

Гравитирующие нетопологические солитоны

Котоянц Борис Олегович
группа 205

Научный руководитель:
С. В. Троицкий

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Москва, 2026

Введение и цель работы

В работе комплексное скалярное поле рассматривается как источник гравитации.

- ▶ энергия поля искривляет пространство-время;
- ▶ метрика не задаётся заранее, а находится из уравнений Эйнштейна;
- ▶ фазовая симметрия поля даёт сохраняющийся заряд Q ;
- ▶ при фиксированном заряде возможны локализованные нетопологические конфигурации.

Цель работы

Получить плотность энергии гравитирующего нетопологического солитона и вывести систему уравнений для нахождения амплитуды поля $\phi(r)$ и метрических коэффициентов $\alpha(r)$, $a(r)$.

Комплексное скалярное поле в плоском пространстве-времени

В плоском пространстве-времени

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad \mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - U(|\varphi|^2).$$

Действие:

$$S[\varphi] = \int d^4x (\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - U(|\varphi|^2)).$$

Тензор энергии–импульса:

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.$$

Плотность энергии в плоском случае:

$$T^0{}_0 = |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + U(|\varphi|^2).$$

Ковариантизация действия и полное действие

Переход к искривлённому пространству-времени выполняется ковариантизацией:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}, \quad d^4x \rightarrow \sqrt{-g} d^4x.$$

Материальное действие:

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi - U(|\varphi|^2)).$$

Гравитационное действие:

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda).$$

Полное действие:

$$S = S_g + S_m.$$

Для изолированного солитона рассматривается асимптотически плоский случай: вдали от объекта метрика должна стремиться к метрике Минковского, поэтому далее берётся $\Lambda = 0$.

Уравнение Клейна–Гордона–Фока

Варьируем материальное действие по φ^* , считая φ и φ^* независимыми переменными. Тогда получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + \frac{\partial U}{\partial \varphi^*} = 0.$$

Так как $U = U(|\varphi|^2)$, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi^*} = U'(|\varphi|^2) \varphi.$$

Следовательно,

$$\boxed{\square_g \varphi + U'(|\varphi|^2) \varphi = 0}$$

где

$$\square_g \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi).$$

Тензор энергии–импульса в искривлённом пространстве

Тензор энергии–импульса определяется через вариацию материального действия по метрике:

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

После вариации получается

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

где

$$\mathcal{L} = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi^* \partial_\beta \varphi - U(|\varphi|^2).$$

Это выражение далее используется при вычислении плотности энергии и радиального давления.

Лагранжиан инвариантен относительно глобального фазового преобразования

$$\varphi \rightarrow e^{i\beta} \varphi, \quad \varphi^* \rightarrow e^{-i\beta} \varphi^*, \quad \beta = \text{const.}$$

По теореме Нётер этой симметрии соответствует сохраняющийся ток:

$$J^\mu = -i(\varphi^* \nabla^\mu \varphi - \varphi \nabla^\mu \varphi^*), \quad \nabla_\mu J^\mu = 0.$$

Следовательно, существует сохраняющийся заряд Q . Именно наличие сохраняющегося заряда позволяет рассматривать локализованные конфигурации поля с конечной энергией.

Что такое солитон?

Солитон – локализованная конфигурация поля с конечной энергией.

Топологический солитон

- ▶ устойчивость связана с топологией;
- ▶ есть нетривиальные граничные условия;
- ▶ нельзя непрерывно перейти к вакууму.

Нетопологический солитон

- ▶ устойчивость не требует нетривиальной топологии поля;
- ▶ при фиксированном сохраняющемся заряде Q локализованное состояние может быть энергетически выгодным;
- ▶ пример такой конфигурации – Q -шар.

Для Q -шара условие устойчивости имеет вид

$$E(Q) < mQ.$$

Выбор вида поля

Поле записывается через амплитуду и фазу:

$$\varphi(x) = A(x)e^{i\chi(x)}.$$

Подстановка в ток Нётер даёт

$$J^\mu = 2A^2\nabla^\mu\chi.$$

Для ненулевого заряда берём

$$\chi(t) = \omega t, \quad A(x) = \phi(r), \quad \boxed{\varphi(t, r) = \phi(r)e^{i\omega t}}.$$

При этом

$$|\varphi|^2 = \phi^2(r), \quad |\partial_t\varphi|^2 = \omega^2\phi^2(r), \quad |\partial_r\varphi|^2 = \phi'^2(r).$$

Значит,

$$T_{tt}, T_{rr}, T_{\theta\theta}, T_{\psi\psi}$$

не зависят от времени. Поэтому источник статичен, и метрику можно искать в статическом сферически-симметричном виде.

Уравнения Эйнштейна и метрика

Уравнения Эйнштейна связывают геометрию с распределением энергии:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

Тензор Эйнштейна строится по метрике:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.$$

Поэтому поле и метрику нужно находить совместно.

Так как источник статичен и сферически симметричен, берём

$$\boxed{ds^2 = \alpha^2(r) dt^2 - a^2(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2}, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Плотность энергии

Рассматривается статический наблюдатель, для которого

$$dr = d\theta = d\psi = 0.$$

Тогда его четырёхскорость имеет только временную компоненту:

$$u^\mu = (u^t, 0, 0, 0), \quad u^t = \frac{1}{\alpha(r)}.$$

Поэтому плотность энергии равна

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = T^t_t.$$

После подстановки поля $\varphi(t, r) = \phi(r)e^{i\omega t}$ получаем

$$\rho(r) = \frac{\omega^2 \phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} + U(\phi^2(r)).$$

Временная компонента уравнений Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad G^t_t = 8\pi G T^t_t = 8\pi G \rho.$$

Для выбранной метрики:

$$G^t_t = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{2a'}{ra^3}.$$

Вводим массовую функцию:

$$\frac{1}{a^2(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{r}.$$

Тогда

$$M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r),$$

$$a(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1/2}.$$

Радиальная компонента уравнений Эйнштейна

Сначала из радиальной компоненты тензора энергии–импульса получаем

$$T^r_r = -p_r,$$

где

$$p_r(r) = \frac{\omega^2 \phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} - U(\phi^2(r)).$$

Теперь рассматриваем радиальную компоненту уравнений Эйнштейна:

$$G^r_r = -8\pi G p_r.$$

Для выбранной метрики

$$G^r_r = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{2\alpha'}{r\alpha a^2}.$$

Отсюда следует уравнение для $\alpha(r)$:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = G a^2 \left(\frac{M}{r^2} + 4\pi r p_r \right).$$

Радиальное уравнение для поля

Подставляя

$$\varphi(t, r) = \phi(r)e^{i\omega t}$$

в уравнение Клейна–Гордона–Фока, получаем

$$\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} \right) \phi' + a^2 \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - U'(\phi^2) \right) \phi = 0.$$

Из

$$\frac{1}{a^2} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad M' = 4\pi r^2 \rho$$

следует

$$\frac{a'}{a} = Ga^2 \left(4\pi r \rho - \frac{M}{r^2} \right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M' = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{\alpha'}{\alpha} = Ga^2 \left(\frac{M}{r^2} + 4\pi r \rho_r \right), \\ \phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a} \right) \phi' + a^2 \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - U'(\phi^2) \right) \phi = 0, \\ a = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1/2}, \\ \frac{a'}{a} = Ga^2 \left(4\pi r \rho - \frac{M}{r^2} \right), \\ \rho = \frac{\omega^2 \phi^2}{\alpha^2} + \frac{\phi'^2}{a^2} + U(\phi^2), \\ \rho_r = \frac{\omega^2 \phi^2}{\alpha^2} + \frac{\phi'^2}{a^2} - U(\phi^2). \end{array} \right.$$

Для гладкого локализованного решения система дополняется условиями

$$M(0) = 0, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi(\infty) = 0, \quad \alpha(\infty) = 1.$$

- ▶ $M(0) = 0$ означает отсутствие массы внутри нулевого радиуса;
- ▶ $\phi'(0) = 0$ отражает гладкость сферически-симметричного распределения поля в центре;
- ▶ $\phi(\infty) = 0$ задаёт локализацию поля;
- ▶ $\alpha(\infty) = 1$ фиксирует нормировку времени на бесконечности и является частью требования асимптотической плоскости.

В ходе работы была получена модель гравитирующего нетопологического солитона.

- ▶ получено уравнение движения поля - уравнение Клейна–Гордона–Фока в искривлённом пространстве;
- ▶ выведен тензор энергии–импульса этого поля;
- ▶ для выбранного вида поля найдена плотность энергии

$$\rho(r) = \frac{\omega^2 \phi^2}{\alpha^2} + \frac{\phi'^2}{a^2} + U(\phi^2);$$

- ▶ из уравнений Эйнштейна получены уравнения для метрических функций;
- ▶ итоговая система позволяет находить $\phi(r)$, $M(r)$ и $\alpha(r)$.

Спасибо за внимание!

Буду рад ответить на ваши вопросы.

Приложение: кривизна и тензор Эйнштейна

Символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}).$$

Тензор Римана:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}.$$

Тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}.$$

Скалярная кривизна и тензор Эйнштейна:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

- 1 Рубаков В. А. *Классические калибровочные поля*. М.: URSS, 1999.
- 2 Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Petrov V. A.
How Were the Hilbert–Einstein Equations Discovered?
Physics-Uspekhi, 2004.
- 3 Lovelock D. *The Einstein Tensor and Its Generalizations*.
Journal of Mathematical Physics, 1971.
- 4 Liebling S. L., Palenzuela C. *Dynamical Boson Stars*.
Living Reviews in Relativity, 2012.