Функциональный интеграл в квантовой механике

Курсовая работа

Дорожкина Мария Павловна

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Москва, 2026

Научный руководитель: ст. н. с. Демидов Сергей Владимирович

Введение

Традиционно изучение квантовой механики начинается с гамильтонова формализма (уравнение Шрёдингера или матричной механики Гейзенберга). В 1948 году Ричард Фейнман, опираясь на идеи Поля Дирака, предложил принципиально новый подход — **метод функционального интеграла** (интеграла по траекториям).

Суть метода: В квантовой механике частица «исследует» *все возможные* пути между начальной точкой (x_0, t_0) и конечной точкой (x_N, t_N). Амплитуда перехода:

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}[x(t)] \, \Big|_{x_0}^{x_N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right)$$

где $S[x(t)]$ — классическое действие.

Применение и преимущества

Области применения:

- Квантовая теория поля (диаграммы Фейнмана).
- Статистическая физика.
- Теория струн и физика конденсированного состояния.

Преимущества:

1. Явная лоренц-инвариантность.
2. Естественный классический предел.
3. Удобная работа с симметриями.

Эволюция системы

Рассмотрим систему с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t)$$

Матричный элемент оператора эволюции с использованием функционального интеграла записывается так:

$$\langle x_f | \hat{U}(T, 0) | x_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[x(t)] \, \Big|_{x_i}^{x_f} \, \exp\left(i \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x, t) \right] dt \right)$$

$\mathcal{N} = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \omega}}\right)^N$, $\mathcal{D}[x(t)] = \lim_{N\to\infty} dx_1 \ldots dx_{N-1}$ — функциональная мера

Энергия основного состояния осциллятора

Вычислим $\mathcal{I} \equiv \langle \psi_0 | e^{-\hat{H}T} | \psi_0 \rangle$ в евклидовом времени ($t = -iT$).

$$\mathcal{I} = \mathcal{H} \int dx_1 \dots dx_{N+1} \psi_0^*(x_{N+1}) \psi_0(x_1) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=2}^{N+1} \exp\left\{ -\frac{m(x_i - x_{i-1})^2}{2\Delta T} - \frac{m\omega^2 (x_i + x_{i-1})^2 \Delta T}{8} \right\}$$

Используя $\psi_0(x) = \mathcal{A} \exp(-\frac{m\omega}{2} x^2)$, после пошагового интегрирования по $x_1, x_2 ...$ получаем:

$$\mathcal{I} = \left(1 + \frac{\omega \Delta T}{2}\right)^{-N} \xrightarrow[N \to \infty]{} e^{-\frac{\omega}{2} T} = e^{-E_0 T}$$

Результат: $E_0 = \frac{\omega}{2}$.

Вероятности перехода между состояниями под действиемм силы

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} + \hat{x}F(t),$$

Замена $x(t) = x_{\text{кл}}(t) + y(t)$. Уравнение движения:

$$\ddot{x}_{\text{кл}} + \omega^2 x_{\text{кл}} = -F(t)/m$$

Разобьем действие $S[x_{\text{кл}} + y]$ на три компоненты:

$$S[x_{\text{кл}} + y] = \int_0^T \left[\frac{m(\dot{x}_{\text{кл}} + \dot{y})^2}{2} - \frac{m\omega^2 (x_{\text{кл}} + y)^2}{2} - F(t)(x_{\text{кл}} + y) \right] dt = (1) + (2) + (3)$$

1) Слагаемые, зависящие только от $x_{\text{кл}}$:

$$(1) = \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}_{\text{кл}}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x_{\text{кл}}^2}{2} - F(t)x_{\text{кл}} \right] dt = S[x_{\text{кл}}]$$

2) Перекрестные слагаемые:

$$(2) = \int_0^T \left[m\dot{x}_{\text{кл}}\dot{y} - m\omega^2 x_{\text{кл}} y - F(t)y \right] dt = m\dot{x}_{\text{кл}} y \Big|_0^T - \int_0^T y\big(m\ddot{x}_{\text{кл}} + m\omega^2 x_{\text{кл}} + F(t)\big) dt$$

Вероятности перехода между состояниями под действиемм силы

Внеинтегральный член зануляется из-за граничных условий $y(0) = y(T) = 0$, а интеграл равен нулю в силу классического уравнения движения.
3) Слагаемые, зависящие только от y (действие свободного осциллятора):

$$(3) = \int_0^T \left[\frac{m\dot{y}^2}{2} - \frac{m\omega^2 y^2}{2}\right] dt \equiv S'[y]$$

С учетом замены и выражения выше амплитуда примет вид:

$$\langle x_N|\hat{U}(T,0)|x_0\rangle = \mathcal{H}e^{iS[x_{\text{кл}}]} \int \mathcal{D}[y(t)]\Big|_{y(0)=0}^{y(T)=0} e^{iS'[y]} \equiv C(T)e^{iS[x_{\text{кл}}]}$$

где $C(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega T}}$.

Вероятности перехода между состояниями под действиемм силы

Искомая амплитуда перехода между квантовыми состояниями дается выражением:

$$\langle \psi_N | \hat{U}(T,0) | \psi_0 \rangle = \mathcal{H} \left(\int \mathcal{D}[y(t)] e^{iS'[y]} \right) \int dx_0 dx_N \psi_0(x_0) \psi_N^*(x_N) e^{iS[x_{\text{кл}}]}$$

После взятия всех интегралов получим:

$$P_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m\omega} \right]^n \exp\left(-\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m\omega} \right)$$

где $I_s = \int_0^T F(t) \sin \omega t dt$, $I_c = \int_0^T F(t) \cos \omega t dt$.
В случае $F(t) = F = const$:

$$P_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right]^n \exp\left\{ -\frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right\}$$

Проверка полученного результата с помощью уравнения Шредингера

Рассматривается постоянная сила F, действующая на интервале $[0, T]$. Добавление в гамильтониан слагаемого вида $\hat{x}F$ приводит к сдвигу центра потенциальной ямы и изменению уровней энергии. Новые уровни энергии в этой яме: $E_k = \omega(k + 1/2) - \frac{F^2}{2m\omega^2}$. Амплитуда перехода в состояние n:

$$\langle \psi_N | \hat{U}(T, 0) | \psi_0 \rangle \equiv A_n = \exp\left\{ j^2 (e^{-i\omega T} - 1) - i \left(\frac{\omega}{2} - \Delta E \right) T \right\} \frac{j^n (e^{-i\omega T} - 1)^n}{\sqrt{n!}},$$

$$\text{где} \quad j = \frac{F}{\sqrt{2m\omega^3}}$$

Вероятность перехода подчиняется **распределению Пуассона**:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = \frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2 \frac{\omega T}{2}$$

$$P_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right]^n \exp\left\{ -\frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2 \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right\}$$

Заключение

- Проведенное сравнение подходов на примере задачи о квантовом гармоническом осцилляторе под действием внешней силы наглядно демонстрирует концептуальную мощь метода интегралов по траекториям.
- Особо стоит подчеркнуть фундаментальную значимость изученного формализма. Если для простейших задач нерелятивистской квантовой механики метод континуального интеграла может показаться математически более сложной альтернативой, то в квантовой теории поля (КТП) он становится абсолютно необходимым инструментом и стандартным языком описания.
- Освоение аппарата интегралов по траекториям на базовых квантовомеханических задачах, выполненное в этой работе, служит необходимым и надежным фундаментом для дальнейшего погружения в современную теоретическую физику.

Список литературы

- М. Пескин, Д. Шредер, *Введение в квантовую теорию поля*, 2001.
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, 2004.
- Левков Д. Г., *Конспект курса «Функциональный интеграл»*.