Суперсимметричная квантовая механика и вычисление квазиклассических матричных элементов

Прийменко Анжела Сергеевна

Научный руководитель: Демидов Сергей Владимирович

Цели и задачи

Цель: изучение суперсимметричной квантовой механики и квазиклассического метода Ландау вычисления матричных элементов.

Суперпотенциал: $W(x) = a\,\mathrm{th}(x), a > 0$

Задачи:

1. Нахождение уровней энергии и волновых функций.
2. Точное вычисление матричного элемента $\langle 0|ch(x)|n\rangle$.
3. Вычисление методом Ландау и сравнение с точным ответом.

Основы суперсимметричной квантовой механики

Алгебра Суперсимметрии

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} = H,\ [\hat{H}, \hat{Q}] = 0,\ [\hat{H}, \hat{Q}^+] = 0 \tag{1}$$

Факторизация гамильтониана:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{A}^+\hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{A}\hat{A}^+ \end{pmatrix} \tag{2}$$

Двухкомпонентные состояния: бозон и фермион.

Исследование системы $W(x) = a\,\mathrm{th}(x), a > 0$

Основное состояние:

$$|\hat{A}|\Psi_0^{(-)}\rangle = 0 \Rightarrow \Psi_0^{(-)} = N_0\,\mathrm{ch}^{-a}(x) \tag{3}$$

Инвариантность формы потенциала:

$$U_{(+)}(a,x) = U_{(-)}(a-n,x) + \frac{1}{2}\left[a^2 - (a-n)^2\right] \tag{4}$$

Уровни энергии:

$$E_n = \frac{1}{2}\left[a^2 - (a-n)^2\right] \tag{5}$$

Волновые функции возбужденных состояний

Возбуждённые состояния:

$$\Psi_n^{(-)} \propto A^+(a)A^+(a-1)\dots A^+(a-n+1)\Psi_0^{(-)}(x, a-n) \qquad (6)$$

Представление через Полиномы Якоби:

$$\Psi_n^{(-)} = N_n(a)\,\mathrm{ch}^{n-a}(x)P_n^{(a-n,a-n)}(\mathrm{th}(x)), \qquad (7)$$

Нормировочные константы:

$$N_n(a) = \sqrt{\frac{2^n n!\Gamma(a-\left[\frac{n-1}{2}\right])\Gamma(a-n+1)\Gamma(a-\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{1}{2})}{\Gamma^2(a+1)\Gamma(a-n+\frac{1}{2})\,\mathrm{B}(a-n,\frac{1}{2})}} \qquad (8)$$

Точное вычисление $\langle 0|\,\mathrm{ch}(x)|n\rangle$

$$\langle 0|\,\mathrm{ch}(x)|n\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0\,\mathrm{ch}(x)\Psi_n\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

Результат:
$\langle 0|\,\mathrm{ch}(x)|n\rangle \neq 0$ только для $n = 2k$:

$$\langle 0|ch(x)|n\rangle = \frac{(-1)^{k-1}\Gamma(a-k-1/2)\Gamma(k+1/2)}{2^k k!(2k-1)\Gamma(a)} \times \\ \times \sqrt{\frac{(2k)!\Gamma(a-2k+1)\Gamma(a-k+1/2)\Gamma(a+1/2)}{\pi\Gamma(a-2k)\Gamma(a)\Gamma(a-k+1)}} \tag{10}$$

Асимптотика при $n \to \infty$:

$$f_{0n} \propto \exp(k\ln(k/a)) \tag{11}$$

Метод Ландау

Основная идея:

- Обход особых точек потенциала в комплексной плоскости
- Главный вклад - от ближайшей особой точки: $x_0 = i\pi/2$

$$f_{0n} \propto \exp\left(-\operatorname{Im}\left[\int_0^{i\pi/2}\left(\sqrt{\frac{a(a+1)}{\operatorname{ch}^2(x)}-(a-n)^2}-\sqrt{\frac{a(a+1)}{\operatorname{ch}^2(x)}-a^2}\right)\mathrm{d}x\right]\right) \tag{12}$$

Результат асимптотики для чётных n:

$$f_{0n} \propto \exp(k\ln(k/a)) \tag{13}$$

Заключение

Что сделано:

- Построены уровни энергии
- Построены волновые функции основного и возбуждённых состояний
- Вычислен точный матричный элемент $\langle 0|\,\mathrm{ch}(x)|n\rangle$
- Получена квазиклассическая оценка Методом Ландау

Недостатки методов:

- Точный: громоздкий
- Квазиклассический: оценка только для больших n

Спасибо за внимание!