МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КОТОЯНЦ Борис Олегович

Гравитирующие нетопологические солитоны

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА 2 КУРСА

____

(Подпись студента)

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор РАН, член-корреспондент РАН

Троицкий Сергей Вадимович

____

(Подпись научного руководителя)

Москва - 2026 г.

Содержание

1 Введение

В данной работе рассматривается комплексное скалярное поле, которое само является источником гравитации. Поскольку поле обладает ненулевым тензором энергии-импульса, оно искривляет пространство-время. Поэтому метрику уже нельзя считать заранее заданным плоским фоном: она должна определяться совместно с самим скалярным полем. Кроме того, комплексное скалярное поле обладает глобальной фазовой симметрией. Этой симметрии соответствует сохраняющийся заряд Q, наличие которого позволяет рассматривать локализованные конфигурации поля с конечной энергией — нетопологические солитоны.

Цель работы состоит в выводе системы уравнений, описывающей гравитирующий нетопологический солитон, образованный комплексным скалярным полем. Для этого сначала рассматривается действие поля в плоском пространстве-времени, затем выполняется переход к искривлённому пространству-времени и добавляется действие Эйнштейна-Гильберта. Далее выводятся уравнение движения поля, тензор энергии-импульса и плотность энергии. В результате получается система уравнений для неизвестных функций: радиальной амплитуды поля $\phi(r)$ и метрических коэффициентов $\alpha(r)$, $a(r)$.

2 Основная часть

2.1 Комплексное скалярное поле в плоском пространстве-времени

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1),$$

то есть в плоском случае

$$ds^2 = dt^2 - d\mathrm{x}^2 - d\mathrm{y}^2 - d\mathrm{z}^2. \tag{1}$$

В плоском пространстве-времени лагранжева плотность (далее для краткости - лагранжиан) комплексного скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - U(|\varphi|^2). \tag{2}$$

Действие соответственно

$$S[\varphi] = \int d^4x \, \left(\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - U(|\varphi|^2)\right). \tag{3}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} \partial_\nu \varphi^* - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \tag{4}$$

Так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi^*, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^*)} = \partial^\mu \varphi,$$

получаем

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}. \tag{5}$$

Энергия задаётся соотношением

$$E = \int T^0_0 d^3x \tag{6}$$

Поскольку

$$\mathcal{L} = |\dot{\varphi}|^2 - |\nabla \varphi|^2 - U(|\varphi|^2),$$

имеем

$$T^0{}_0 = |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla \varphi|^2 + U(|\varphi|^2). \tag{7}$$

2.2 Ковариантизация действия и действие Эйнштена-Гильберта

Зададимся целью ковариантизировать действие поля, чтобы оно описывалось произвольной метрикой. Для этого заменим

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \qquad \eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}, \qquad d^4x \to \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Тогда действие становится

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\, \left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2) \right). \tag{8}$$

Это действие является действием материи, поскольку его динамической переменной служит поле φ, тогда как метрика $g_{\mu\nu}$ выступает как внешний фон, задающий геометрию пространства-времени. Вариация по φ даёт уравнение движения поля на заданном фоне, а вариация по $g^{\mu\nu}$ определяет тензор энергии-импульса. Обозначим его как $S_m[g,\varphi]$.

Однако одного этого действия недостаточно для определения самого внешнего фона: без отдельного действия, которое зависит только от геометрии пространства-времени, то есть от метрики и объектов, построенных из неё, вариация по метрике приводит лишь к условию $T_{\mu\nu} = 0$, а не к уравнению для метрики. Оно, в свою очередь, необходимо для описания самогравитации поля: геометрия пространства-времени должна определяться самим распределением энергии этого поля, а не задаваться заранее как внешний фон. Поэтому к S_m необходимо добавить гравитационное действие, то есть часть действия, зависящую от метрики и задающую её собственные уравнения движения.

Выбор гравитационного действия S_g должен соответствовать минимальным требованиям: локальность, общая ковариантность, зависимость только от метрики и её первых двух производных и уравнения движения не выше второго порядка. При этих условиях в четырёх измерениях объёмный гравитационный лагранжиан фактически фиксируется - остаются только космологический член и член, линейный по скалярной кривизне R. Это действие называется также действием Эйнштейна-Гильберта.

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, (R - 2\Lambda) \tag{9}$$

В результате полное действие принимает вид

$$S = S_g + S_m \tag{10}$$

2.3 Уравнение движения комплексного скалярного поля

Рассмотрим материальное действие комплексного скалярного поля

$$S_m[g,\varphi] = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2)\right), \tag{11}$$

где $g = \det g_{\mu\nu}$, а потенциал U зависит от $|\varphi|^2 = \varphi^*\varphi$.
Получим из него уравнение движения поля φ. Проварьируем действие

$$\delta S_m = \int d^4x\,\delta\left[\sqrt{-g}\,\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2)\right)\right]. \tag{12}$$

Считаем метрику фиксированной, тогда варьируется только поле. При вариации комплексного поля φ и φ^* рассматриваются как независимые переменные. Поэтому, чтобы получить уравнение движения для φ, достаточно проварьировать действие по φ^*.

$$\varphi^* \to \varphi^* + \delta\varphi^*, \qquad \delta\sqrt{-g} = 0, \qquad \delta g^{\mu\nu} = 0.$$

Отсюда

$$\delta S_m = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2)\right). \tag{13}$$

Поскольку $\delta(\partial_\mu\varphi^*) = \partial_\mu(\delta\varphi^*)$, имеем для кинетического члена

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi\right) = g^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\varphi^*)\partial_\nu\varphi.$$

Для потенциального члена получаем

$$\delta\left(-U(|\varphi|^2)\right) = -\frac{\partial U}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^*.$$

Подставляя оба результата, получаем

$$\delta S_m = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\varphi^*)\partial_\nu\varphi - \frac{\partial U}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^*\right]. \tag{14}$$

Далее имеет смысл воспользоваться тождеством для полной производной и выразить кинетическую часть следующим образом

$$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\varphi^*)\partial_\nu\varphi = \partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\,\delta\varphi^*\right) - \delta\varphi^*\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right). \tag{15}$$

Подставляем это в (14):

$$\delta S_m = \int d^4x\,\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\,\delta\varphi^*\right) - \int d^4x\,\delta\varphi^*\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) - \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\frac{\partial U}{\partial\varphi^*}\delta\varphi^*.$$

Первый интеграл является граничным членом. Если вариация $\delta\varphi^*$ обращается в нуль на границе области интегрирования или если поле достаточно быстро убывает на бесконечности, этот вклад исчезает. Тогда остаётся

$$\delta S_m = -\int d^4x\,\delta\varphi^*\left[\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) + \sqrt{-g}\,\frac{\partial U}{\partial\varphi^*}\right]. \tag{16}$$

Вариация $\delta\varphi^*$ произвольна, поэтому из условия $\delta S = 0$ следует, что подынтегральное выражение должно равняться нулю тождественно

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) + \sqrt{-g}\,\frac{\partial U}{\partial\varphi^*} = 0.$$

Делим на $\sqrt{-g}$ и получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right)+\frac{\partial U}{\partial\varphi^*}=0. \tag{17}$$

Это и есть уравнение движения поля φ в заданном внешнем гравитационном фоне.

Поскольку $U=U(|\varphi|^2)=U(\varphi^*\varphi)$, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi^*}=U'(|\varphi|^2)\varphi.$$

Поэтому уравнение можно переписать как

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right)+U'(|\varphi|^2)\varphi=0. \tag{18}$$

Аналогично, вариация по φ даёт уравнение движения для комплексно-сопряжённого поля φ^*

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi^*\right)+U'(|\varphi|^2)\varphi^*=0. \tag{19}$$

Введём обозначение

$$\Box_g\varphi\equiv\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right).$$

Это обобщение обычного оператора Д'Аламбера $\Box=\partial_\mu\partial^\mu$ на случай пространства-времени с метрикой внешнего гравитационного фона $g_{\mu\nu}$. Следовательно, уравнение принимает вид

$$\Box_g\varphi+U'(|\varphi|^2)\varphi=0. \tag{20}$$

Таким образом получается уравнение Клейна-Гордона-Фока для комплексного скалярного поля φ в искривлённом пространстве-времени.

2.4 Тензор энергии-импульса комплексного скалярного поля

Обобщим полученное в плоском пространстве выражение для тензора энергии-импульса на случай искривлённого пространства-времени. Для этого рассмотрим действие комплексного скалярного поля в метрике $g_{\mu\nu}$ и определим тензор энергии-импульса через вариацию материального действия по метрике.

Но перед этим необходимо доказать следующую формулу, называющуюся формулой Якоби. A - невырожденная матрица размера $n \times n$

$$\delta(\det A) = \det A \, \mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A). \tag{21}$$

Из свойства мультипликативности определителя следует, что

$$\det(A + \delta A) = \det A \, \det(I + A^{-1}\delta A). \tag{22}$$

Обозначим $\varepsilon = A^{-1}\delta A$. Раскроем определитель

$$\det(I + \varepsilon) = (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22}) \cdots (1 + \varepsilon_{nn}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii} + O(\varepsilon^2).$$

Но

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii} = \mathrm{Tr}\varepsilon.$$

Поэтому подставляя полученное выражение в (22) получаем

$$\det(A + \delta A) = \det A \left(1 + \mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A)\right) + O((\delta A)^2). \tag{23}$$

То есть

$$\det(A + \delta A) = \det A + \det A \, \mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A) + O((\delta A)^2).$$

С другой стороны, по определению вариации

$$\det(A + \delta A) = \det A + \delta(\det A) + O((\delta A)^2). \tag{24}$$

Сравнивая это с предыдущим выражением,

$$\det A + \delta(\det A) + O((\delta A)^2) = \det A + \det A \, \mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A) + O((\delta A)^2),$$

получаем, что линейные части должны совпадать:

$$\delta(\det A) = \det A \, \mathrm{Tr}(A^{-1}\delta A). \tag{25}$$

Тем самым получаем формулу Якоби.

Возвращаемся к материальному действию

$$S_m[g, \varphi] = \int d^4x \, \sqrt{-g} \, \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} = g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^* \partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2), \qquad g = \det(g_{\mu\nu}). \tag{26}$$

При вариации по метрике поле считаем фиксированным

$$\delta\varphi = 0, \qquad \delta\varphi^* = 0.$$

После варьирования имеем

$$\delta S_m = \int d^4x \, \left(\delta\sqrt{-g} \, \mathcal{L} + \sqrt{-g} \, \delta\mathcal{L}\right). \tag{27}$$

Потенциал U не зависит от метрики явно, поэтому $\delta U = 0$, и, следовательно,

$$\delta\mathcal{L} = \delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi. \tag{28}$$

Далее применим формулу Якоби, в которой $A = (g_{\mu\nu})$

$$\delta g = g\,\mathrm{Tr}(g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\rho}). \tag{29}$$

Обозначим матрицу

$$M^\mu{}_\rho = g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\rho}.$$

Вспоминая, что след - это сумма диагональных элементов, получаем

$$\mathrm{Tr}\,M = M^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\mu}.$$

А так как метрика симметрична, то симметрична и её вариация:

$$\delta g_{\nu\mu} = \delta g_{\mu\nu}.$$

В итоге (29) преобразуется в

$$\delta g = g\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{30}$$

Теперь получим формулу при вариации по $g_{\mu\nu}$. Из тождества

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu{}^\nu \tag{31}$$

после варьирования получаем

$$\delta g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha}\delta g^{\alpha\nu} = 0. \tag{32}$$

Домножая на $g_{\nu\beta}$, имеем

$$\delta g_{\mu\beta} + g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\nu} = 0$$

или же

$$\delta g_{\mu\beta} = -g_{\mu\alpha}g_{\lambda\beta}\delta g^{\alpha\lambda}. \tag{33}$$

Далее переименуем свободный индекс $\beta \to \nu$ и немой индекс $\lambda \to \beta$:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}\delta g^{\alpha\beta}.$$

Так как метрика симметрична, $g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$, получаем

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{34}$$

Подставим это в (30):

$$\delta g = g\,g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = g\,g^{\mu\nu}\left(-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}\right). \tag{35}$$

Так как $g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha} = \delta^\nu{}_\alpha$, получаем

$$\delta g = -g\,g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}.$$

То есть

$$\delta g = -g\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{36}$$

Рассмотрим вариацию $\sqrt{-g}$:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{d\sqrt{-g}}{dg}\,\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g. \tag{37}$$

Подставляем (36) в это выражение

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{38}$$

С учетом (28) и (38) вариация действия (26) принимает вид

$$\delta S_m = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left(\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu}. \tag{39}$$

Обозначим коэффициент при вариации метрики

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi.$$

Разложим его на сумму симметричной и антисимметричной частей:

$$A_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}, \tag{40}$$

где

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}, \qquad K_{\mu\nu} = -K_{\nu\mu}.$$

Поменяем индексы $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$A_{\nu\mu} = S_{\nu\mu} + K_{\nu\mu} = S_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}.$$

Тогда получаем систему

$$A_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}, \qquad A_{\nu\mu} = S_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}. \tag{41}$$

Складывая эти равенства, находим

$$A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = 2S_{\mu\nu},$$

откуда

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}). \tag{42}$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu} = 2K_{\mu\nu},$$

откуда

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}). \tag{43}$$

Подставляя (42) и (43) в (40), приходим к выражению

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}). \tag{44}$$

Теперь заметим, что антисимметричная часть не даёт вклада при свёртке с вариацией метрики. Действительно, поскольку вариация метрики симметрична $\delta g^{\mu\nu} = \delta g^{\nu\mu}$, имеем

$$K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})\delta g^{\mu\nu}.$$

Во втором слагаемом переименуем немые индексы $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$A_{\nu\mu}\delta g^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\delta g^{\nu\mu} = A_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Следовательно,
$$K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - A_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) = 0.$$
Значит,
$$A_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = S_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$
То есть вариация будет иметь вид
$$\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi\,\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\varphi^*\partial_\mu\varphi\right)\delta g^{\mu\nu}. \tag{45}$$
Подставляя полученное выражение в (39), имеем
$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,\left(\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\varphi^*\partial_\mu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\delta g^{\mu\nu}. \tag{46}$$
Отождествляя коэффициент при $\delta g^{\mu\nu}$ с коэффициентом в определении тензора энергии-импульса
$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{47}$$
получаем
$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\varphi^*\partial_\mu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{48}$$
Здесь
$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2).$$
И окончательно
$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\varphi^*\partial_\mu\varphi - g_{\mu\nu}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2)\right). \tag{49}$$

2.5 Солитоны и комплексное скалярное поле в условиях сферической симметрии

Пусть лагранжиан инвариантен относительно глобального фазового преобразования

$$\varphi \to e^{i\beta}\varphi, \qquad \varphi^* \to e^{-i\beta}\varphi^*, \qquad \beta = \mathrm{const}.$$

Это означает, что одновременный поворот фазы поля на один и тот же угол во всём пространстве не меняет физику системы. По теореме Нётер такой непрерывной симметрии соответствует сохраняющийся ток

$$J^\mu = -i\left(\varphi^*\nabla^\mu\varphi - \varphi\nabla^\mu\varphi^*\right), \qquad \nabla_\mu J^\mu = 0. \tag{50}$$

Поэтому соответствующий заряд Q сохраняется во времени.
Здесь и далее символ ∇_μ обозначает ковариантную производную, то есть согласованное с метрикой $g_{\mu\nu}$ обобщение обычной производной на случай криволинейных координат и искривлённого пространства-времени. Для скалярного поля ковариантная производная совпадает с обычной частной производной:

$$\nabla_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi, \qquad \nabla_\mu\varphi^* = \partial_\mu\varphi^*.$$

Однако при поднятии индекса используется метрика:

$$\nabla^\mu\varphi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\varphi = g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi.$$

Для векторного тока условие сохранения записывается в ковариантном виде:

$$\nabla_\mu J^\mu = 0,$$

что эквивалентно

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,J^\mu\right) = 0.$$

Солитон - это локализованная конфигурация поля с конечной энергией, представляющая собой пространственный сгусток энергии, который по своему поведению схож с частицей. Его структура характеризуется определённым механизмом устойчивости, в зависимости от природы которого солитоны классифицируются на топологические и нетопологические.

У топологических солитонов устойчивость связана с нетривиальной топологией конфигурации поля. Например, поле может иметь разные значения на пространственной бесконечности или обладать ненулевым числом намотки. В этом случае солитон нельзя непрерывно деформировать в вакуум, не нарушив граничные условия.

Нетопологический солитон устроен иначе. Его устойчивость не связана с топологическим классом конфигурации. В случае Q-шара устойчивость возникает потому, что при фиксированном сохраняющемся заряде Q локализованное состояние может иметь меньшую энергию, чем набор свободных квантов поля с тем же зарядом:

$$E(Q) < mQ. \tag{51}$$

Комплексное скалярное поле можно записать в полярной форме

$$\varphi(x) = A(x)e^{i\chi(x)}, \tag{52}$$

где $A(x) = |\varphi(x)|$ — амплитуда поля, а $\chi(x)$ — его фаза.
Подставим $\varphi = Ae^{i\chi}$ в (50). Имеем

$$\nabla^\mu\varphi = e^{i\chi}\left(\nabla^\mu A + iA\nabla^\mu\chi\right), \tag{53}$$

а для комплексно-сопряжённого поля

$$\nabla^\mu \varphi^* = e^{-i\chi} \left(\nabla^\mu A - iA\nabla^\mu \chi \right). \tag{54}$$

Тогда

$$\varphi^* \nabla^\mu \varphi = A\nabla^\mu A + iA^2 \nabla^\mu \chi, \qquad \varphi \nabla^\mu \varphi^* = A\nabla^\mu A - iA^2 \nabla^\mu \chi. \tag{55}$$

Вычитая эти выражения, получаем

$$\varphi^* \nabla^\mu \varphi - \varphi \nabla^\mu \varphi^* = 2iA^2 \nabla^\mu \chi.$$

Следовательно,

$$J^\mu = 2A^2 \nabla^\mu \chi. \tag{56}$$

Отсюда видно, что ток, а значит и заряд Q, связан с изменением фазы поля. Если фаза постоянна, то $\nabla^\mu \chi = 0$, и ток обращается в нуль:

$$J^\mu = 0.$$

Поэтому для конфигурации с ненулевым зарядом Q фаза поля должна изменяться. Для основного состояния, то есть состояния минимальной энергии при фиксированном заряде Q, выбирается наиболее простой случай - равномерное вращение фазы во времени:

$$\chi(t) = \omega t. \tag{57}$$

Тогда поле имеет вид

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) e^{i\omega t}. \tag{58}$$

Рассматривая основное состояние, мы не учитываем пространственное вращение солитона, поэтому у конфигурации нет выделенной пространственной оси. В этом случае амплитуда поля зависит только от расстояния до центра:

$$A(\mathbf{x}) = \phi(r).$$

В результате поле можно записать в виде

$$\varphi(t, r) = \phi(r) e^{i\omega t}. \tag{59}$$

Обратим внимание, что несмотря на явную зависимость поля от времени, его модуль не зависит от времени:

$$|\varphi(t, r)|^2 = \varphi^*(t, r)\varphi(t, r) = \phi e^{-i\omega t} \phi e^{i\omega t} = \phi^2(r). \tag{60}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\partial_t \varphi|^2 &= \partial_t \varphi^* \partial_t \varphi = (-i\omega\phi(r)e^{-i\omega t})(i\omega\phi(r)e^{i\omega t}) = \omega^2 \phi^2(r), \\ |\partial_r \varphi|^2 &= \partial_r \varphi^* \partial_r \varphi = (\phi'(r)e^{-i\omega t})(\phi'(r)e^{i\omega t}) = \phi'^2(r). \end{aligned} \tag{61}$$

Следовательно, величины, входящие в тензор энергии-импульса (49), не зависят от времени. Поэтому тензор энергии-импульса является статическим.

2.6 Статическая сферически-симметричная метрика

Теперь перейдём к выбору метрики. Поскольку рассматривается самогравитирующий солитон, пространство-время уже нельзя считать заранее заданным плоским фоном. Метрика определяется уравнениями Эйнштейна (92), где источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Как было показано выше, несмотря на явную временную зависимость поля, тензор энергии-импульса выбранной конфигурации не зависит от времени. Кроме того, амплитуда поля зависит только от радиальной координаты, поэтому источник является сферически-симметричным. Следовательно, метрику удобнее всего искать в статическом сферически-симметричном виде.

В плоском пространстве-времени в декартовых координатах метрика Минковского имеет вид (1). Для сферически-симметричной конфигурации удобно перейти к сферическим координатам

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \qquad y = r\sin\theta\sin\psi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{62}$$

Тогда

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2).$$

Поэтому плоская метрика принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2). \tag{63}$$

Для статического сферически-симметричного пространства-времени коэффициенты при dt^2 и dr^2 могут зависеть от r. Поэтому при учёте гравитации метрика примет вид

$$ds^2 = \alpha^2(r)dt^2 - a^2(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2). \tag{64}$$

В координатах (t, r, θ, ψ) компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^2(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{65}$$

2.7 Плотность энергии гравитирующего солитона

Наконец, получим выражение для плотности вещества. В рассматриваемой модели роль вещества играет само комплексное скалярное поле, поэтому под плотностью вещества подразумевается плотность энергии этого поля. В плоском пространстве-времени плотность энергии поля задаётся временной компонентой тензора энергии-импульса

$$\rho = T^0{}_0. \tag{66}$$

В искривлённом пространстве-времени плотность энергии, измеряемая наблюдателем, получается проекцией тензора энергии-импульса на четырёхскорость этого наблюдателя

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \tag{67}$$

Рассмотрим статического наблюдателя, находящегося при постоянных r, θ, ψ. Это означает, что для него $dr = d\theta = d\psi = 0$. Следовательно, его четырёхскорость имеет только временную компоненту

$$u^\mu = (u^t, 0, 0, 0). \tag{68}$$

Собственное время $d\tau$ это время, измеряемое часами, находящимися вместе с наблюдателем. Для массивного наблюдателя квадрат интервала равен квадрату собственного времени

$$ds^2 = d\tau^2. \tag{69}$$

Для метрики (64) следует

$$d\tau^2 = ds^2 = \alpha^2(r) dt^2.$$

Значит,

$$d\tau = \alpha(r) dt. \tag{70}$$

По определению четырёхскорость равна

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \tag{71}$$

Поэтому для временной компоненты скорости имеем

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha(r)}. \tag{72}$$

Поскольку ненулевая только компонента u^t, получим выражение для плотности энергии (67):

$$\rho(r) = T_{tt}(u^t)^2 = \frac{T_{tt}}{\alpha^2(r)}. \tag{73}$$

Так как $x^0 = t$, можно также писать $T_{tt} = T_{00}$. Поэтому

$$\rho(r) = \frac{T_{00}}{\alpha^2(r)}. \tag{74}$$

В выбранной метрике смешанная временная компонента имеет вид

$$T^t{}_t = g^{tt} T_{tt} = \frac{T_{tt}}{\alpha^2(r)}.$$

Следовательно,

$$\rho(r) = T^t{}_t = T^0{}_0. \tag{75}$$

Найдём временную компоненту тензора-энергии импульса (49) в метрике (65). Напомним, что лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi - U(|\varphi|^2). \tag{76}$$

Обратные компоненты статической сферически-симметричной метрики:

$$\begin{aligned} g^{tt} &= \frac{1}{\alpha^2(r)}, \quad g^{rr} = -\frac{1}{a^2(r)}, \\ g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{r^2}, \quad g^{\psi\psi} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{77}$$

Поле имеет вид

$$\varphi(t,r) = \phi(r)e^{i\omega t}. \tag{78}$$

Тогда с учётом уравнений (60), (61) и вида амплитуды поля $\phi = \phi(r)$, из которого следует, что

$$\partial_\theta\varphi = 0, \qquad \partial_\psi\varphi = 0, \tag{79}$$

выходит выражение

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi = g^{tt}\partial_t\varphi^*\partial_t\varphi + g^{rr}\partial_r\varphi^*\partial_r\varphi = \frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)} - \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)}. \tag{80}$$

Значит,

$$\mathcal{L} = \frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)} - \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} - U(\phi^2(r)). \tag{81}$$

Теперь вычислим T_{tt}. Общая формула:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi^*\partial_\nu\varphi + \partial_\nu\varphi^*\partial_\mu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{82}$$

Для $\mu = \nu = t$:

$$T_{tt} = 2\partial_t\varphi^*\partial_t\varphi - g_{tt}\mathcal{L}. \tag{83}$$

Так как

$$\partial_t\varphi^*\partial_t\varphi = \omega^2\phi^2(r), \qquad g_{tt} = \alpha^2(r), \tag{84}$$

имеем

$$T_{tt} = 2\omega^2\phi^2(r) - \alpha^2(r)\left(\frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)} - \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} - U(\phi^2(r))\right). \tag{85}$$

Раскрывая скобки и деля на $\alpha^2(r)$, получаем

$$\rho(r) = \frac{T_{tt}}{\alpha^2(r)} = \frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} + U(\phi^2(r)). \tag{86}$$

Это и есть плотность вещества гравитирующего нетопологического солитона. Её можно представить в виде суммы трёх частей:

$$\rho(r) = \rho_{\text{time}} + \rho_{\text{grad}} + \rho_{\text{pot}}, \tag{87}$$

где

$$\rho_{\text{time}} = \frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)}, \qquad \rho_{\text{grad}} = \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)}, \qquad \rho_{\text{pot}} = U(\phi^2(r)). \tag{88}$$

Первое слагаемое связано с временной зависимостью фазы комплексного поля, второе - с пространственным изменением его амплитуды, а третье соответствует потенциальной энергии поля.

2.8 Система уравнений для метрических коэффициентов $\alpha(r)$ и $a(r)$

Получим систему уравнений для нахождения метрических коэффициентов. Для этого, для начала, получим уравнения Эйнштейна. Согласно разделу 2.2 гравитационное действие имеет вид

$$S_g = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda). \tag{89}$$

Полное действие записывается как

$$S[g,\varphi] = S_g[g] + S_m[g,\varphi]. \tag{90}$$

Варьирование по метрике даёт уравнения Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{91}$$

Для изолированного гравитирующего солитона разумнее всего рассмотреть асимптотически плоский случай, поэтому далее положим

$$\Lambda = 0.$$

Тогда уравнения Эйнштейна примут вид:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{92}$$

Асимптотически плоский случай подразумевает, что далеко от объекта гравитационное поле становится всё слабее, пространство-время становится плоским, поэтому метрика стремится к метрике Минковского:

$$\alpha(r) \to 1, \qquad a(r) \to 1 \qquad \text{при } r \to \infty.$$

Физически этот случай удобно рассматривать потому, что мы хотим описать изолированный солитон, а не объект, находящийся во внешнем космологическом поле или в заранее искривлённом пространстве-времени. Поэтому вдали от него должно быть пустое плоское пространство.

Для нахождения метрических функций $\alpha(r)$ и $a(r)$ рассмотрим временную и радиальную компоненты уравнений Эйнштейна.

$$G_{tt} = 8\pi G\, T_{tt}, \tag{93}$$

$$G_{rr} = 8\pi G\, T_{rr}. \tag{94}$$

Далее удобно перейти к смешанным компонентам. Для временной компоненты имеем

$$G^t{}_t = g^{tt} G_{tt}, \qquad T^t{}_t = g^{tt} T_{tt}. \tag{95}$$

Из $g^{tt} = 1/\alpha^2$ следует

$$G^t{}_t = 8\pi G\, T^t{}_t. \tag{96}$$

Аналогично, для радиальной компоненты

$$G^r{}_r = g^{rr} G_{rr}, \qquad T^r{}_r = g^{rr} T_{rr}. \tag{97}$$

Так как $g^{rr} = -1/a^2$, получаем

$$G^r{}_r = 8\pi G\, T^r{}_r. \tag{98}$$

Временная компонента получена из соотношений (75) и (86). Найдём радиальную компоненту тензора энергии-импульса. Из (82) при $\mu = \nu = r$ имеем

$$T_{rr} = 2\partial_r\varphi^*\partial_r\varphi - g_{rr}\mathcal{L}. \tag{99}$$

Так как

$$\partial_r\varphi^*\partial_r\varphi = \phi'^2, \qquad g_{rr} = -a^2, \tag{100}$$

то

$$T_{rr} = 2\phi'^2 + a^2\mathcal{L}. \tag{101}$$

Подставляя (81) и раскрывая скобки, получаем

$$T_{rr} = \phi'^2 + \frac{a^2\omega^2\phi^2}{\alpha^2} - a^2U(\phi^2). \tag{102}$$

После поднятия первого индекса имеем

$$T^r{}_r = -\frac{1}{a^2}\left(\phi'^2 + \frac{a^2\omega^2\phi^2}{\alpha^2} - a^2U(\phi^2)\right). \tag{103}$$

Следовательно,

$$T^r{}_r = -\frac{\phi'^2}{a^2} - \frac{\omega^2\phi^2}{\alpha^2} + U(\phi^2). \tag{104}$$

Это выражение удобно записать как

$$T^r{}_r = -p_r, \tag{105}$$

где

$$p_r(r) = \frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} - U(\phi^2(r)). \tag{106}$$

Величина p_r называется радиальным давлением.
Таким образом, правые части смешанных уравнений Эйнштейна принимают вид

$$T^t{}_t = \rho, \qquad T^r{}_r = -p_r. \tag{107}$$

Поэтому (96) и (98) переписываются как

$$G^t{}_t = 8\pi G\,\rho, \qquad G^r{}_r = -8\pi G\,p_r. \tag{108}$$

Следующим шагом вычислим левые части уравнений (108), то есть смешанные компоненты $G^t{}_t$ и $G^r{}_r$. Тензор Эйнштейна определяется как

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \tag{109}$$

Здесь $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, а R — скалярная кривизна.
По метрике построим символы Кристоффеля:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right). \tag{110}$$

Символы Кристоффеля задают связность Леви-Чивиты, то есть правило ковариантного дифференцирования. Они не являются тензором, поскольку при замене координат преобразуются неоднородно. Геометрически они описывают изменение координатного базиса

от точки к точке.
Далее из символов Кристоффеля строится тензор Римана:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{111}$$

Он характеризует кривизну пространства-времени. Если параллельно перенести вектор по замкнутому контуру в искривлённом пространстве, он не вернется в исходное положение. Тензор Римана как раз измеряет это отклонение.
Свёрткой тензора Римана получается тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}. \tag{112}$$

Тензор Риччи содержит информацию о той части кривизны, которая связана с изменением объёма малой области пространства-времени при движении по геодезическим. Иными словами, если рассмотреть малый пучок свободно падающих частиц, то тензор Риччи описывает, как этот пучок сжимается или расширяется под действием гравитационного поля.
Ещё одной свёрткой получается скалярная кривизна:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{113}$$

Вычислим символы Кристоффеля по формуле (110). В координатах (t, r, θ, ψ) компоненты метрического тензора и компоненты обратной метрики равны (65) и (77). Так как метрика диагональна и функции $\alpha(r)$, $a(r)$ зависят только от радиуса, большинство компонент обращается в нуль. Приведём вывод всех ненулевых значений.
Здесь и далее штрих означает производную по радиусу:

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dr}, \qquad a' = \frac{da}{dr}. \tag{114}$$

Для компоненты Γ^{t}_{tr} имеем

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{1}{2} g^{t\sigma} \left(\partial_t g_{\sigma r} + \partial_r g_{\sigma t} - \partial_\sigma g_{tr} \right). \tag{115}$$

Ненулевой вклад возникает только при $\sigma = t$. Тогда

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{1}{2} g^{tt} \partial_r g_{tt}. \tag{116}$$

Поскольку

$$g^{tt} = \frac{1}{\alpha^2}, \qquad g_{tt} = \alpha^2, \qquad \partial_r g_{tt} = 2\alpha\alpha', \tag{117}$$

получаем

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2} 2\alpha\alpha' = \frac{\alpha'}{\alpha}. \tag{118}$$

Из симметрии нижних индексов следует

$$\Gamma^{t}_{tr} = \Gamma^{t}_{rt}. \tag{119}$$

Для компоненты Γ^{r}_{tt}:

$$\Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2} g^{r\sigma} \left(\partial_t g_{\sigma t} + \partial_t g_{\sigma t} - \partial_\sigma g_{tt} \right). \tag{120}$$

Так как метрика не зависит от времени, первые два слагаемых равны нулю. Ненулевой вклад даёт только $\sigma = r$:

$$\Gamma^{r}_{tt} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt}. \tag{121}$$

С учётом
$$g^{rr} = -\frac{1}{a^2}, \qquad \partial_r g_{tt} = 2\alpha\alpha', \tag{122}$$
получаем
$$\Gamma^r_{tt} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)2\alpha\alpha' = \frac{\alpha\alpha'}{a^2}. \tag{123}$$
Для компоненты Γ^r_{rr}:
$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}\right) = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr}. \tag{124}$$
Так как
$$g_{rr} = -a^2, \qquad \partial_r g_{rr} = -2aa', \qquad g^{rr} = -\frac{1}{a^2}, \tag{125}$$
то
$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)(-2aa') = \frac{a'}{a}. \tag{126}$$
Для компоненты $\Gamma^r_{\theta\theta}$:
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\theta\theta}. \tag{127}$$
Поскольку
$$g_{\theta\theta} = -r^2, \qquad \partial_r g_{\theta\theta} = -2r, \qquad g^{rr} = -\frac{1}{a^2}, \tag{128}$$
имеем
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a^2}\right)(-2r) = -\frac{r}{a^2}. \tag{129}$$
Аналогично для угловой компоненты $\Gamma^\theta_{r\theta}$:
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}. \tag{130}$$
Так как
$$g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \partial_r g_{\theta\theta} = -2r, \tag{131}$$
получаем
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)(-2r) = \frac{1}{r}. \tag{132}$$
Из симметрии нижних индексов также
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r}. \tag{133}$$
Для компоненты $\Gamma^\theta_{\psi\psi}$:
$$\Gamma^\theta_{\psi\psi} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_\theta g_{\psi\psi}. \tag{134}$$
Поскольку
$$g_{\psi\psi} = -r^2\sin^2\theta, \qquad \partial_\theta g_{\psi\psi} = -2r^2\sin\theta\cos\theta, \qquad g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}, \tag{135}$$
получаем
$$\Gamma^\theta_{\psi\psi} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(-2r^2\sin\theta\cos\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta. \tag{136}$$
Для компоненты $\Gamma^\psi_{\theta\psi}$:
$$\Gamma^\psi_{\theta\psi} = \frac{1}{2}g^{\psi\psi}\partial_\theta g_{\psi\psi}. \tag{137}$$

Так как

$$g^{\psi\psi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}, \qquad \partial_\theta g_{\psi\psi} = -2r^2 \sin\theta\cos\theta, \tag{138}$$

то

$$\Gamma^{\psi}_{\theta\psi} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\left(-2r^2\sin\theta\cos\theta\right) = \cot\theta. \tag{139}$$

Итак, все ненулевые символы Кристоффеля, необходимые для вычисления тензора Риччи, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{\alpha\alpha'}{a^2}, \qquad \Gamma^r_{rr} = \frac{a'}{a},\\
&\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{a^2}, \qquad \Gamma^r_{\psi\psi} = -\frac{r\sin^2\theta}{a^2}, \qquad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r},\\
&\Gamma^\psi_{r\psi} = \Gamma^\psi_{\psi r} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\psi\psi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\psi_{\theta\psi} = \Gamma^\psi_{\psi\theta} = \cot\theta.
\end{aligned} \tag{140}$$

Остальные компоненты либо равны нулю, либо получаются из симметрии

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}. \tag{141}$$

Подставляя (140) в определение тензора Риччи (112), получаем

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{\alpha}{a^2}\left(\alpha'' - \frac{a'}{a}\alpha' + \frac{2}{r}\alpha'\right),\\
R_{rr} &= -\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{a'\alpha'}{a\alpha} + \frac{2a'}{ra},\\
R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{a^2} - \frac{r\alpha'}{a^2\alpha} + \frac{ra'}{a^3},\\
R_{\psi\psi} &= \sin^2\theta\, R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{142}$$

Скалярная кривизна равна

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{143}$$

Для выбранной метрики она принимает вид

$$R = \frac{2\alpha''}{a^2\alpha} - \frac{2a'\alpha'}{a^3\alpha} + \frac{4\alpha'}{ra^2\alpha} - \frac{4a'}{ra^3} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2a^2}. \tag{144}$$

Вычислим временную смешанную компоненту тензора Эйнштейна. По определению

$$G^t{}_t = g^{tt}G_{tt}. \tag{145}$$

Так как

$$g^{tt} = \frac{1}{\alpha^2}, \tag{146}$$

из (109) следует

$$G^t{}_t = \frac{R_{tt}}{\alpha^2} - \frac{1}{2}R. \tag{147}$$

Подставляя (142) и (144) в это выражение, получаем

$$G^t{}_t = \left(\frac{\alpha''}{a^2\alpha} - \frac{a'\alpha'}{a^3\alpha} + \frac{2\alpha'}{ra^2\alpha}\right) - \left(\frac{\alpha''}{a^2\alpha} - \frac{a'\alpha'}{a^3\alpha} + \frac{2\alpha'}{ra^2\alpha} - \frac{2a'}{ra^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2a^2}\right). \tag{148}$$

После сокращения одинаковых членов остаётся

$$G^t{}_t = \frac{2a'}{ra^3} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2a^2}. \tag{149}$$

Следовательно,

$$\boxed{G^t{}_t = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{2a'}{ra^3}.} \tag{150}$$

Теперь получим уравнение для радиальной смешанной компоненты. Имеем

$$G^r{}_r = g^{rr} G_{rr}. \tag{151}$$

Так как

$$g^{rr} = -\frac{1}{a^2}, \tag{152}$$

из (109) аналогично будет следовать

$$G^r{}_r = -\frac{1}{a^2}\left(R_{rr} + \frac{1}{2}a^2 R\right). \tag{153}$$

Подставляя (142) и (144), получаем

$$R_{rr} + \frac{1}{2}a^2 R = \frac{2\alpha'}{r\alpha} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}. \tag{154}$$

Поэтому

$$G^r{}_r = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2 r^2} - \frac{2\alpha'}{r\alpha a^2}. \tag{155}$$

Итак,

$$\boxed{G^r{}_r = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{2\alpha'}{r\alpha a^2}.} \tag{156}$$

Подставляя (150) и (156) в смешанные компоненты уравнений Эйнштейна (108) получаем два уравнения:

$$\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{2a'}{ra^3} = 8\pi G\,\rho, \tag{157}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{2\alpha'}{r\alpha a^2} = -8\pi G\,p_r. \tag{158}$$

Первое из этих уравнений определяет метрический коэффициент $a(r)$. Чтобы переписать его в более наглядном виде, заметим, что вдали от локализованного сферически-симметричного источника метрика должна стремиться к метрике Шварцшильда. В этой метрике радиальный коэффициент имеет вид

$$\frac{1}{a^2(r)} = 1 - \frac{2GM}{r}, \tag{159}$$

где M — полная масса источника.

Если же масса распределена по радиусу, как в случае гравитирующего нетопологического солитона, то вместо постоянной массы M удобно ввести массовую функцию $M(r)$:

$$\frac{1}{a^2(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{r}. \tag{160}$$

Физически $M(r)$ имеет смысл массы-энергии, заключённой внутри сферы радиуса r. В пределе $r \to \infty$ она стремится к полной массе солитона:

$$M_{\mathrm{sol}} = \lim_{r\to\infty} M(r). \tag{161}$$

Обозначим
$$f(r) = \frac{1}{a^2(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{r}.$$
Тогда, с одной стороны,
$$G^t{}_t = \frac{1-f}{r^2} - \frac{f'}{r}. \tag{162}$$
С другой стороны,
$$1 - f(r) = \frac{2GM(r)}{r}, \tag{163}$$
а производная равна
$$f'(r) = -\frac{2GM'(r)}{r} + \frac{2GM(r)}{r^2}. \tag{164}$$
Тогда $G^t{}_t$ будет иметь вид
$$G^t{}_t = \frac{2GM(r)}{r^3} - \left(-\frac{2GM'(r)}{r^2} + \frac{2GM(r)}{r^3}\right). \tag{165}$$
Слагаемые с $M(r)$ сокращаются, и остаётся
$$G^t{}_t = \frac{2GM'(r)}{r^2}. \tag{166}$$
Подставляя эти выражения в (157), получаем
$$\frac{2GM'(r)}{r^2} = 8\pi G\,\rho(r). \tag{167}$$
Откуда находим уравнение для массовой функции:
$$\boxed{M'(r) = 4\pi r^2\rho(r).} \tag{168}$$
А радиальный метрический коэффициент $a(r)$ восстанавливается из определения массовой функции:
$$\boxed{a(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1/2}.} \tag{169}$$
Наконец, из радиального уравнения (158) найдём уравнение для $\alpha(r)$. Используя
$$1 - \frac{1}{a^2} = \frac{2GM}{r}, \tag{170}$$
получаем
$$\frac{2GM}{r^3} - \frac{2\alpha'}{r\alpha a^2} = -8\pi G p_r. \tag{171}$$
Отсюда
$$\boxed{\frac{\alpha'}{\alpha} = Ga^2\left(\frac{M}{r^2} + 4\pi r\,p_r\right).} \tag{172}$$

Уравнение для плотности энергии поля (86) также содержит неизвестную амплитуду поля $\phi(r)$. Поэтому одних уравнений для метрических функций недостаточно: система должна быть дополнена уравнением движения скалярного поля. Для этого используем уравнение Клейна-Гордона-Фока
$$\Box_g\varphi + U'(|\varphi|^2)\varphi = 0, \tag{173}$$

где
$$\Box_g\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right). \tag{174}$$
Метрика имеет вид (65), поэтому
$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \alpha^2(r)\cdot\left[-a^2(r)\right]\cdot(-r^2)\cdot\left[-r^2\sin^2\theta\right]. \tag{175}$$
Следовательно,
$$\sqrt{-g} = \alpha(r)a(r)r^2\sin\theta. \tag{176}$$
Подставляя в уравнение Клейна-Гордона-Фока вид поля (78), а также учитывая (60), (61), (79) получаем
$$-\frac{\omega^2}{\alpha^2}\phi - \frac{1}{\alpha a r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha r^2}{a}\phi'\right) + U'(\phi^2)\phi = 0. \tag{177}$$
Раскрывая производную,
$$\frac{1}{\alpha a r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\alpha r^2}{a}\phi'\right) = \frac{1}{a^2}\left[\phi'' + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{2}{r} - \frac{a'}{a}\right)\phi'\right]. \tag{178}$$
Подставляя и умножая на $-a^2$, получаем
$$\boxed{\phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{a'}{a}\right)\phi' + a^2\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - U'(\phi^2)\right)\phi = 0.} \tag{179}$$
Для записи замкнутой системы удобно выразить величину a'/a через $M(r)$ и $\rho(r)$. Из определения
$$\frac{1}{a^2} = 1 - \frac{2GM}{r} \tag{180}$$
получаем
$$a^{-2} = 1 - \frac{2GM}{r}. \tag{181}$$
Дифференцируем:
$$-2a^{-3}a' = -\frac{2GM'}{r} + \frac{2GM}{r^2}. \tag{182}$$
Умножаем на $-a^2/2$:
$$\frac{a'}{a} = a^2\left(\frac{GM'}{r} - \frac{GM}{r^2}\right). \tag{183}$$
Используем
$$M' = 4\pi r^2\rho. \tag{184}$$
Тогда
$$\boxed{\frac{a'}{a} = Ga^2\left(4\pi r\rho - \frac{M}{r^2}\right).} \tag{185}$$

Резюмируя полученные уравнения, задача построения гравитирующего нетопологического солитона сводится к совместному определению комплексного скалярного поля и соответствующей ему статической сферически-симметричной метрики. После задания сферически-симметричного вида поля и метрики неизвестными остаются амплитуда скалярного поля $\phi(r)$ и метрические функции $\alpha(r)$, $a(r)$.

Вместо функции $a(r)$ удобно ввести массовую функцию $M(r)$. Тогда после решения уравнения для $M(r)$ радиальная метрическая функция восстанавливается как
$$a(r) = \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1/2}. \tag{186}$$

После введения массовой функции задача сводится к нахождению трёх функций:

$$\phi(r), \qquad M(r), \qquad \alpha(r).$$

Итоговая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r), \\ \dfrac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} = G a^2(r) \left(\dfrac{M(r)}{r^2} + 4\pi r \, p_r(r) \right), \\ \phi''(r) + \left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} - \dfrac{a'(r)}{a(r)} \right) \phi'(r) + a^2(r) \left(\dfrac{\omega^2}{\alpha^2(r)} - U'(\phi^2(r)) \right) \phi(r) = 0, \\ a(r) = \left(1 - \dfrac{2GM(r)}{r} \right)^{-1/2}, \\ \dfrac{a'(r)}{a(r)} = G a^2(r) \left(4\pi r \, \rho(r) - \dfrac{M(r)}{r^2} \right), \\ \rho(r) = \dfrac{\omega^2 \phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \dfrac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} + U(\phi^2(r)), \\ p_r(r) = \dfrac{\omega^2 \phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \dfrac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} - U(\phi^2(r)). \end{cases} \tag{187}$$

Граничные условия для гладкого локализованного решения задаются как

$$M(0) = 0, \qquad \phi(0) = \phi_0, \qquad \phi'(0) = 0, \qquad \phi(\infty) = 0, \qquad \alpha(\infty) = 1.$$

Условие $M(0) = 0$ означает отсутствие массы внутри нулевого радиуса. Условие $\phi'(0) = 0$ отражает гладкость сферически-симметричного распределения поля в центре. Условие $\phi(\infty) = 0$ задаёт локализацию поля. Условие $\alpha(\infty) = 1$ фиксирует нормировку времени на бесконечности и является частью требования асимптотической плоскости: при $r \to \infty$ метрика должна стремиться к метрике Минковского.

3 Заключение

В ходе работы были выполнены следующие шаги:

1. рассмотрено комплексное скалярное поле в плоском пространстве-времени, записано его действие и получено выражение для тензора энергии-импульса;

2. выполнен переход к искривлённому пространству-времени и добавлено гравитационное действие Эйнштейна-Гильберта;

3. получены уравнение Клейна-Гордона-Фока и обобщённый тензор энергии-импульса комплексного скалярного поля в искривлённом пространстве-времени;

4. рассмотрена глобальная фазовая симметрия поля, связанный с ней сохраняющийся ток Нётер и объяснена возможность существования нетопологических солитонов с ненулевым зарядом;

5. рассмотрен вид комплексного поля с равномерно вращающейся во времени фазой и радиально зависящей амплитудой:
$$\varphi(t,r) = \phi(r)e^{i\omega t};$$

6. обоснован выбор статической сферически-симметричной метрики и записан её вид;

7. получено выражение для плотности энергии скалярного поля в выбранной статической сферически-симметричной метрике;

8. из уравнений Эйнштейна и уравнения Клейна-Гордона-Фока получена система уравнений для метрических функций и радиальной амплитуды поля.

Основными итогами работы являются получение выражения для плотности энергии поля и вывод замкнутой системы уравнений для амплитуды поля $\phi(r)$ и метрических коэффициентов $\alpha(r)$, $a(r)$.
Для поля
$$\varphi(t,r) = \phi(r)e^{i\omega t}$$
и метрики
$$ds^2 = \alpha^2(r)dt^2 - a^2(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)$$
плотность энергии принимает вид
$$\rho(r) = \frac{\omega^2\phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \frac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} + U(\phi^2(r)).$$
Для совместного нахождения амплитуды поля и метрических функций полученная систе-

ма записывается в виде

$$
\begin{cases}
M'(r) = 4\pi r^2 \rho(r), \\
\dfrac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} = G a^2(r) \left(\dfrac{M(r)}{r^2} + 4\pi r\, p_r(r) \right), \\
\phi''(r) + \left(\dfrac{2}{r} + \dfrac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} - \dfrac{a'(r)}{a(r)} \right) \phi'(r) + a^2(r) \left(\dfrac{\omega^2}{\alpha^2(r)} - U'(\phi^2(r)) \right) \phi(r) = 0, \\
a(r) = \left(1 - \dfrac{2GM(r)}{r} \right)^{-1/2}, \\
\dfrac{a'(r)}{a(r)} = G a^2(r) \left(4\pi r\, \rho(r) - \dfrac{M(r)}{r^2} \right), \\
\rho(r) = \dfrac{\omega^2 \phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \dfrac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} + U(\phi^2(r)), \\
p_r(r) = \dfrac{\omega^2 \phi^2(r)}{\alpha^2(r)} + \dfrac{\phi'^2(r)}{a^2(r)} - U(\phi^2(r)).
\end{cases}
$$

Для получения гладкого локализованного решения система дополняется граничными условиями

$$
M(0) = 0, \qquad \phi(0) = \phi_0, \qquad \phi'(0) = 0, \qquad \phi(\infty) = 0, \qquad \alpha(\infty) = 1.
$$

Работа опирается на сведения о комплексном скалярном поле, глобальной фазовой симметрии, сохраняющемся заряде и нетопологических солитонах [1]. Введение действия Эйнштейна-Гильберта и получение из него уравнений Эйнштейна вариационным методом рассматривались с опорой на [2]. Статья [3] использовался для обоснования того, что при стандартных требованиях к гравитационным уравнениям в четырёх измерениях естественно возникает тензор Эйнштейна и космологический член. Выбор вида поля с вращающейся фазой, а также статической сферически-симметричной метрики соответствует подходу, используемому при описании гравитирующих комплексных скалярных полей и бозонных звёзд [4].

Автором в работе были выполнены все основные вычисления: ковариантизация действия, вариационный вывод уравнения движения поля и тензора энергии-импульса, вычисление плотности энергии для выбранного вида поля и метрики, а также получение итоговой системы уравнений для функций $\phi(r)$, $\alpha(r)$, $a(r)$ и $M(r)$. В использованной литературе такая система уравнений для гравитирующего нетопологического солитона в выбранных обозначениях не приводится. Поэтому она была впервые получена автором в данной работе.

Список литературы

[1] Рубаков В. А. *Классические калибровочные поля.* М.: URSS, 1999.

[2] Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Petrov V. A. How Were the Hilbert–Einstein Equations Discovered? // *Physics-Uspekhi.* 2004. Vol. 47, No. 6. P. 607–621. DOI: 10.1070/PU2004v047n06ABEH001817. arXiv:physics/0405075.

[3] Lovelock D. The Einstein Tensor and Its Generalizations // *Journal of Mathematical Physics.* 1971. Vol. 12, No. 3. P. 498–501. DOI: 10.1063/1.1665613.

[4] Liebling S. L., Palenzuela C. Dynamical Boson Stars // *Living Reviews in Relativity.* 2012. Vol. 15. Article 6. DOI: 10.12942/lrr-2012-6.