$  и  $\tilde{c}$  обращают в нуль выражение (B.7) и его первую производную в этой точке:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{\Lambda}) &= \frac{\lambda_-}{4} \tilde{\Lambda}^4 + \frac{\tilde{m}_0^2}{2} \tilde{\Lambda}^2 + (-\lambda_- \tilde{\Lambda}^4 - \tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda}^2) + \left( \frac{\tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda}^2}{2} + \frac{3\lambda_- \tilde{\Lambda}^4}{4} + \frac{\lambda_-}{4} \beta^3 \right) - \\ &\quad - \frac{\lambda_-}{4} \beta^3 = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\tilde{V}'(\tilde{\Lambda}) = \lambda_- \tilde{\Lambda}^3 + \tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda} + (-\lambda_- \tilde{\Lambda}^3 - \tilde{m}_0^2 \tilde{\Lambda}) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Следовательно, главные ненулевые вклады дают квадратичный и кубический члены разложения Тейлора:

$$\tilde{V}(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \tilde{V}''(\tilde{\Lambda}) (\delta\tilde{\varphi})^2 + \frac{1}{6} \tilde{V}'''(\tilde{\Lambda}) (\delta\tilde{\varphi})^3 + \mathcal{O}((\delta\tilde{\varphi})^4). \quad (\text{B.10})$$

Вычислим производные (В.7) в точке  $\tilde{\Lambda}$ :

$$\tilde{V}''(\tilde{\Lambda}) = 3\lambda_- \tilde{\Lambda}^2 + \tilde{m}_0^2 \simeq 3\lambda_- |\tilde{\Lambda}|^2, \quad (\text{В.11})$$

$$\tilde{V}'''(\tilde{\Lambda}) = 6\lambda_- \tilde{\Lambda} = -6\lambda_- |\tilde{\Lambda}|. \quad (\text{В.12})$$

Прежде чем переходить к асимптотическим оценкам, покажем, что  $\tilde{V}(\tilde{\varphi})$  положительна во всей области интегрирования, а следовательно,  $\xi(\Lambda)$  строго монотонна. Поскольку функция  $\tilde{V}(\tilde{\varphi})$  — многочлен четвертой степени, ее точное разложение в ряд Тейлора с учетом (В.8), (В.9) в точке  $\tilde{\Lambda}$ :

$$\tilde{V}(\tilde{\Lambda} + \delta) = \frac{1}{2} \tilde{V}''(\tilde{\Lambda}) \delta^2 + \frac{1}{6} \tilde{V}'''(\tilde{\Lambda}) \delta^3 + \frac{1}{24} \tilde{V}^{(IV)}(\tilde{\Lambda}) \delta^4, \quad (\text{В.13})$$

где  $\delta = \tilde{\varphi} - \tilde{\Lambda}$ . С учетом  $\tilde{V}^{(IV)} = 6\lambda_-$  и выражений (В.11), (В.12) получаем

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} (3\lambda_- \tilde{\Lambda}^2 + \tilde{m}_0^2) \delta^2 + \lambda_- \tilde{\Lambda} \delta^3 + \frac{\lambda_-}{4} \delta^4. \quad (\text{В.14})$$

В рассматриваемой области  $\tilde{\Lambda} < 0$  и  $\delta < 0$  (так как интегрирование ведется по  $\tilde{\varphi} < \tilde{\Lambda}$ ), поэтому все три слагаемых положительны при любых значениях  $\delta$ . Следовательно,  $\tilde{V}(\tilde{\varphi}) > 0$  для всех  $\tilde{\varphi} < \tilde{\Lambda}$ . Функция  $\xi(\Lambda) = \int_{\varphi < \Lambda} \tilde{V} d^4x$  является интегралом от строго положительной величины по области, расширяющейся при увеличении  $\Lambda$  от  $-\infty$  до 0, и поэтому строго монотонно возрастает на  $\Lambda \in (-\infty, 0]$ . Это оправдывает смену пределов интегрирования в (6.7).

Подставим  $\delta\tilde{\varphi} = \frac{\lambda_-}{8} |\tilde{\Lambda}|^3 x^2$ , а также (В.11) и (В.12) в (В.10), запишем (В.10) в лидирующем и сублидирующем порядках:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{\varphi}) &\simeq \frac{1}{2} (3\lambda_- |\tilde{\Lambda}|^2) \left( \frac{\lambda_-}{8} |\tilde{\Lambda}|^3 x^2 \right)^2 - \frac{1}{6} (6\lambda_- |\tilde{\Lambda}|) \left( \frac{\lambda_-}{8} |\tilde{\Lambda}|^3 x^2 \right)^3 \\ &= \frac{3\lambda_-^3}{128} |\tilde{\Lambda}|^8 x^4 - \frac{\lambda_-^4}{512} |\tilde{\Lambda}|^{10} x^6. \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

Вычислим интеграл  $\xi$ , подставив (В.15) в (В.3) и интегрируя каждое слагаемое отдельно:

$$\xi = 2\pi^2 \int_0^{x_1} x^3 \tilde{V}(\tilde{\varphi}) dx = 2\pi^2 \left[ \frac{3\lambda_-^3}{128} |\tilde{\Lambda}|^8 \frac{x_1^8}{8} - \frac{\lambda_-^4}{512} |\tilde{\Lambda}|^{10} \frac{x_1^{10}}{10} \right]. \quad (\text{В.16})$$

Используя асимптотику  $x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda_-}} |\tilde{\Lambda}|^{-7/6}$ , найдем нужные степени:

$$x_1^8 = \frac{4096}{\lambda_-^4} |\tilde{\Lambda}|^{-28/3}, \quad x_1^{10} = \frac{32768}{\lambda_-^5} |\tilde{\Lambda}|^{-35/3}.$$

Подставим их в выражение для интеграла (B.16):

$$\begin{aligned} \xi &= 2\pi^2 \left[ \frac{3\lambda_-^3}{1024} |\tilde{\Lambda}|^8 \left( \frac{4096}{\lambda_-^4} |\tilde{\Lambda}|^{-28/3} \right) - \frac{\lambda_-^4}{5120} |\tilde{\Lambda}|^{10} \left( \frac{32768}{\lambda_-^5} |\tilde{\Lambda}|^{-35/3} \right) \right] = \\ &= \frac{24\pi^2}{\lambda_-} |\tilde{\Lambda}|^{-4/3} - \frac{64\pi^2}{5\lambda_-} |\tilde{\Lambda}|^{-5/3}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Вынося главный член за скобку, окончательно имеем:

$$\boxed{\xi \simeq \frac{24\pi^2}{\lambda_-} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{4/3}} \left[ 1 - \frac{8}{15} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{1/3}} \right] \simeq \frac{24\pi^2}{\lambda_-} \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{4/3}} \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{|\tilde{\Lambda}|^{1/3}} \right) \right]}. \quad (\text{B.18})$$