

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Прийменко Анжела Сергеевна

**СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И  
КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА 2 КУРСА

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., с.н.с ОТФ ИЯИ РАН  
Демидов Сергей Владимирович

Москва - 2026

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Суперсимметричная квантовая механика (SUSY QM)</b>	<b>3</b>
2.1	Основные определения . . . . .	4
2.2	Спектры Партнерских Гамильтонианов . . . . .	6
2.3	Нахождение основного состояния системы с $E = 0$ . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Исследование суперсимметричной системы с суперпотенциалом <math>W(x) = a \operatorname{th}(x), a &gt; 0</math></b>	<b>9</b>
3.1	Нахождение основного состояния и исследование на нормируемость	9
3.2	Построение партнёрских гамильтонианов и нахождение уровней энергии системы . . . . .	10
3.3	Построение волновых функций возбуждённых состояний системы	11
<b>4</b>	<b>Точное вычисление матричного элемента <math>\langle 0 ch(x) n\rangle</math> и его асимп- тотика при больших <math>n</math></b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Вычисление квазиклассического матричного элемента Методом Ландау</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>18</b>

# 1 Введение

В квантовой механике и областях её применения важную роль играют матричные элементы различных физических величин, так как именно они позволяют описать переход между возможными состояниями квантово-механической системы.

Прямое решение уравнения Шрёдингера, включающее в себя решение дифференциальных уравнений второго порядка часто вызывает большие трудности, поэтому особый интерес вызывают квантово-механические системы обладающие суперсимметрией. Суперсимметричный формализм позволяет довольно просто вычислить уровни энергии, волновые функции основного и возбужденных состояний и другие характеристики системы.

Точное вычисление матричного элемента путем интегрирования требует точного знания волновых функций, что делает расчёты очень громоздкими. Поэтому большой интерес вызывают другие приближенные методы. Например, квазиклассическое вычисление матричных элементов с помощью метода Ландау предлагает альтернативный способ, для их оценки. Такие методы естественно проверять на моделях, в которых известны точные волновые функции. Такими моделями являются модели суперсимметричной квантовой механики.

В работе исследуется суперсимметричная система с суперпотенциалом  $W(x) = a \operatorname{th}(x)$ ,  $a > 0$ , который является частным случаем известного потенциала Пёшля-Теллера, встречаемого во многих областях физики, в которых применяется квантовая теория. Таким образом, вычисление матричных элементов для данной системы позволит в дальнейшем применить и усовершенствовать полученные результаты для более сложных случаев.

Оператор  $\operatorname{ch}(x)$  является естественной координатной функцией в гиперболических потенциалах, а также связан основным гиперболическим тождеством с

оператором  $W(x)$  для заданной системы.

Целью данной курсовой работы является изучение суперсимметричной квантовой механики и квазиклассического метода Ландау вычисления матричных элементов.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи :

1. Нахождение уровней энергии и волновых функций системы.
2. Точное вычисление матричного элемента  $\langle 0|ch(x)|n\rangle$
3. Вычисление матричного элемента методом Ландау и сравнение с точным ответом.

Объектом исследования является система с заданным суперпотенциалом  $W(x) = a \operatorname{th}(x), a > 0$

Предметом исследования выступает матричный элемент  $\langle 0|ch(x)|n\rangle$ .

## 2 Суперсимметричная квантовая механика (SUSY QM)

В данном параграфе мы рассмотрим сущность понятия суперсимметричной квантовой механики. До её появления бозоны и фермионы рассматривались как частицы принципиально разной природы. Бозоны являются переносчиками взаимодействия и обладают целым спином. Также известно, что для бозонных полей справедливы коммутационные соотношения, например:

$$[\hat{a}\hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \quad (1)$$

Напротив, фермионы - частицы, отвечающие материи и обладающие полу-

целым спином, удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям, таким как:

$$\{\hat{f}, \hat{f}^+\} = \hat{f}\hat{f}^+ + \hat{f}^+\hat{f} = 1 \quad (2)$$

Несмотря на такое принципиально разное описание природы этих частиц, обнаруживались удивительные сходства в формулах для бозонной и фермионной теорий полей. Таким образом, возникла естественная необходимость в формировании единой квантовой теории, в рамках которой должна существовать обобщенная алгебра, позволяющая симметрично оперировать коммутаторами и антикоммутаторами. В соответствии с общепринятой терминологией, такая алгебра называется супералгеброй и лежит в основе Суперсимметричной квантовой механики (SUSY QM).

## 2.1 Основные определения

Для формализации суперсимметрии в квантовой механике необходимо ввести обобщённый гамильтониан, действующий в двумерном пространстве волновых функций  $W$ . Рассмотрим такой суперсимметричный Гамильтониан  $\hat{H}_{SUSY}$ , который в данном случае может быть представлен в виде:

$$\hat{H}_{SUSY} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{(+)} & 0 \\ 0 & \hat{H}_{(-)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

,где  $\hat{H}_{(+)}$  и  $\hat{H}_{(-)}$  — Партнерские Гамильтонианы согласно общепринятой терминологии.

Введем операторы Суперзарядов  $\hat{Q}_i$ , которые образуют некоторую алгебру:

$$\begin{cases} \{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \hat{H}\delta_{ij} \\ [\hat{H}, \hat{Q}_i] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$\delta_{ij}$  — Символ Кронекера.

Рассмотрим два матричных оператора  $\hat{Q}_1$  и  $\hat{Q}_2$ :

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{A}^+ \\ i\hat{A} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^+$  — некоторые сопряженные линейные дифференциальные операторы вида: (Для упрощения математических выкладок положим  $m = 1$  и  $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W(x) + i\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) + \frac{d}{dx}\right) \\ \hat{A}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W(x) - i\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) - \frac{d}{dx}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\hat{P} = -i\frac{d}{dx}$  — оператор импульса.

Часто вместо  $\hat{Q}_1$  и  $\hat{Q}_2$  бывает удобно использовать эквивалентные операторы:

$$\hat{Q}^+ = \sqrt{2}(\hat{Q}_1 + i\hat{Q}_2) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \sqrt{2}(\hat{Q}_1 - i\hat{Q}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

В таком случае не сложно заметить, что основные коммутационные и антикоммутационные соотношения суперсимметричной алгебры теперь имеют вид:

$$\begin{aligned} \{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} &= H \\ [\hat{H}, \hat{Q}] &= 0 \\ [\hat{H}, \hat{Q}^+] &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом вид суперсимметричного гамильтониана можно представить в виде:

$$\{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{(-)} & 0 \\ 0 & \hat{H}_{(+)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

, где  $\hat{H}_{(-)} = \hat{A}^+\hat{A}$ ,  $\hat{H}_{(+)} = \hat{A}\hat{A}^+$ ,

Ключевым моментом является то, что данные операторы подчиняются коммутационному соотношению аналогично бозонным операторам рождения и уничтожения. Приведём аналогию с хорошо известной задачей о квантовом гармоническом осцилляторе, где операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^+$  повышают и понижают номер уровня энергии:

$$\begin{aligned}\hat{a}^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle\end{aligned}\tag{10}$$

В суперсимметричной квантовой механике операторы  $\hat{Q}$  и  $\hat{Q}^+$  осуществляют переход между бозонными и фермионными состояниями. В этом не трудно убедиться, если рассмотреть действие таких операторов на некоторую волновую функцию  $|\Psi\rangle = (\Psi^{(-)}, \Psi^{(+)})^T$  из пространства  $W$ , состоящую из двух компонент. Назовем верхнюю компоненту фермионной, а нижнюю бозонной. Тогда:

$$\begin{aligned}|\hat{Q}^+|\Psi\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{A}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{(-)} \\ \Psi^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^+\Psi^{(+)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\hat{Q}|\Psi\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{(-)} \\ \Psi^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{A}\Psi^{(-)} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{11}$$

## 2.2 Спектры Партнерских Гамильтонианов

Из основных положений Супералгебры (4) видно, что спектр  $\hat{H}$  является неотрицательным, так как Гамильтониан является квадратом эрмитовых операторов. Рассмотрим оператор  $\hat{H}_{(-)}$  с собственной функцией  $\Psi^{(-)}$  и энергией  $E_{(-)}$

$$\hat{H}_{(-)}|\Psi^{(-)}\rangle = E_{(-)}\Psi^{(-)}\tag{12}$$

Тогда, подействовав оператором  $\hat{A}$ , получим:

$$\begin{aligned}\hat{A}(\hat{A}^+\hat{A})|\Psi^{(-)}\rangle &= \hat{A}(E_{(-)}\Psi^{(-)}) \\ \hat{A}\hat{A}^+|\hat{A}\Psi^{(-)}\rangle &= E_{(-)}(\hat{A}\Psi^{(-)})\end{aligned},\tag{13}$$

но  $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{H}_{(-)}$ ,  $\hat{A} \hat{A}^+ = \hat{H}_{(+)}$

Таким образом собственные значения партнерского гамильтониана  $\hat{H}_{(-)}$  являются так же и собственными значениями  $\hat{H}_{(+)}$ . Тогда соответствующая нормированная функция выражается как:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \Psi^{(-)} | \hat{A} \Psi^{(-)} \rangle &= \langle \Psi^{(-)} | \hat{A}^+ \hat{A} | \Psi^{(-)} \rangle = E_{(-)} \langle \Psi^{(-)} | \Psi^{(-)} \rangle = E_{(-)} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\Psi^{(+)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{E_{(-)}}} |\hat{A} | \Psi^{(-)}\rangle \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичное утверждение можно получить и рассматривая спектр  $\hat{H}_{(+)}$ :

$$(\hat{A}^+ \hat{A}) | \hat{A}^+ \Psi^{(+)} \rangle = E_{(+)} (\hat{A}^+ \Psi^{(+)} \rangle \Rightarrow |\Psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{E_{(+)}}} |\hat{A}^+ | \Psi^{(+)}\rangle \quad (15)$$

Таким образом, спектры  $\hat{H}_{(-)}$  и  $\hat{H}_{(+)}$  для возбуждённых состояний ( $E > 0$ ) полностью совпадают.

Рассмотрим теперь возможные случаи для основного состояния с нулевым собственным значением  $E$ . Пусть  $\hat{H}_{(-)}$  имеет собственное значение  $E_{(-)} = 0$ , то есть  $\hat{H}_{(-)} | \Psi^{(-)} \rangle = 0$ . Тогда в этом случае оператор  $\hat{H}_{(+)}$  не имеет нормируемой собственной функции  $|\Psi^{(+)}\rangle$ , которая бы удовлетворяла условию  $\hat{A}^+ | \Psi^{(+)} \rangle = 0$ . Аналогично, если  $\hat{H}_{(+)}$  имеет собственную функцию для нулевого собственного значения  $E_{(+)} = 0$ , то не существует такого вектора  $|\Psi^{(-)}\rangle$ , чтобы выполнялось  $\hat{A} | \Psi^{(-)} \rangle = 0$ .

Подводя итог, спектры для гамильтонианов  $\hat{H}_{(+)}$  и  $\hat{H}_{(-)}$  совпадают полностью, за исключением основного состояния. А это значит, достаточно исследовать спектр одного из гамильтонианов-партнеров.

## 2.3 Нахождение основного состояния системы с $E = 0$

В суперсимметричной квантовой механике с гамильтонианом  $\hat{H}$  состояние системы  $\Psi_0$  является нулевым тогда и только тогда, когда выполняются следу-

ющие условия:

$$\hat{H}|\Psi_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\hat{Q}|\Psi_0\rangle = 0 \\ |\hat{Q}^+|\Psi_0\rangle = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Проверим необходимость и достаточность данного утверждения:

1.Необходимость:

$$\begin{cases} |\hat{Q}|\Psi_0\rangle = 0 \\ |\hat{Q}^+|\Psi_0\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow |\hat{H}|\Psi_0\rangle = \{\hat{Q}, \hat{Q}^+\}|\Psi_0\rangle = (\hat{Q}\hat{Q}^+ + \hat{Q}^+\hat{Q})|\Psi_0\rangle = 0 \quad (17)$$

2.Достаточность:

$$\hat{H}|\Psi_0\rangle = 0 \Rightarrow \langle\Psi_0|\hat{H}|\Psi_0\rangle = \langle\Psi_0|(\hat{Q}\hat{Q}^+ + \hat{Q}^+\hat{Q})|\Psi_0\rangle = \|\hat{Q}|\Psi_0\rangle\|^2 + \|\hat{Q}^+|\Psi_0\rangle\|^2 = 0 \quad (18)$$

Выполнение данных условий эквивалентно:

$$\begin{cases} |\hat{A}^+|\Psi_0^{(+)}\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) - \frac{d}{dx}\right)\Psi_0^{(+)} = 0 \\ |\hat{A}|\Psi_0^{(-)}\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(x) + \frac{d}{dx}\right)\Psi_0^{(-)} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом, решая полученные дифференциальные уравнения разделением переменных, можно определить основные состояния для партнерских гамильтонианов системы:

$$\begin{cases} \Psi_0^{(-)} = C_1 \exp\left(-\int W(x) dx\right) \\ \Psi_0^{(+)} = C_1 \exp\left(+\int W(x) dx\right) \end{cases} \quad (20)$$

Чтобы определить, какое из полученных состояний действительно существует, необходимо исследовать полученные функции  $\Psi_0^{(+)}$  и  $\Psi_0^{(-)}$  на нормируемость, то есть проверить выполнение известного условия нормировки:  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ . Условие нормируемости для  $\Psi_0^{(+)}$  и  $\Psi_0^{(-)}$  через суперпотенциал тогда можно переписать

сать как:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0^{(+)}|^2 dx = 1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x W(y) dy = +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0^{(-)}|^2 dx = 1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x W(y) dy = -\infty \end{aligned} \quad (21)$$

### 3 Исследование суперсимметричной системы с суперпотенциалом $W(x) = a \operatorname{th}(x)$ , $a > 0$

На основе рассмотренных теоретических представлений перейдем к исследованию конкретной системы с заданным суперпотенциалом  $W(x) = a * \operatorname{th}(x)$ ,  $a > 0$  и выявим ее основные характеристики.

#### 3.1 Нахождение основного состояния и исследование на нормируемость

Исследуем функции основного состояния на нормируемость

$$\int_0^x W(y) dy = a \ln \operatorname{ch}(x) = a \ln \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty \quad (22)$$

Следовательно, нормируемой функцией является  $\Psi_0^{(-)}$ .  $\hat{H}_{(-)}|\Psi_0^{(-)}\rangle = 0$ , а  $\hat{H}_{(+)}|\Psi_0^{(+)}\rangle \neq 0$ . Теперь получим вид функции  $\Psi_0^{(-)}$ :

$$\Psi_0^{(-)} = N_0 \exp(-a \ln \operatorname{ch}(x)) = N_0 \operatorname{ch}^{-a}(x) \quad (23)$$

### 3.2 Построение партнёрских гамильтонианов и нахождение уровней энергии системы

Повышающий и понижающий операторы для такой системы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + a \operatorname{th}(x)\right) \\ \hat{A}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + a \operatorname{th}(x)\right)\end{aligned}\quad (24)$$

Тогда Партнерские гамильтонианы можно представить как:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{(-)} &= \hat{A}^+ \hat{A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} - W'(x) + W^2(x)\right) \\ \hat{H}_{(+)} &= \hat{A} \hat{A}^+ = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + W'(x) + W^2(x)\right)\end{aligned}\quad (25)$$

Для  $W(x) = a * \operatorname{th}(x)$  получим, что  $W'(Q) = \frac{a}{\operatorname{ch}^2(x)}$ . С учётом этого:

$$\begin{aligned}H_- &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a(a+1)}{2\operatorname{ch}^2(x)} \\ H_+ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a(a-1)}{2\operatorname{ch}^2(x)}\end{aligned}\quad (26)$$

Тогда партнерские потенциалы:

$$\begin{aligned}U_-(a, x) &= \frac{a^2}{2} - \frac{a(a+1)}{2\operatorname{ch}^2(x)} \\ U_+(a, x) &= \frac{a^2}{2} - \frac{a(a-1)}{2\operatorname{ch}^2(x)}\end{aligned}\quad (27)$$

Полученные выражения для партнерских гамильтонианов отличаются линейным сдвигом параметра  $a$ . А именно при переходе к  $a-1$  для потенциалов можно записать:

$$U_+(a, x) = U_-(a-1, x) + \frac{1}{2}[a^2 - (a-1)^2], \quad R(a-1) \equiv \frac{1}{2}[a^2 - (a-1)^2] \quad (28)$$

Следовательно,

$$U_{(+)}(a, x) = U_{(-)}(a - n, x) + \frac{1}{2}[a^2 - (a - n)^2] \quad (29)$$

Таким образом, бозонные и фермионные гамильтонианы имеют схожую форму. Это явление в некоторых суперсимметричных системах называется Инвариантностью формы потенциала. Благодаря этому свойству легко можно построить энергетические уровни. Пусть  $R(a_s)$  энергетическая разность между двумя соседними уровнями энергии с параметром  $s$  и  $s - 1$ , тогда  $n$ -й уровень энергии находится, как:

$$E_n = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n R(a_s) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n [(a_{s-1})^2 - a_s^2] = \frac{1}{2}[a^2 - (a - n)^2] \quad (30)$$

### 3.3 Построение волновых функций возбуждённых состояний системы

Исходя из связи между спектрами Партнерских Гамильтонианов и свойства Инвариантности формы потенциала, можно сделать вывод, что произвольная собственная волновая функция  $\Psi_{n+1}^{(+)}(x, a)$  для  $\hat{H}_{(+)}$  также является собственной функцией  $\hat{H}_{(-)}$ , при том она же является  $\Psi_n^{(-)}(x, a - 1)$ . Далее, подействуем на нее оператором  $\hat{A}^+(a)$  и переведем ее из бозонного состояния в фермионное  $\Psi_{n+1}^{(-)} = \hat{A}^+(a)\Psi_n^{(-)}(x, a - 1)$ . Следовательно, таким способом можно построить волновую функцию для любого  $n$ -го возбуждённого состояния, зная только основное:

$$\Psi_n^{(-)} \propto A^+(a)A^+(a - 1) \dots A^+(a - n + 1)\Psi_0^{(-)}(x, a - n) \quad (31)$$

И построенные волновые функции остаётся только нормировать. Итак, построим таким образом некоторые первые волновые функции возбужденных состоя-

ний:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{(-)} &\propto \operatorname{ch}^{(1-a)}(x) \operatorname{th}(x) \\
\Psi_2^{(-)} &\propto \operatorname{ch}^{(2-a)}(x) ((2a-1) \operatorname{th}^2(x) - 1) \\
\Psi_3^{(-)} &\propto \operatorname{ch}^{(3-a)}(x) ((2a-1) \operatorname{th}^2(x) - 3) \operatorname{th}(x) \\
\Psi_4^{(-)} &\propto \operatorname{ch}^{(4-a)}(x) ((2a-1)(2a-3) \operatorname{th}^4(x) - 6(2a-3) \operatorname{th}^2(x) + 3) \\
\Psi_5^{(-)} &\propto \operatorname{ch}^{(5-a)}(x) ((2a-1)(2a-3) \operatorname{th}^4(x) - 10(2a-3) \operatorname{th}^2(x) + 15)
\end{aligned} \tag{32}$$

Полученные выражения можно обобщить для произвольного  $n$ . Построенные функции состоят из двух частей:  $\operatorname{ch}^{n-a}(x)$  и некоторого полинома от  $\operatorname{th}(x)$ , который можно представить через Полиномы Якоби  $P_n^{(\alpha, \alpha)}$ :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left( (1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n \right) \tag{33}$$

Сравнивая вид Полиномов Якоби с полученными волновыми функциями не трудно убедиться, что:

$$\Psi_n^{(-)} = N_n(a) \operatorname{ch}^{n-a}(x) P_n^{(a-n, a-n)}(\operatorname{th}(x)), \tag{34}$$

где  $N_n(a)$  Нормировочная константа, которую можно найти подставив в условие нормировки:

$$N_n^2(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}^{2(n-a)}(x) [P_n^{(a-n, a-n)}(\operatorname{th}(x))]^2 dx = 1 \tag{35}$$

Интегрируя, получим:

$$N_n(a) = \sqrt{\frac{2^n n! \Gamma(a - [\frac{n-1}{2}]) \Gamma(a - n + 1) \Gamma(a - [\frac{n}{2}] + \frac{1}{2})}{\Gamma^2(a + 1) \Gamma(a - n + \frac{1}{2}) \operatorname{B}(a - n, \frac{1}{2})}} \tag{36}$$

## 4 Точное вычисление матричного элемента $\langle 0|ch(x)|n\rangle$ и его асимптотика при больших $n$

Целью данного раздела является явное вычисление данного матричного элемента путем интегрирования. В дальнейшем, полученное решение будет сравнено с квазиклассическим вычислением матричного элемента с помощью Метода Ландау. Однако Метод Ландау позволяет лишь оценить экспоненциальное затухание матричных элементов при больших  $n$ . Таким образом, для аналитического сравнения необходимо будет выделить экспоненциальную часть из точного решения и найти ее асимптотику.

В общем случае матричный некоторый элемент  $\langle m|f|n\rangle$  вычисляется путем интегрирования волновых функций как:

$$f_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n f \Psi_m dx \quad (37)$$

Таким образом, вычисление определенного матричного элемента  $\langle 0|ch(x)|n\rangle$  сводится к интегралу:

$$\begin{aligned} \langle 0|ch(x)|n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x) ch(x) \Psi_n(x) dx = \\ &= N_0(a) N_n(a) \int_{-\infty}^{+\infty} ch^{n-2a+1}(x) P_n^{(a-n, a-n)}(\text{th}(x)) dx \quad (38) \end{aligned}$$

Который при помощи замены  $t = \text{th}(x)$  приводится к виду:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - t^2)^{(n/2-a-3/2)} P_n^{(a-n, a-n)}(t) dt \quad (39)$$

Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 : I_{2k+1} &= 0 \\ n = 2k : I_{2k} &= \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(a+1) \text{B}(a-k-1/2, k+1/2)}{\Gamma(a-k+1) 4^k k! (2k-1)} \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, матричный элемент оператора  $ch(x)$  отличен от нуля только для чётных уровней. Преобразовав нормировочную константу  $N_n(a)$  для чётных  $n$ , получим, что:

$$\begin{aligned} \langle 0 | ch(x) | n \rangle &= \\ &= \frac{(-1)^{k-1} \Gamma(a-k-1/2) \Gamma(k+1/2)}{2^k k! (2k-1) \Gamma(a)} \sqrt{\frac{(2k)! \Gamma(a-2k+1) \Gamma(a-k+1/2) \Gamma(a+1/2)}{\pi \Gamma(a-2k) \Gamma(a) \Gamma(a-k+1)}} \end{aligned} \quad (41)$$

Для вычисления асимптотики при  $n \rightarrow \infty$ , также необходимо учесть, что  $a$  всегда больше  $n$ . Таким образом, при  $n = 2k$  используется приближение  $a \gg k \gg 1$ . Логарифмируя точное решение и применяя Формулу Стирлинга:

$$\ln \Gamma(z) = z \ln z - z + \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right), \ln(n!) = \ln \Gamma(n+1) \quad (42)$$

Получим, что при больших  $n$ :

$$f_{0n} \propto \exp(k \ln(k/a)) \quad (43)$$

## 5 Вычисление квазиклассического матричного элемента Методом Ландау

Подробный механизм построения волновых функций и вывод интегрального представления для произвольных матричных элементов в квазиклассическом

случае подробно описан в [1]. В данном параграфе будут рассмотрены лишь основные положения, позволяющие применить данный метод для аналитического сравнения с точным ответом.

Точное вычисление матричных элементов в квазиклассическом случае несет в себе большие сложности для любой физической величины  $f$ . Предполагается, что энергетические состояния, для перехода между которыми вычисляется матричный элемент, далеки друг от друга. Таким образом, для  $E_2 > E_1$  интеграл произвольного матричного элемента оператора  $f(x)$  принимает вид:

$$f_{12} \propto 2 \operatorname{Re} \left[ \int \exp \left( \frac{1}{\hbar} \int_{a_1}^x \sqrt{2m(U - E_1)} dx - \frac{1}{\hbar} \int_{a_2}^x \sqrt{2m(U - E_2)} dx \right) \frac{f(x) dx}{[(U - E_1)(U - E_2)]^{1/4}} \right] \quad (44)$$

В данном случае координата  $x$  смещается в комплексную плоскость вследствие необходимости обходить точки поворота, вблизи которых перестает выполняться квазиклассическое приближение. Путь интегрирования, соответственно, смещается с вещественной оси в верхнюю полуплоскость таким образом, чтобы уменьшить экспоненциальный множитель. Экспонента имеет экстремум только в точках  $U(x) = \infty$  при  $E_1 \neq E_2$ . Смещение контура интегрирования ограничивается только наличием особых точек функции  $U(x)$ . Главную роль в интеграле играет окрестность особой точки, таким образом, при наличии лишь одной особой точки, матричный элемент преимущественно пропорционален:

$$f_{12} \propto \exp \left( - \frac{1}{\hbar} \operatorname{Im} \left[ \int_{a_2}^{x_0} \sqrt{2m(E_2 - U)} dx - \int_{a_1}^{x_0} \sqrt{2m(E_1 - U)} dx \right] \right) \quad (45)$$

где  $a_0$  - любая точка классически разрешимой области, ее выбор никак не влияет на мнимую часть интеграла, а  $x_0$  - особая точка  $U(x)$  в верхней полуплоскости.

В случае, когда особых точек в верхней полуплоскости несколько, необходимо выбрать ту, в которой экспонента имеет наименьшее абсолютное значение.

Очевидно, что особыми точками для потенциала  $U(x) = a^2 - \frac{a(a+1)}{\text{ch}^2(x)}$  являются точки  $x_0 = i(\pi/2 + \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . В качестве нижнего предела интегрирования удобно взять точку 0, так как интегрирование по вещественной оси до 0 даст вещественную часть результата, которая не интересна в данном случае. В качестве же нижнего предела выбирается ближайшая к вещественной оси особая точка. С учётом вышеизложенного, а также вида потенциала и уровней энергии заданной системы, итоговый интеграл принимает вид:

$$f_{0n} \propto \exp \left( - \text{Im} \left[ \int_0^{i\pi/2} \left( \sqrt{\frac{a(a+1)}{\text{ch}^2(x)} - (a-n)^2} - \sqrt{\frac{a(a+1)}{\text{ch}^2(x)} - a^2} \right) dx \right] \right) \quad (46)$$

Так как путем интегрирования является отрезок на мнимой оси, логично упростить интеграл в показателе экспоненты, с использованием замены  $x = iy$ . При такой замене справедливо, что  $\text{ch}(iy) = \cos(y)$ . С учётом этого, задача сводится к вычислению интеграла:

$$i \int_0^{\pi/2} \left( \sqrt{\frac{a(a+1)}{\cos^2(y)} - (a-n)^2} - \sqrt{\frac{a(a+1)}{\cos^2(y)} - a^2} \right) dy \quad (47)$$

Данный интеграл можно представить в виде разности двух интегралов, где значения в верхнем пределе понимается как стремление к точке  $\pi/2$ .

$$\lim_{s \rightarrow \pi/2} i \sqrt{a(a+1)} \left[ \int_0^s \sqrt{1 - \frac{(a-n)^2}{a(a+1)} \cos^2(y)} \frac{dy}{\cos(y)} - \int_0^s \sqrt{1 - \frac{a}{a+1} \cos^2(y)} \frac{dy}{\cos(y)} \right] = \lim_{s \rightarrow \pi/2} i \sqrt{a(a+1)} (I_n - I_0) \quad (48)$$

В таком случае остается лишь вычислить интеграл  $I_n$ . Переходя к  $t$ , используя

замену  $y = \pi/2 - t$ , получаем, что исходный интеграл  $I_n$  переходит в:

$$\int_{\pi/2}^s \sqrt{1 - \frac{(a-n)^2}{a(a+1)} \sin^2(t)} \frac{dt}{\sin(t)} \quad (49)$$

При этом уже  $s \rightarrow 0$ . Решение интегралов такого типа приведено в источнике [2], Таким образом, искомый интеграл равен:

$$\begin{aligned} I_n = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{(a-n)^2}{a(a+1)} \sin^2(t)} + \cos(t)}{\sqrt{1 - \frac{(a-n)^2}{a(a+1)} \sin^2(t)} - \cos(t)} \right] \Bigg|_{\pi/2}^s - \\ - \frac{a-n}{\sqrt{a(a+1)}} \ln \left[ \frac{a-n}{\sqrt{a(a+1)}} \cos(t) + \sqrt{1 - \frac{(a-n)^2}{a(a+1)} \sin^2(t)} \right] \Bigg|_{\pi/2}^s \quad (50) \end{aligned}$$

Подставляя  $n = 0$ , можно получить ответ для  $I_0$ . Таким образом получаем итоговое решение:

$$\begin{aligned} \sqrt{a(a+1)} \lim_{s \rightarrow 0} (I_n - I_0) = -\frac{1}{2} \sqrt{a(a+1)} \lim_{s \rightarrow 0} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{(a-n)^2}{a(a+1)} \sin^2(s)} - \cos(s)}{\sqrt{1 - \frac{a}{a+1} \sin^2(s)} - \cos(s)} \right] - \\ - (a-n) \ln \left[ \frac{\sqrt{a(a+1)} + a-n}{\sqrt{a(a+1)}} \right] + (a-n) \ln \left[ \frac{\sqrt{a(a+1)} - (a-n)^2}{\sqrt{a(a+1)}} \right] + \\ + a \ln \left[ \frac{\sqrt{a(a+1)} + a}{\sqrt{a(a+1)}} \right] - a \ln \left[ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a(a+1)}} \right] = \\ = \frac{1}{2} \left( \sqrt{a(a+1)} - a \right) \ln(a) + \frac{1}{2} \left( a-n - \sqrt{a(a+1)} \right) \ln \left( a(a+1) - (a-n)^2 \right) - \\ - (a-n) \ln \left( \sqrt{a(a+1)} + (a-n) \right) + a \ln \left( a + \sqrt{a(a+1)} \right) \quad (51) \end{aligned}$$

Видно, что полученный результат и является мнимой частью искомого интеграла в (46). Вычисляя асимптотику показателя экспоненты в приближении  $a \gg k \gg 1$ , получается, что:

$$f_{0n} \propto \exp(k \ln(k/a)) \quad (52)$$

Таким образом, полученный результат полностью совпадает с асимптотикой точного ответа.

## 6 Выводы

В рамках данной работы, основываясь на свойствах суперсимметрии были построены волновые функции основного и возбужденных состояний, энергетические уровни, Партнерские Гамильтонианы для системы с заданным суперпотенциалом  $W(x) = a \operatorname{th}(x)$ ,  $a > 0$ . Явно вычислен интеграл матричного элемента  $\langle 0 | \operatorname{ch}(x) | n \rangle$ , а также рассмотрено квазиклассическое приближение для вычисления такого матричного элемента.

Подводя итог сравнения двух методов для вычисления матричных элементов, можно отметить следующее. Точное решение, полученное путем явного интегрирования волновых функций, не смотря на свою громоздкость, позволяет получить точное выражение для любых квантовых чисел. В то время как с помощью Метода Ландау можно оценить матричный элемент намного проще, но ценой потери точности. Также квазиклассический способ ограничивает выбор состояний, переход между которыми описывается матричным элементом. Таким образом, Метод Ландау является эффективным инструментом для оценивания величин произвольных матричных элементов при больших энергиях. Однако на низких энергетических уровнях предпочтение стоит отдать точному решению.

Не смотря на совпадение данных методов в работе, они обладают рядом недостатков, описанными выше. Поэтому в дальнейшем, большой интерес вызывает поиск новых, более простых и при этом более точных способов вычисления различных матричных элементов, опираясь на изученные свойства суперсимметричной квантовой механики.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики в 10 т. Т. III. Квантовая механика(нерелятивистская теория) — М.: Наука, 1973
- [2] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products — L.:Elsevier, 2007
- [3] Ишмухаметов Б.Х., Канцельсон М.И., Поликарпов А.Ф. Одноэлектронные задачи квантовой механики в квазиклассическом рассмотрении —Екб.: УФУ, 2018
- [4] Генденштейн Л.Э., Криве И.В. Суперсимметрии в квантовой механике - УФН, т.146, вып.4
- [5] И.фон Нейман. Математические основы квантовой механики — М.: Наука, 1964
- [6] Мессиа А. Квантовая механика. Т.1 — М.: Наука, 1978
- [7] Киселёв В.В. Квантовая механика. Курс лекций. М.: 2025
- [8] Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика с задачами. М.: Наука, 1976
- [9] Junker G.Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics. Springer, 1996
- [10] Давыдов А.С. Квантовая механика. СПб.: БХВ-Петербург, 2011