СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ФОНА

Бабёнов Глеб Игоревич
Научный руководитель:
к.ф.-м.н. с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН Пётр Сергеевич Сатунин

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

27 мая 2026

Постановка задачи

Частотный подход

Распределение Пуассона

$$P_{\text{on, off}} = \text{Pois}(N_{\text{on, off}} | \langle N_{\text{on, off}} \rangle),$$

где $\langle N_{\text{on}} \rangle = s + \epsilon b, \langle N_{\text{off}} \rangle = b$ – параметры модели.

- s – сигнал;
- b – фон;
- ϵ – отношение продолжительностей наблюдения за конкретной областью пространства: $t_{\text{on}} = \epsilon t_{\text{off}}$

Частотный подход

Распределение Пуассона

$$P_{\text{on, off}} = \mathrm{Pois}(N_{\text{on, off}} | \langle N_{\text{on, off}} \rangle),$$

где $\langle N_{\text{on}} \rangle = s + \epsilon b, \langle N_{\text{off}} \rangle = b$ – параметры модели.

- s – сигнал;
- b – фон;
- ϵ – отношение продолжительностей наблюдения за конкретной областью пространства: $t_{\text{on}} = \epsilon t_{\text{off}}$

Likelihood function

$$L = \frac{(s + \epsilon b)^{N_{\text{on}}}}{N_{\text{on}}!} e^{-(s+\epsilon b)} \frac{b^{N_{\text{off}}}}{N_{\text{off}}!} e^{-b}$$

Частотный подход

Wilks' theorem

Пусть у нас есть набор данных $X = (x_1, ..., x_n)$, параметров $\Theta = (s, b)$ и нулевая гипотеза H_0: $s = s_0$.
Тогда

$$S = -2\ln\Lambda \overset{n\to\infty}{\sim} \chi_1^2,$$

где $\Lambda = \frac{L(X|s=s_0,b=\widehat{b})}{L(X|s=\widehat{s},b=\widehat{b})}$ – отношение функции правдоподобия при нулевой гипотезе к функции правдоподобия при альтернативной.

Частотный подход

Wilks' theorem

Пусть у нас есть набор данных $X = (x_1, ..., x_n)$, параметров $\Theta = (s, b)$ и нулевая гипотеза H_0: $s = s_0$.
Тогда

$$S = -2\ln\Lambda \overset{n\to\infty}{\sim} \chi^2_1,$$

где $\Lambda = \frac{L(X|s=s_0,b=\widehat{b})}{L(X|s=\widehat{s},b=\widehat{b})}$ – отношение функции правдоподобия при нулевой гипотезе к функции правдоподобия при альтернативной.

В нашем случае:

- H_0: s $= 0$ – отсутствие сигнала;
- H_1: s > 0 – наличие сигнала

Частотный подход

Wilks' theorem

Пусть у нас есть набор данных $X = (x_1, ..., x_n)$, параметров $\Theta = (s, b)$ и нулевая гипотеза H_0: $s = s_0$.
Тогда

$$S = -2 \ln \Lambda \overset{n \to \infty}{\sim} \chi^2_1,$$

где $\Lambda = \frac{L(X|s=s_0,b=\hat{\hat{b}})}{L(X|s=\hat{s},b=\hat{b})}$ – отношение функции правдоподобия при нулевой гипотезе к функции правдоподобия при альтернативной.

В нашем случае:

- H_0: s = 0 – отсутствие сигнала;
- H_1: s > 0 – наличие сигнала

Байесовский подход

Bayes' theorem

Предположим, что $A_1, A_2, ..., A_N$ образуют полную систему событий, а событие B имеет ненулевую вероятность: $P(B) > 0$.
Тогда

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

определяет правило вычисления условной вероятности события A_k – при условии, что событие B уже имело место – по безусловной вероятности события A_k и условным вероятностям $P(B|A_k)$.

Байесовский подход

Bayes' theorem

Предположим, что $A_1, A_2, ..., A_N$ образуют полную систему событий, а событие B имеет ненулевую вероятность: $P(B) > 0$.
Тогда

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

определяет правило вычисления условной вероятности события A_k – при условии, что событие B уже имело место – по безусловной вероятности события A_k и условным вероятностям $P(B|A_k)$.

Непрерывный случай

$$p(\lambda|X) = \frac{p(X|\lambda)\pi(\lambda)}{\int\limits_0^\infty p(X|\lambda)\pi(\lambda)d\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Байесовский подход

Выбор приора в отсутствие априорных знаний

Правило Джеффриса: если λ принимает только положительные значения $\lambda > 0$, то мы полагаем на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$: $\pi(\ln \lambda) = \mathrm{const}$, то есть

$$\pi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$$

Байесовский подход

Выбор приора в отсутствие априорных знаний

Правило Джеффриса: если λ принимает только положительные значения $\lambda > 0$, то мы полагаем на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$: $\pi(\ln \lambda) = \mathrm{const}$, то есть

$$\pi(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$$

Апостериорное распределение для распределения Пуассона

$$p(\lambda|X) \sim \pi(\lambda)L(X|\lambda) \sim e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1},$$

то есть гамма-распределение $\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$ с параметрами $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\beta = n$.

Байесовский подход

Параметры распределения

$$\lambda_{\text{on, off}} \sim \text{Gamma}(\alpha_{\text{on, off}}, \beta_{\text{on, off}}),$$

где $\alpha_{\text{on, off}} = N_{\text{on, off}}$, $\beta_{\text{on}} = 1$, $\beta_{\text{off}} = \frac{1}{\epsilon}$, поскольку область S_{off} наблюдается в $\frac{1}{\epsilon}$ раз чаще, чем S_{on}.

Байесовский подход

Параметры распределения

$$\lambda_{\text{on, off}} \sim \text{Gamma}(\alpha_{\text{on, off}}, \beta_{\text{on, off}}),$$

где $\alpha_{\text{on, off}} = N_{\text{on, off}}$, $\beta_{\text{on}} = 1$, $\beta_{\text{off}} = \frac{1}{\epsilon}$, поскольку область S_{off} наблюдается в $\frac{1}{\epsilon}$ раз чаще, чем S_{on}.

Байесовская вероятность $P(H_1|X) = P(\lambda_{\text{on}} > \lambda_{\text{off}})$

$$= \int\limits_0^\infty d\lambda_{\text{off}} \int\limits_{\lambda_{\text{off}}}^\infty d\lambda_{\text{on}} \frac{\beta_{\text{on}}^{\alpha_{\text{on}}}}{\Gamma(\alpha_{\text{on}})} e^{-\beta_{\text{on}}\lambda_{\text{on}}} \lambda_{\text{on}}^{\alpha_{\text{on}}-1} \frac{\beta_{\text{off}}^{\alpha_{\text{off}}}}{\Gamma(\alpha_{\text{off}})} e^{-\beta_{\text{off}}\lambda_{\text{off}}} \lambda_{\text{off}}^{\alpha_{\text{off}}-1}$$

Байесовский подход

Байесовская вероятность $P(H_1|X) = P(\lambda_{\text{on}} > \lambda_{\text{off}})$

$$P(\lambda_{\text{on}} > \lambda_{\text{off}}) = \sum_{k=0}^{N\text{on}-1} \frac{(1+\frac{1}{\epsilon})^{-(k+N_{\text{off}})}}{\epsilon^{N_{\text{off}}}(k+N_{\text{off}})B(k+1, N_{\text{off}})}$$

Байесовский подход

Байесовская вероятность $P(H_1|X) = P(\lambda_{\text{on}} > \lambda_{\text{off}})$

$$P(\lambda_{\text{on}} > \lambda_{\text{off}}) = \sum_{k=0}^{N\text{on}-1} \frac{(1+\frac{1}{\epsilon})^{-(k+N_{\text{off}})}}{\epsilon^{N_{\text{off}}}(k+N_{\text{off}})B(k+1, N_{\text{off}})}$$

Байесовский критерий

Мы отвергаем нулевую гипотезу H_0 на уровне значимости α, если

$$P(H_1|X) > 1 - \alpha.$$

Проверка корректности методов

Теорема о p-value

Пусть T – тестовая статистика и p-value $= P(T \geq T_{\text{obs}} | H_0)$ – соответствующее p-value.
Тогда при условии, что H_0 верна:

$$\text{p-value} \sim \text{Uniform}(0, 1).$$

Проверка корректности методов

Теорема о p-value

Пусть T – тестовая статистика и p-value $= P(T \geq T_{\text{obs}}|H_0)$ – соответствующее p-value.
Тогда при условии, что H_0 верна:

$$\text{p-value} \sim \text{Uniform}(0, 1).$$

Способ проверки

1. 10 000 генераций: $N_{\text{on}} \sim \text{Pois}(\epsilon b), \quad N_{\text{off}} \sim \text{Pois}(b)$ для различных уровней значимости α;

Проверка корректности методов

Теорема о p-value

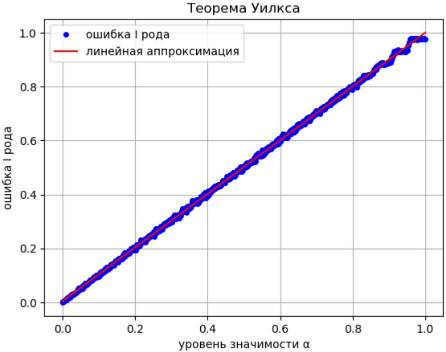
Пусть T – тестовая статистика и p-value $= P(T \geq T_{\text{obs}}|H_0)$ – соответствующее p-value.
Тогда при условии, что H_0 верна:

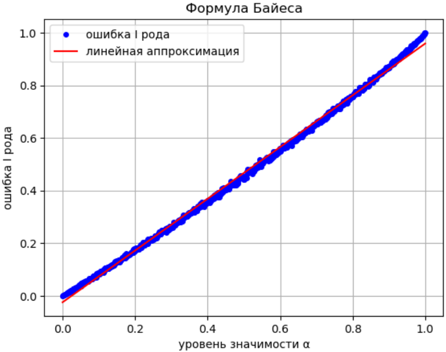
$$\text{p-value} \sim \text{Uniform}(0, 1).$$

Способ проверки

1. 10 000 генераций: $N_{\text{on}} \sim \text{Pois}(\epsilon b), \quad N_{\text{off}} \sim \text{Pois}(b)$ для различных уровней значимости α;
2. построение зависимости ошибки I рода от α

Проверка корректности методов



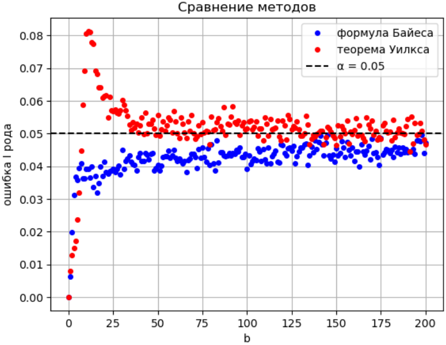


Линейная аппроксимация МНК

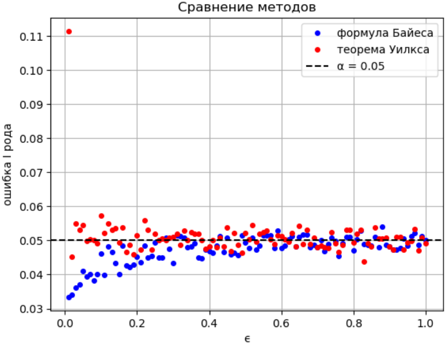
- частотный подход: $a_1 = 0.9960, a_0 = 0.0046, R^2 = 0.9996$;
- байесовский подход: $a_1 = 0.9833, a_0 = -0.0245, R^2 = 0.9979$

Проверка корректности методов

Зависимость ошибки I рода от параметра b



Зависимость ошибки I рода от параметра ϵ



Сравнение методов

Сравнение чувствительности

1. 10 000 генераций: $N_{\text{on}} \sim \text{Pois}(\epsilon b(1+\delta))$, $\quad N_{\text{off}} \sim \text{Pois}(b)$ для различных величин эффекта δ (то есть $s = \epsilon \delta b$);

Сравнение методов

Сравнение чувствительности

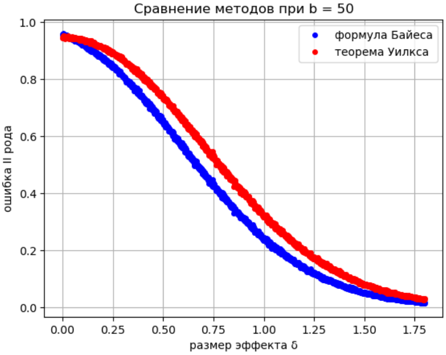
1. 10 000 генераций: $N_{\text{on}} \sim \text{Pois}(\epsilon b(1+\delta)), \quad N_{\text{off}} \sim \text{Pois}(b)$ для различных величин эффекта δ (то есть $s = \epsilon\delta b$);
2. построение зависимости ошибки II рода от δ

Сравнение методов

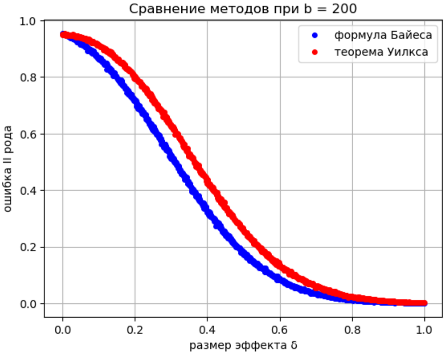
Сравнение чувствительности

1. 10 000 генераций: $N_{\text{on}} \sim \text{Pois}(\epsilon b(1+\delta))$, $\quad N_{\text{off}} \sim \text{Pois}(b)$ для различных величин эффекта δ (то есть $s = \epsilon\delta b$);
2. построение зависимости ошибки II рода от δ

b = 50

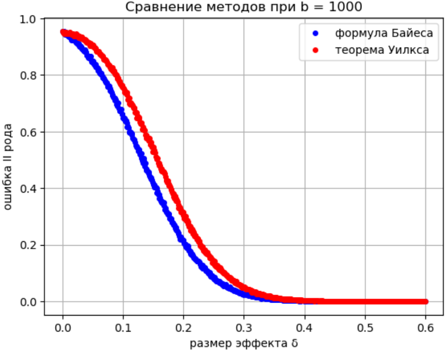


b = 200

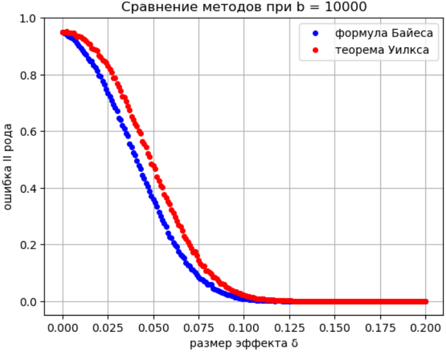


Сравнение методов

b = 1 000



b = 10 000



Вывод

Байесовский метод чаще «замечает» сигнал там, где он, действительно, присутствует, нежели частотный подход.

Робастность байесовского подхода

Добавим овердисперсию в распределение Пуассона

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \qquad \mathrm{Var}[X] = \lambda + \kappa\lambda^2$$

при помощи репараметризации отрицательного биномиального распределения $X \sim \mathrm{NB}(r, p)$:

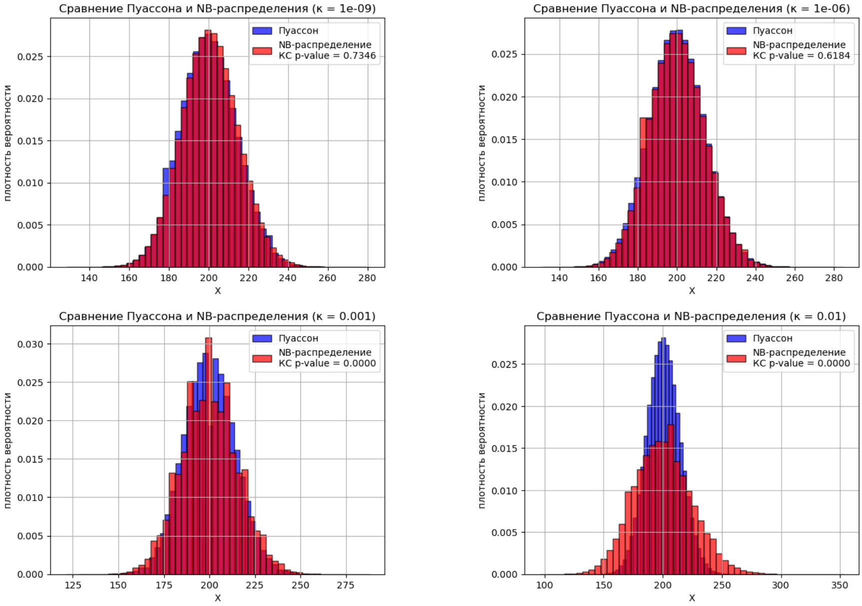
$$\begin{cases} r = \frac{1}{\kappa} \\ p = \frac{1}{1+\kappa\lambda} \end{cases},$$

для которого исходно $\mathbb{E}[X] = \frac{r(1-p)}{p}$ и $\mathrm{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

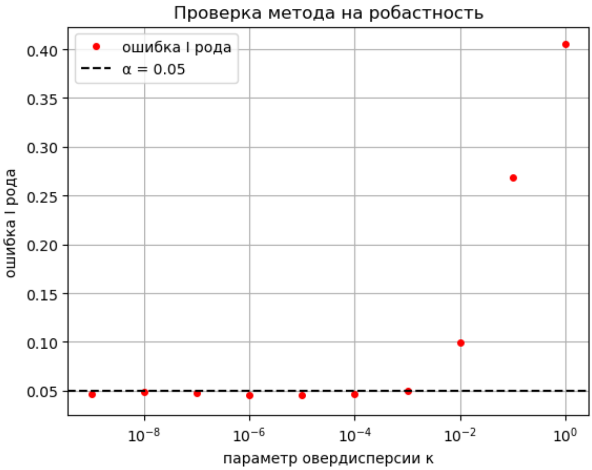
Причем:

$$\lim_{\kappa \to 0} \mathrm{NB}(\kappa, \lambda) = \mathrm{Pois}(\lambda)$$

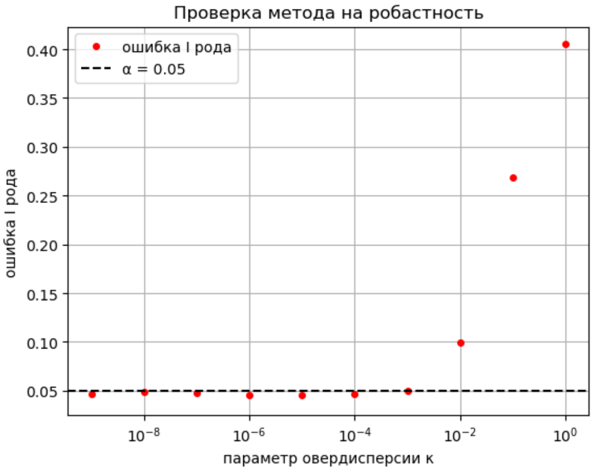
Робастность байесовского подхода



Робастность байесовского подхода



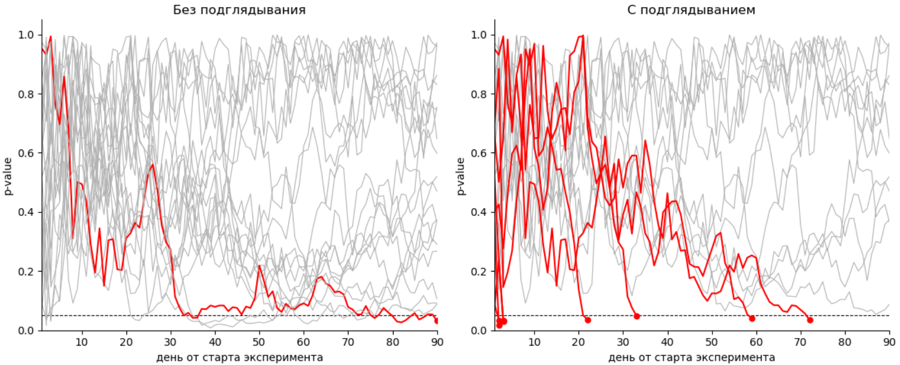
Робастность байесовского подхода



К примеру, при $N_{\rm off} \approx 200$ событий, метод можно использовать даже когда мы не учли дополнительные 20% дисперсии!

Peeking problem vs Bayes

Проблема подглядывания



Peeking problem vs Bayes

Методология проверки

- $s = 0$;
- $b = \text{const}$ во времени;
- собираем данные в течение месяца;
- уровень значимости $\alpha = 5\%$;
- подглядывание – ежедневное применение критерия и остановка эксперимента в момент достижения статистической значимости

Peeking problem vs Bayes

Методология проверки

- $s = 0$;
- $b = \text{const}$ во времени;
- собираем данные в течение месяца;
- уровень значимости $\alpha = 5\%$;
- подглядывание – ежедневное применение критерия и остановка эксперимента в момент достижения статистической значимости

Bayes

- без подглядывания: ошибка I рода равна 4.8%
- с подглядыванием: ошибка I рода равна 22.32%

Peeking problem vs Bayes

Методология проверки

- $s = 0$;
- $b = \text{const}$ во времени;
- собираем данные в течение месяца;
- уровень значимости $\alpha = 5\%$;
- подглядывание – ежедневное применение критерия и остановка эксперимента в момент достижения статистической значимости

Bayes

- без подглядывания: ошибка I рода равна 4.8%
- с подглядыванием: ошибка I рода равна 22.32%

Wilks

- без подглядывания: ошибка I рода равна 4.95%
- с подглядыванием: ошибка I рода равна 28.33%

Дизайн эксперимента

1. фиксируем уровень значимости $\alpha = 5\%$ и мощность $\beta = 80\%$;

Дизайн эксперимента

1. фиксируем уровень значимости $\alpha = 5\%$ и мощность $\beta = 80\%$;
2. на исторических данных оцениваем примерное число фоновых событий в день: $N_{\text{off}} = 20$;

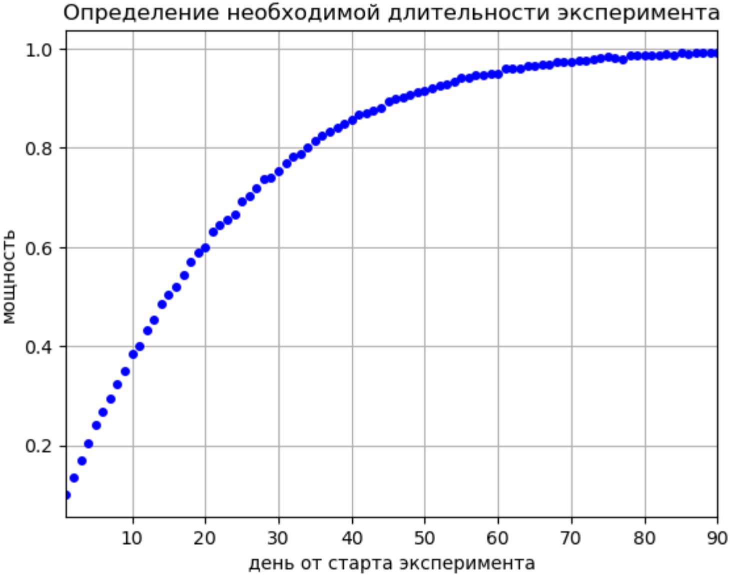
Дизайн эксперимента

1. фиксируем уровень значимости $\alpha = 5\%$ и мощность $\beta = 80\%$;
2. на исторических данных оцениваем примерное число фоновых событий в день: $N_{\text{off}} = 20$;
3. определяем минимальный сигнал, который хотим задетектировать: $s = 1$ за день;

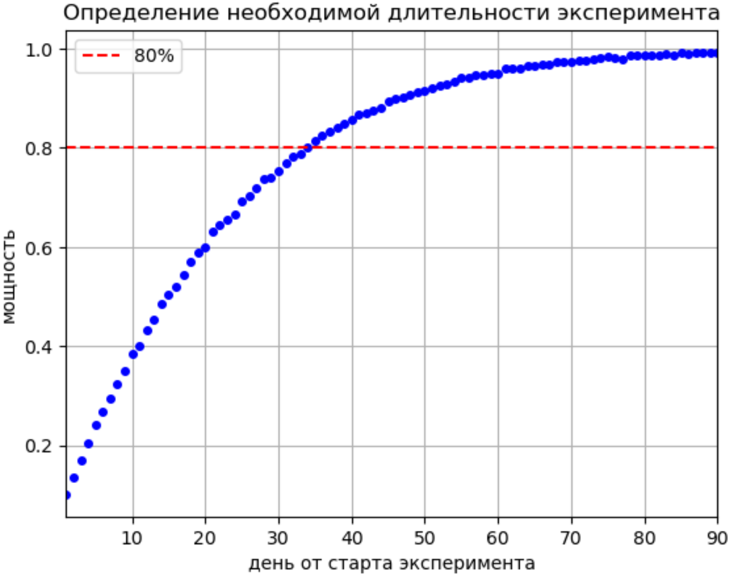
Дизайн эксперимента

1. фиксируем уровень значимости $\alpha = 5\%$ и мощность $\beta = 80\%$;
2. на исторических данных оцениваем примерное число фоновых событий в день: $N_{\text{off}} = 20$;
3. определяем минимальный сигнал, который хотим задетектировать: $s = 1$ за день;
4. строим график зависимости мощности от длительности эксперимента

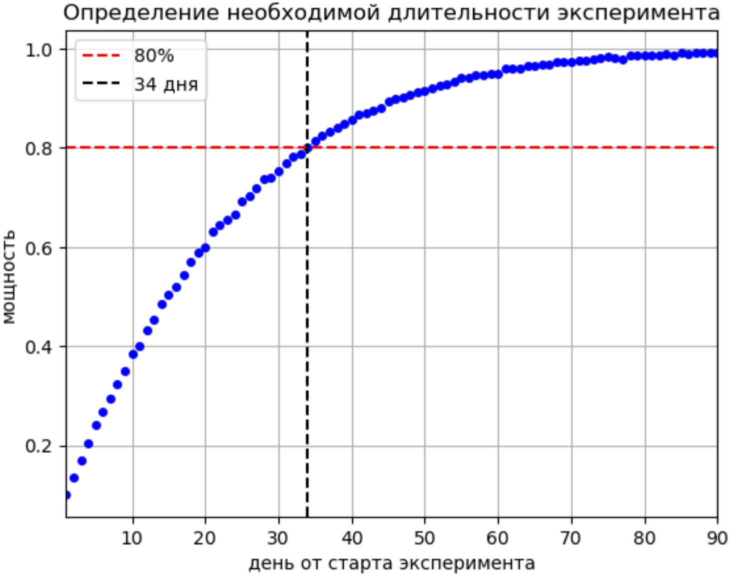
Дизайн эксперимента



Дизайн эксперимента

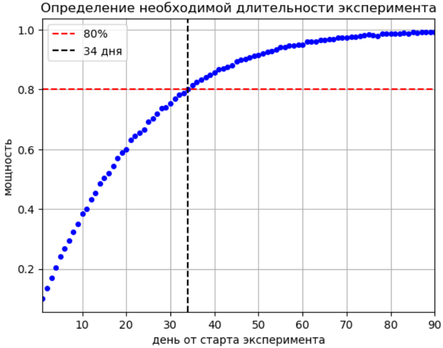


Дизайн эксперимента

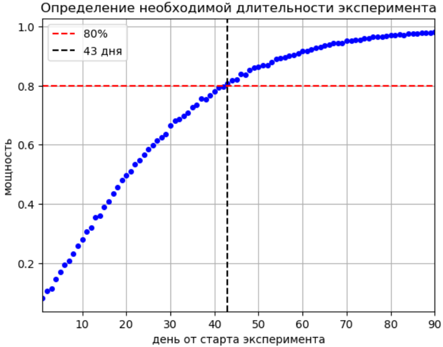


Дизайн эксперимента

Bayes



Wilks



Частотный подход на 9 дней дольше!

Результаты работы

Итоги

- критерий Ли–Ма дает сбои при малой статистике;
- разработан байесовский критерий прямого вычисления вероятности гипотезы о наличии фона;
- продемонстрировано преимущество байесовского подхода в мощности;
- продемонстрирована робастность байесовского метода;
- проблема подглядывания сохраняется;
- критерий применен к реальным наблюдениям

Результаты работы

Итоги

- критерий Ли–Ма дает сбои при малой статистике;
- разработан байесовский критерий прямого вычисления вероятности гипотезы о наличии фона;
- продемонстрировано преимущество байесовского подхода в мощности;
- продемонстрирована робастность байесовского метода;
- проблема подглядывания сохраняется;
- критерий применен к реальным наблюдениям

Перспективы

- внедрение байесовского критерия в классическую обработку;
- использование информативных приоров;
- разработка байесовских стоп-правил

Дополнение I

Отношение likelihood

$$\Lambda = \frac{L(X|H_0)}{L(X|H_1)} = \frac{L(N_{\text{on}}, N_{\text{off}}|s = 0, b = \widehat{b}_c)}{L(N_{\text{on}}, N_{\text{off}}|s = N_{\text{on}} - \epsilon N_{\text{off}}, b = N_{\text{off}})},$$

где $\widehat{b}_c = \frac{N_{\text{on}}+N_{\text{off}}}{\epsilon+1}$ – ОМП.

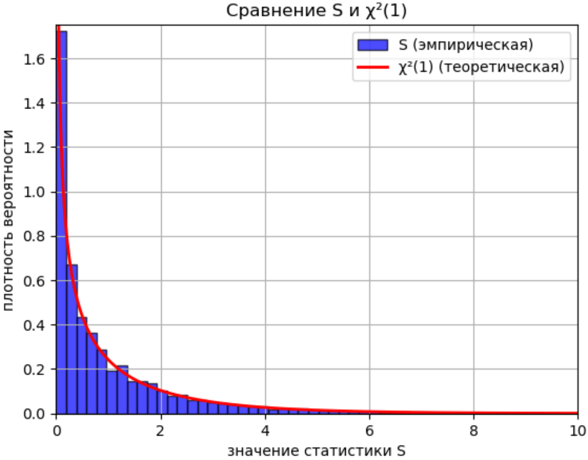
Итоговая статистика

$$S = 2\left[N_{\text{on}} \ln\left(\frac{\epsilon+1}{\epsilon}\left(\frac{N_{\text{on}}}{N_{\text{on}}+N_{\text{off}}}\right)\right) + N_{\text{off}} \ln\left((\epsilon+1)\left(\frac{N_{\text{off}}}{N_{\text{on}}+N_{\text{off}}}\right)\right)\right]$$

Дополнение I

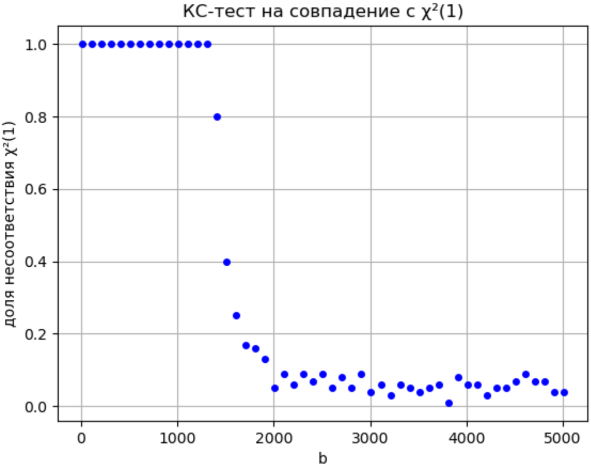
Wilks' theorem

$$S = -2\ln\Lambda \overset{n\to\infty}{\sim} \chi^2_1,$$



Дополнение I

Тесты Колмогорова-Смирнова



Бесконечность начинается с 2 000...

Дополнение II

Peeking problem vs Bayes

Дополнение III

Практическое применение

Источник	N_{on}	N_{off}	ϵ	$P(\lambda_{on} > \lambda_{off})$	S	p-value
HEGRA	36	104	0.2	0.996	7.32	0.007
H.E.S.S.	4	1	0.095	> 0.999	14.73	10^{-4}
GRB 070419A	2	14	0.057	0.808	1.18	0.278
GRB 070521	3	113	0.057	0.049	2.20	0.138
GRB 070612B	3	21	0.066	0.832	1.29	0.256
GRB 080310	3	23	0.128	0.449	$9 \cdot 10^{-4}$	0.976
GRB 080604	2	40	0.063	0.293	0.11	0.741
GRB 080607	4	16	0.112	0.883	1.74	0.187
GRB 080825C	15	19	0.063	> 0.999	40.43	$2 \cdot 10^{-10}$
GRB 081024A	1	7	0.142	0.395	$3 \cdot 10^{-5}$	0.996
GRB 090418A	3	16	0.123	0.685	0.41	0.523
GRB 090429B	2	7	0.106	0.825	1.26	0.262
GRB 090515	4	24	0.126	0.642	0.25	0.616