

Высокочастотные гравитационные волны от земных
процессов и возможность их лабораторного наблюдения

Лозенко Денис Викторович
МГУ, Физический факультет, 212 группа
Научный руководитель:
Сатунин Пётр Сергеевич, с.н.с. ИЯИ РАН

Москва, 2026

Содержание

Введение	2
Гравитационное излучение	2
Используемая модель и её анализ	4
Постановка задачи	4
Гравитационные волны, излучаемые вращающейся гантелью	4
Гравитационное излучение от удара	7
Краткий обзор других Земных источников	11
Заключение	12
Список литературы	13

Введение

Идея этой работы родилась из прямой практической нужды. Важным вопросом при наблюдении высокочастотных гравитационных волн является исключение различных шумов от явлений, которые не являются целью эксперимента. Особенно это важно при учёте того, что детекторы гравитационных волн довольно чувствительны и наличие шумов может сильно повлиять на результат эксперимента.

В работе исследуется излучение, исходящего от механических явлений в пределах Земли. Рассчитывается безразмерная амплитуда гравитационного излучения. Также присутствует сравнение с иными немеханическими процессами на Земле, рассмотренные в других работах.

Исследуемое излучение может быть как монохроматическим, так и иметь довольно широкий спектр. В обоих случаях наибольший интерес представляет верхняя оценка безразмерной амплитуды - чтобы принципиально проверить возможность детектирования.

Гравитационное излучение

Если представить себе океан, то знакомые нам океанические волны, кажущиеся для человека, смотрящего на них, довольно высокими, окажутся весьма незначительной рябью на фоне всего океана. Точно также гравитационные волны - это мелкая рябь на пространстве-времени. Описание такой ряби весьма точно даётся т.н. линеаризованной ОТО. В этой теории мы полагаем, что метрика ПВ лишь на небольшое возмущение отличается от плоского ПВ Минковского:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

где $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ - малые поправки, определяющие гравитационное поле (волны).

Запишем уравнения Эйнштейна:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu},$$

где мы пренебрегли членом с Λ .

Далее можно ввести следующие условия:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h, \quad \partial_\nu h^{\mu\nu} = 0,$$

где $h = \eta_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ - свёртка возмущения метрики.

Рассчитывая по определению тензор Риччи находим для него выражение в указанной метрике:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\mu\nu}$$

Тогда уравнения Эйнштейна принимают вид волнового уравнения для гравитационной волны, определяемой метрикой $h^{\mu\nu}$:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

с решением

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\Delta T_{\mu\nu}^{\text{тело}}(t - |r - r'|/c, r')}{|r - r'|} d^3 r',$$

где введено время задержки $t_{ret} = t - |r - r'|/c$ - время, за которое сигнал дойдет до наблюдателя. В случае медленно движущихся тел (наш случай) этим временем можно пренебречь при расчётах, что и делается в работе.

Для экспериментальной работы с гравитационными волнами чаще всего используют её безразмерную амплитуду, которая в общем случае даётся интегралом выше, либо мощность излучения. В случае каких-либо осцилляций они даются квадрупольным моментом системы. (Дипольного гравитационного излучения нет). Через тензор приведенного квадрупольного момента:

$$D_{jk} = \int \rho(x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3 x$$

они даются как:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{D}_{ij}(t),$$

$$L^{GW} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{D}_{ij} \ddot{D}^{ij} \right\rangle_t,$$

где под обозначением "ТТ" имеется ввиду поперечно-бесследовая ("transversal-traceless") калибровка.

ТТ-калибровка - это калибровка, дающаяся условиями: $A_{\mu\alpha} u^\alpha = A_{\mu\alpha} k^\alpha = A_{\mu}^\mu = 0$, где $A_{\mu\nu}$ - амплитуда, k^α - волновой 4-вектор, u^α - 4-скорость. В это калибровке есть только две линейно-независимые компоненты, т.е. две степени свободы (поляризации) гравитационной волны.

Используемая модель и её анализ

Постановка задачи

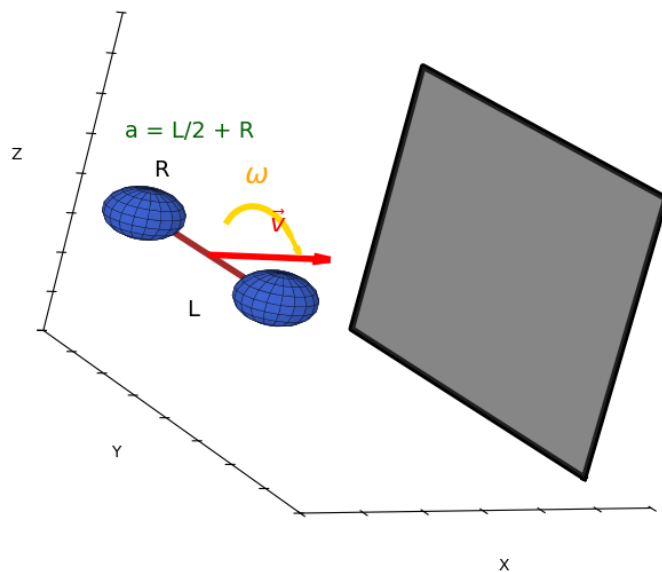


Рис. 1: Модель земного процесса

В работе используется модель: гантель с двумя шарами на концах радиуса R , массы M каждый, соединенных тонким невесомым стержнем длины L (от центра одного шара до другого). Система вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню. Также система движется вдоль той же оси со скоростью v . По направлению движения располагается вертикальная стенка, о которую гантель абсолютно упруго ударяется. Где-то недалеко от этого располагается детектор.

В связи с подобной постановкой задачи, она распадается на два пункта:

1. Рассмотрение излучения от вращения.
2. Гравитационный импульс от удара.

Гравитационные волны, излучаемые вращающейся гантелью

Считая, что радиусы шаров достаточно малы в сравнении с длиной стержня, введём обозначение $a = L/2 + R$ и рассмотрим радиус-векторы двух шаров в

лабораторной системе отсчёта:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} vt \\ a \sin \omega t \\ a \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} vt \\ -a \sin \omega t \\ -a \cos \omega t \end{pmatrix}$$

и заметим, что:

$$\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2 = a^2 + v^2 t^2$$

Теперь для нахождения излучения необходимо ввести тензор приведённого квадрупольного момента:

$$D_{jk} = \int \rho(x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2) d^3 x$$

В нашем случае можно не пользоваться интегралом и ограничиться суммированием по шарам:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^2 M(x_i^{(k)} x_j^{(k)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} r_k^2)$$

Путём несложных вычислений приходим к следующей матрице:

$$D_{ij}^{\text{ICO}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} M v^2 t^2 - \frac{2}{3} M a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} M a^2 - M a^2 \cos 2\omega t - \frac{2}{3} M v^2 t^2 & M a^2 \sin 2\omega t \\ 0 & M a^2 \sin 2\omega t & \frac{1}{3} M a^2 + M a^2 \cos 2\omega t - \frac{2}{3} M v^2 t^2 \end{pmatrix}$$

Также нам пригодится вид этого тензора в СО центра масс гантели ($vt = 0$):

$$D_{ij}^{\text{COЦМ}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} M a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} M a^2 - M a^2 \cos 2\omega t & M a^2 \sin 2\omega t \\ 0 & M a^2 \sin 2\omega t & \frac{1}{3} M a^2 + M a^2 \cos 2\omega t \end{pmatrix}$$

Для нахождения амплитуды гравитационного излучения необходимо знать вторую производную тензора приведенного квадрупольного момента. Удобнее дифференцировать по времени тензор $D_{ij}^{\text{COЦМ}}$ в СО центра масс, т.к. получаемый тензор \ddot{D}_{ij} окажется автоматически удовлетворяющим условиям ТТ-калибровки (будет поперечным и бесследовым).

Итак, беря вторую производную от компонент тензора получаем:

$$\ddot{D}_{ij} = 4 M a^2 \omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\omega t & -\sin 2\omega t \\ 0 & -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t \end{pmatrix}$$

Малое возмущение метрики, характеризующее гравитационную волну, в ТТ-калибровке может быть выражено через найденный нами тензор следующим образом:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{D}_{ij}(t_{ret}),$$

где $t_{ret} = t - r/c$ - время задержки, т.е. время за которое волна доходит до наблюдателя (детектора). Задержка крайне мала, так что ей пренебрегаем.

Гравитационная волна имеет в ТТ-калибровке две поляризации:

$$\begin{cases} h_+ = \frac{1}{2}(h_{yy} - h_{zz}) \\ h_\times = h_{yz} = h_{zy} \end{cases}$$

Используя тензор \ddot{D}_{ij} приходим к следующим двум выражениям:

$$\begin{cases} h_+ = \frac{8G}{c^4 r} M a^2 \omega^2 \cos 2\omega t \\ h_\times = \frac{8G}{c^4 r} M a^2 \omega^2 \cos \left(2\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

В связи с тем, что две поляризации волны отличаются на $+\frac{\pi}{2}$, то излучение имеет круговую поляризацию.

Теперь введём обозначение для характерной безразмерной амплитуды излучения:

$$h_c = \frac{8GMa^2\pi^2 f^2}{c^4 r}, \quad h_c(f) \sim f^2,$$

где $f = \frac{2\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\pi}$ - частота гравитационных волн, исходящих от вращающегося тела.

Отдельный вопрос - какой диапазон частот следует рассматривать для нахождения амплитуды. В реальности, гантель не абсолютно твёрдая, и имеет предельное значения частоты вращения, при котором она разрушается.

Если мы предположим, что масса стержня $m \ll M$ массы шара и его длина $L \approx a \gg R$ радиуса шара, то из второго закона Ньютона нетрудно найти оценку:

$$\omega_{max} \sim \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho a^2}}$$

При линейном размере $a = 1\text{м}$ можно получить такие оценки для нескольких материалов:

Материал	ω_{max} , рад/с	f_{max}^{GW} , Гц
Алюминий	115,5	36,8
Сталь	123,6	39,4
Титан	131,5	41,9

Таким образом, наиболее корректно будет рассматривать диапазон частот $f \in [1, 100]$ Гц.

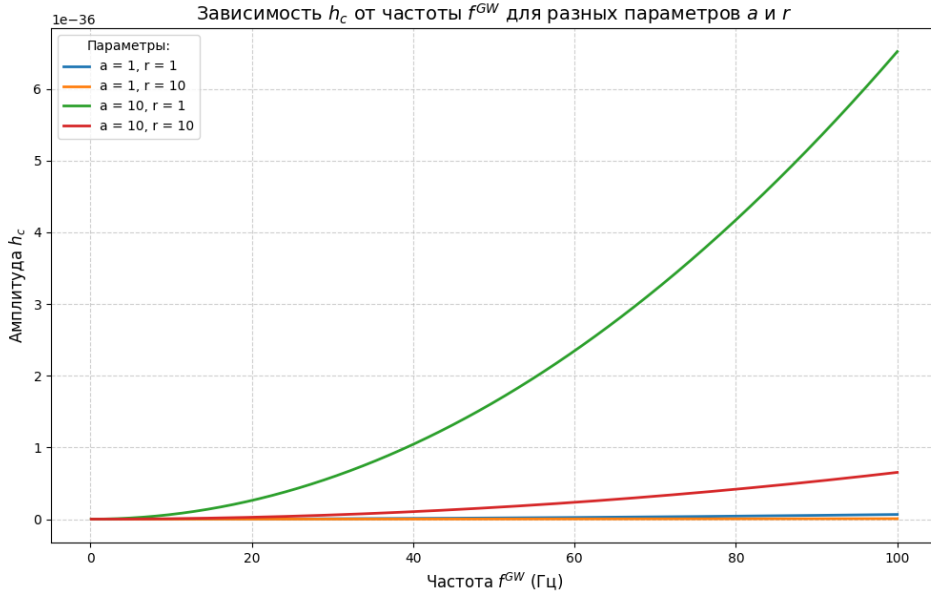


Рис. 2: Значения характерной безразмерной амплитуды h_c гравитационной волны

Как можно видеть из графика, наилучшее значение, на которое мы можем рассчитывать это $h_c \sim 10^{-36}$, что значительно меньше чувствительности любого из современных детекторов. Например, чувствительность LIGO в диапазоне частот $f^{GW} \in [1, 1000]$ может доходить до $h_c \sim 10^{-23}$. До таких же значений доходит чувствительность CASH, однако, более того, для CASH такие волны слишком низкочастотные, на несколько порядков.

Гравитационное излучение от удара

Другой случай - упругий удар о стенку. В этом случае система должна излучать импульс на широком диапазоне частот, в отличие от монохроматического излучения от вращения гантели. В связи с спецификой случая мы уже не можем использовать стандартную квадрупольную формулу для безразмерной амплитуды. Нам придётся рассчитать амплитуду в лоб, используя тензор энергии-импульса.

Для начала, рассмотрим как выглядит ТЭИ твёрдого тела (напряжениями в теле пренебрегаем):

$$T_{\mu\nu}^{\text{тело}} = \rho u_\mu u_\nu,$$

где $\mu, \nu = \overline{0, 3}$

В нашей задаче гравитационный импульс образуется за счёт изменения ТЭИ тела (конкретно двух шаров). Найдём же его:

$$\Delta T_{00}^{\text{тело}} = 2\rho(c^2 - c^2) = 0$$

$$\Delta T_{0i}^{\text{тело}} = 2\rho(c(-v) - cv) = -2\rho cv = -\frac{3Mcv}{\pi R^3} = \Delta T_{01}^{\text{тело}}$$

$$\Delta T_{ij}^{\text{тело}} = 2\rho(v^2 - v^2) = 0$$

Т.е. меняются только компоненты ответственные за импульс:

$$\Delta T_{\mu\nu}^{\text{тело}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3Mcv}{\pi R^3} & 0 & 0 \\ -\frac{3Mcv}{\pi R^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4Mcv}{V} & 0 & 0 \\ -\frac{4Mcv}{V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зная изменение ТЭИ мы можем теперь решить волновое уравнение гравитационной волны в присутствии материи:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \Delta T_{\mu\nu}^{\text{тело}}$$

Его решением является выражение:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\Delta T_{\mu\nu}^{\text{тело}}(t - |r - r'|/c, r')}{|r - r'|} d^3 r'$$

или учитывая вид тензора $\Delta T_{\mu\nu}^{\text{тело}}$:

$$\bar{h}_{01}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{\Delta T_{01}^{\text{тело}}(t - |r - R|/c, R)}{|r - R|} d^3 R$$

Мы считаем что излучение исходит именно от двух шаров (стержень мало-массивен и тонок). Также будем для шаров считать, что $R \ll r$, где r - расстояние до наблюдателя, время задержки пренебрежимо мало. Тогда интеграл даст:

$$\bar{h}_{01} = -\frac{16G}{c^4 r} M v c = \bar{h}_{10} = \bar{h}_{01},$$

а все остальные компоненты нулевые.

Как можно заметить, данный тензор удовлетворяет условиям ГТ-калибровки. Причём здесь есть лишь одна, отличная от нуля поляризация гравитационной волны:

$$h_{\times} = \bar{h}_{01} = \bar{h}_{10},$$

В связи с тем, что реальный удар происходит не мгновенно, то скорость тела v - это какая-то непрерывная функция времени t . Пусть τ - время удара. Разные теории упругих ударов дают такой диапазон: $\tau \in [10^{-5}, 10^{-3}]$. Мы рассмотрим линейную зависимость скорости, от времени:

$$v(t) = \begin{cases} v(1 - \frac{2t}{\tau}), t \in [0, \tau] \\ v, \text{ в других случаях} \end{cases}$$

Также необходимо сделать следующее замечание. Излучение от одного из шариков гантели дойдёт до детектора немного раньше, чем от другого. Оценим это запаздывание для $a = 1\text{м}$:

$$t'_{ret} \sim \frac{2a}{c} \sim 10^{-8} \ll \tau,$$

т.е. задержкой можно пренебречь.

Итак, на промежутке $[0, \tau]$ наша амплитуда зависит от времени так:

$$h_{\times}(t) = -\frac{16G}{c^3 r} Mv \left(1 - \frac{2t}{\tau}\right)$$

В случае удара излучение не монохроматическое. Оно имеет довольно широкий спектр. Для этих целей следует рассматривать Фурье-образ амплитуды:

$$\hat{h}_{\times}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\tau} h_{\times}(t) e^{i\omega t} dt,$$

который при интегрировании даёт следующее выражение:

$$\hat{h}_{\times}(\omega) = -\frac{16G}{c^3 r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} Mv \frac{(i\omega\tau - 2)e^{i\omega\tau} + i\omega\tau + 2}{\tau\omega^2}$$

Беря модуль выражения получаем спектр амплитуд:

$$|\hat{h}_{\times}(\omega)| = \sqrt{\frac{(16\sqrt{2}GM\tau v \omega \sin(\tau\omega) + 32\sqrt{2}GMv \cos(\tau\omega) - 32\sqrt{2}GMv)^2}{\pi c^6 r^2 \tau^2 \omega^4} + \frac{(32\sqrt{2}GMv \sin(\tau\omega) - 16\sqrt{2}GM\tau v \omega \cos(\tau\omega) - 16\sqrt{2}GM\tau v \omega)^2}{\pi c^6 r^2 \tau^2 \omega^4}}$$

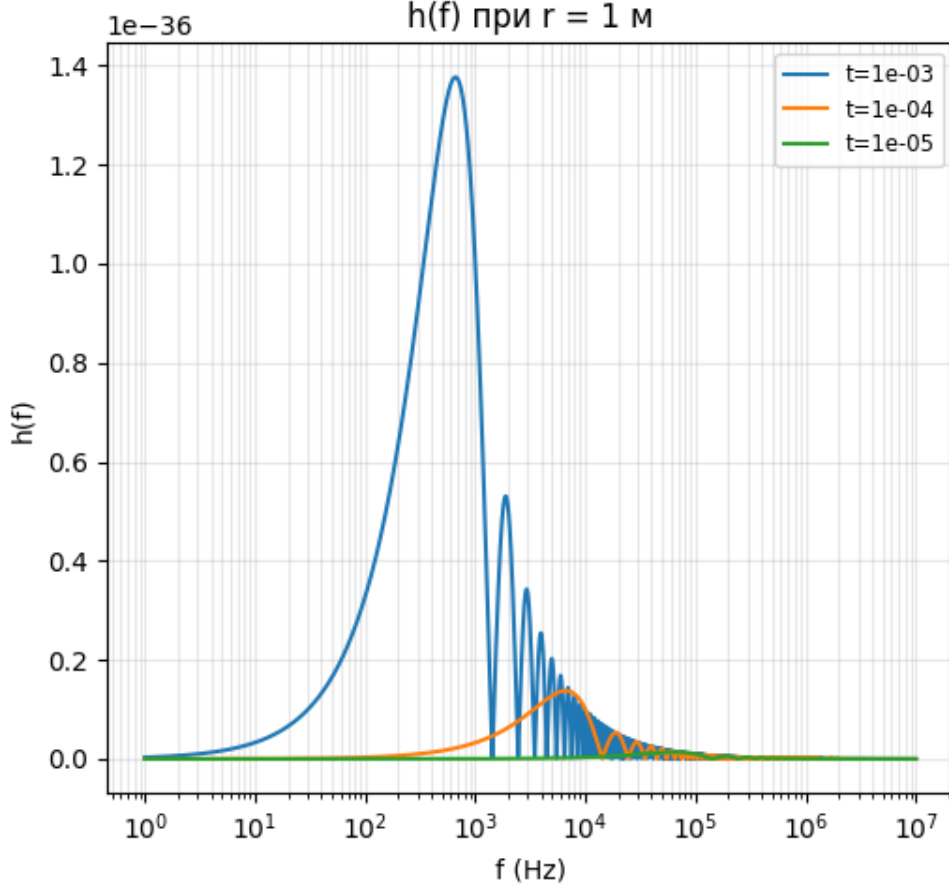


Рис. 3: Спектр безразмерной амплитуды гравитационной волны

Как можно видеть $h_{\times}^{max}(f) \sim 10^{-36}$, что ниже, чем чувствительность современных детекторов.

Впрочем, у этого случая есть ещё одна сторона рассмотрения. Реальный шар не является абсолютно твёрдым. При упругом ударе в нём будут возникать собственные колебания. Пользуясь теорией Герца для явлений контакта упругих тел, можно получить оценку собственной частоты стального шара массы $M = 10\text{кг}$ и радиуса $R = 1\text{ м}$ как $f \sim 10^4\text{Гц}$.

Если считать, что излучение от таких колебаний шара описывается квадрупольным приближением, то можно провести следующие оценки:

$$h_{\times} \sim \frac{G}{c^4 r} \ddot{D}_{yz}$$

$$\ddot{D}_{yz} \sim MR^2 16\pi^2 \sin 4\pi ft$$

Возьмём для оценки параметры: $r = 1\text{ м}$, $R = 1\text{ м}$, $M = 10\text{кг}$, $t = 10^{-4}\text{ с}$ - время, немного после удара, т.к. далее колебания будут затухать. Тогда оценка получится:

$$h \sim 10^{-34},$$

что тоже не будет обнаружено.

На рисунке ниже отмечены цифрами 1 и 2 пиковые амплитуды на соответствующей частоте для вращения и удара соответственно.

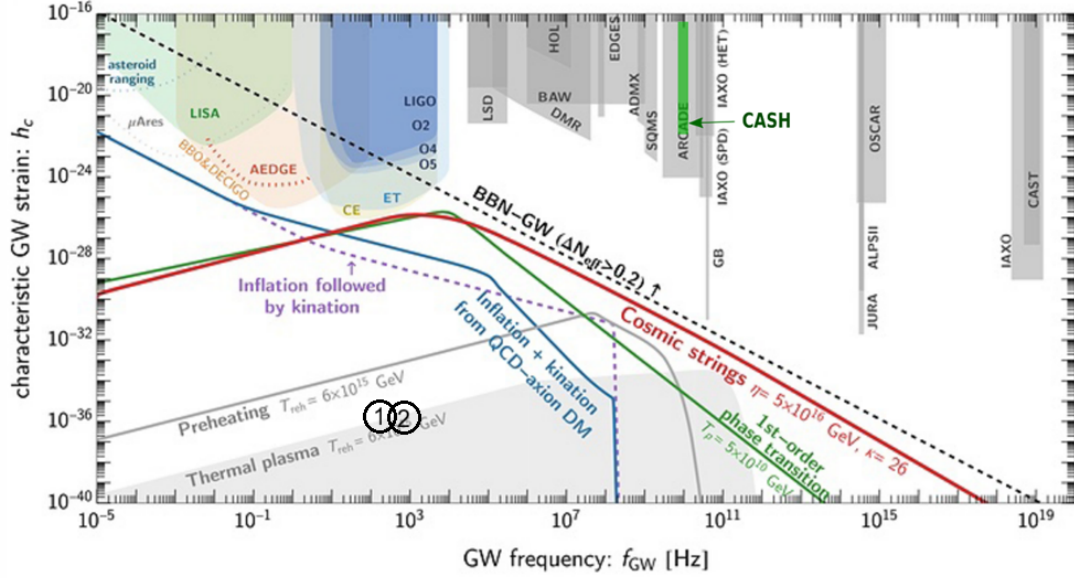


Рис. 4: На что способны современные детекторы. (из источника (7))

Краткий обзор других Земных источников

Не только механическими гипотетически могут быть земные шумы, мешающие наблюдению гравитационных волн.

Например в статье (4) приводится амплитуда гравитационного излучения от ядерного взрыва для детектора, отстоящего от взрыва на несколько метров: $h \sim 10^{-28}$.

В другой статье (5) приводится пример генератора гравитационных волн основанного на контролируемых реакциях. Ожидаемая амплитуда излучения там может достигать $\sim 10^{-3}$, хотя целенаправленную генерацию гравитационных волн сложно назвать шумом.

В обзоре (6) приводится т.н. эквивалентная амплитуда - величина, не являющейся реальной амплитудой гравитационной волны, которая показывает, насколько сильно локальные сейсмические колебания влияют на детекторы типа LIGO.

Во всех указанных случаях шумы оказываются пренебрежимо малыми.

Заключение

В работе приведён анализ гравитационного излучения от двух видов механических явлений в пределах Земли:

1. вращение некоторого твёрдого тела;
2. удар тела о стенку.

Были получены формулы для безразмерной амплитуды гравитационного излучения от обоих процессов.

В первом случае излучение было монохроматическим и описывалось квадрупольным приближением. Максимальная амплитуда такого излучения при заданных параметрах тела оказывалась порядка 10^{-36} .

Во втором случае гравитационные волны излучались на широком диапазоне частот и максимальные значения амплитуд оказывались также на уровне 10^{-36} .

В обоих случаях излучение современными детекторами не обнаруживалось, что говорит о том, что подобными механическими шумами при наблюдении высокочастотных гравитационных волн можно пренебречь.

Список литературы

1. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация*. В 3-х т. Т. 3. — М.: Мир, 1977.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля* (Теоретическая физика, том II). — 7-е изд., испр. — М.: Наука, 1988.
3. Ахмедов Э. Т. *Лекции по теории относительности, классической электродинамике и гравитации*. — М.: МЦНМО, 2024.
4. Charline G. F., Nuckolls J., Wood L. L. Gravitational-radiation production using nuclear explosions // *Physical Review D*. 1974. Vol. 10, № 4. P. 1064–1065.
5. Fontana G., Baker R. M. L., Jr. Generation of Gravitational Waves with Nuclear Reactions // *Proceedings of the Space Technology and Applications International Forum (STAIF-2006)* / Ed. by M. S. El-Genk. — AIP Conference Proceedings, 2006. Vol. 813. P. 1352–1358.
6. Harms J. Terrestrial Gravity Fluctuations // *Living Reviews in Relativity*. 2019. Vol. 22, № 6. arXiv: 1507.05850.
7. Pankratov A. L. et al. Search for dark-matter axions beyond the quantum limit: The cosmological axion Sarov haloscope proposal // *Physical Review D*. 2025. Vol. 112. 035003.