МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

на тему

«Функциональный интеграл в квантововй механике»

Выполнила:
студентка 2 курса 202 группы
Дорожкина Мария Павловна

Научный руководитель:
старший научный сотрудник
Демидов Сергей Владимирович

Москва 2026

Содержание

Введение

Традиционно изучение квантовой механики начинается с гамильтонова формализма, основанного на дифференциальном уравнении Шрёдингера, или матричной механики Гейзенберга. Однако в 1948 году Ричард Фейнман, опираясь на идеи Поля Дирака, предложил принципиально еще один подход к квантованию — метод функционального интеграла (или интеграла по траекториям). В рамках данной курсовой работы рассматривается применение функционального интеграла в квантовой механике.

Суть метода

В классической механике эволюция системы однозначно определяется принципом наименьшего действия: частица движется по одной выделенной траектории, на которой действие S минимально. В квантовой механике, согласно подходу Фейнмана, частица «исследует» *все возможные* пути между начальной точкой (x_0, t_0) и конечной точкой (x_N, t_N) пространства-времени.

Амплитуда вероятности перехода вычисляется как суперпозиция вкладов от каждой мыслимой траектории $x(t)$:

$$K(x_N, t_N; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}[x(t)] \,\Big|_{x_0}^{x_N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right),$$

где $\mathcal{D}[x(t)]$ обозначает интегрирование по бесконечномерному пространству всех возможных функций (траекторий), а $S[x(t)]$ — классическое действие для данной траектории. Каждая траектория вносит одинаковый по модулю вклад, но с различной фазой.

Применение метода

Хотя для простейших задач (например, атом водорода) метод функционального интеграла может показаться математически более громоздким по сравнению с решением уравнения Шрёдингера, его истинный потенциал раскрывается в более сложных областях физики. Сегодня интегралы по траекториям являются стандартным языком в:

- **Квантовой теории поля (КТП):** для вычисления функций Грина и построения диаграммной техники Фейнмана.
- **Статистической физике:** где с помощью поворота Вика (перехода к мнимому времени $t \to -i\tau$) функциональный интеграл становится математически эквивалентен статистической сумме.
- **Физике конденсированного состояния** и **теории струн**.

Преимущества перед другими методами

Формализм интегралов по траекториям обладает рядом фундаментальных преимуществ:

1. **Явная лоренц-инвариантность:** В отличие от гамильтонова подхода, который искусственно разделяет время и пространство, лагранжев формализм функционального интеграла изначально релятивистски ковариантен.

2. **Естественный классический предел:** Связь между квантовой и классической физикой становится предельно прозрачной. При предельном переходе $\hbar \to 0$ вклад в интеграл дают только траектории, близкие к классической (согласно методу стационарной фазы), так как фазы остальных путей быстро осциллируют и взаимно гасятся.

3. **Работа с симметриями:** Использование лагранжиана позволяет гораздо проще учитывать симметрии системы, законы сохранения и вводить калибровочные поля.

4. **Топологические и непертурбативные эффекты:** Метод естественно описывает такие явления, как эффект Ааронова — Бома, инстантоны и квантовое туннелирование в многомерных системах, которые крайне сложно исследовать в рамках стандартной картины Шрёдингера.

Данная курсовая работа посвящена систематическому изучению математического аппарата функционального интеграла и его применению к базовым задачам квантовой механики, что служит необходимой ступенью для дальнейшего погружения в современную теоретическую физику.

1 Эволюция квантовой системы на языке функционального интеграла

Рассмотрим гамильтониан гармонического осциллятора с внешней силой (в системе единиц $\hbar = c = 1$):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \hat{x}F(t)$$

1.1 Оператор эволюции

Временная эволюция состояния описывается уравнением Шрёдингера $i\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$, формальное решение которого имеет вид:

$$|\psi(T)\rangle = \hat{U}(T,0)|\psi(0)\rangle, \quad \text{где} \quad \hat{U}(T,0) = \mathcal{T}\exp\left(-i\int_0^T \hat{H}(t)dt\right)$$

Разобьем интервал времени $T = t_N - t_0$ на N малых отрезков $\Delta t = T/N$. В силу малости Δt оператор эволюции можно представить в виде произведения:

$$\hat{U}(t_N,t_0) = \prod_{j=0}^{N-1}\hat{U}(t_{j+1},t_j) \approx \prod_{j=0}^{N-1} e^{-i\hat{H}(t_j)\Delta t} \tag{1}$$

1.2 Амплитуда перехода за малое время

Разделим кинетическую и потенциальную части в силу малости Δt :

$$e^{-i\hat{H}(t_j)\Delta t} \approx e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t}e^{-i\left(\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}+\hat{x}F(t_j)\right)\Delta t}$$

Вычислим матричный элемент перехода между состояниями $|x_j\rangle$ и $|x_{j+1}\rangle$, вставив условие полноты по импульсам $1 = \frac{1}{2\pi}\int dp|p\rangle\langle p|$:

$$\begin{aligned}\langle x_{j+1}|e^{-i\hat{H}(t_j)\Delta t}|x_j\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int dp\langle x_{j+1}|e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta t}|p\rangle\langle p|e^{-i\left(\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}+\hat{x}F(t_j)\right)\Delta t}|x_j\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-i\Delta t\left(\frac{m\omega^2x_j^2}{2}+x_jF(t_j)\right)}\int dp\exp\left\{-i\Delta t\frac{p^2}{2m}+ip(x_{j+1}-x_j)\right\}\end{aligned}$$

Вычисляя стандартный гауссов интеграл по переменной p, получаем амплитуду для одного шага:

$$\langle x_{j+1}|e^{-i\hat{H}(t_j)\Delta t}|x_j\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\Delta t}}e^{iS[x_j]} \tag{2}$$

где $S[x_j] = \Delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\Delta t}\right)^2 - \frac{m\omega^2x_j^2}{2} - x_jF(t_j)\right]$ — дискретное действие на шаге j.

1.3 Полная амплитуда перехода

Чтобы найти амплитуду перехода из начальной точки x_0 в конечную x_N, применим оператор эволюции и вставим $(N-1)$ условий полноты по координатам $1 = \int dx_k |x_k\rangle\langle x_k|$, а также учтем (1):

$$\langle x_N|\hat{U}(t_N, t_0)|x_0\rangle = \int dx_1 \dots dx_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \langle x_{j+1}|e^{-i\hat{H}(t_j)\Delta t}|x_j\rangle$$

Подставляя выражение (2) и объединяя показатели экспонент в сумму, находим:

$$\langle x_N|\hat{U}(t_N, t_0)|x_0\rangle = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta t}}\right)^N \int dx_1 \dots dx_{N-1} \exp\left\{ i \sum_{j=0}^{N-1} S[x_j] \right\}$$

Переходя к непрерывному пределу при $\Delta t \to 0$ (и $N \to \infty$) и обозначая скобку пред интегралом буквой $\mathcal{H}$, приходим к окончательному выражению для функционального интеграла:

$$\langle x_N|\hat{U}(T, 0)|x_0\rangle = \mathcal{H} \int \mathcal{D}x(t) \Big|_{x_0}^{x_N} e^{iS[x]}, \tag{3}$$

где введена мера интегрирования $\mathcal{D}x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} dx_1 \dots dx_{N-1}$ [I], а функционал $S[x]$ — классическое действие системы.

[I]В дальнейшем будем опускать знак предела, подразумевая его

2 Поиск энергии основного состояния одномерного гармонического осциллятора

Вычислим матричный элемент $\mathcal{I} \equiv \langle\psi_0|e^{-\hat{H}T}|\psi_0\rangle$, где T-евклидово время ($t = iT$), $S_E[x_j] = \Delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t}\right)^2 + \frac{m\omega^2(x_j+x_{j-1})^2}{8}\right]$[II] — дискретное евклидово действие на шаге j ($S[x] = iS_E[x]$). В этом случае формула (3) примет вид:

$$\langle x_N|\hat{U}(T,0)|x_0\rangle = \mathcal{H}\int \mathcal{D}x(t)\,\Big|_{x_1}^{x_{N+1}} e^{iS_E[x]}\text{[III]},\ \text{где } \mathcal{H} = \left(\frac{m}{2\pi\Delta T}\right)^N$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{H}\int dx_1\dots dx_{N+1}\psi_0^*(x_{N+1})\psi_0(x_1)\prod_{i=2}^{N+1}\exp\left\{-\frac{m(x_i - x_{i-1})^2}{2\Delta T} - \frac{m\omega^2(x_i + x_{i-1})^2\Delta T}{8}\right\}$$

Рассмотрим первый шаг интегрирования по x_1, обозначив его $I(x_2)$. С учетом начальной волновой функции $\psi_0(x_0) = \mathcal{A}\exp\left(-\frac{m\omega}{2}x_0^2\right)$, где $\mathcal{A} = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^N$, интеграл принимает вид:

$$I(x_2) = \int dx_1\mathcal{A}\exp\left(-\frac{m\omega}{2}x_1^2\right)\exp\left(-\frac{m(x_2 - x_1)^2}{2\Delta T} - \frac{m\omega^2\Delta T(x_1 + x_2)^2}{8}\right)$$

Воспользуемся табличным гауссовым интегралом:

$$\int e^{-\alpha x^2 + bx - c}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{b^2}{4\alpha} - c}$$

Сгруппировав слагаемые при степенях x_1, находим коэффициенты:

$$\alpha_1 = \frac{m}{2\Delta T}\left(1 + \frac{\omega\Delta T}{2}\right)^2, \quad b_1 = \frac{mx_2}{\Delta T}\left(1 - \frac{\omega^2\Delta T^2}{4}\right), \quad c_1 = \frac{mx_2^2}{2\Delta T}\left(1 + \frac{\omega^2\Delta T^2}{4}\right).$$

Выполнив алгебраические упрощения показателя экспоненты, получаем:

$$\frac{b_1^2}{4\alpha_1} - c_1 = -\frac{m\omega x_2^2}{2}$$

Следовательно, результат интегрирования по первой переменной равен:

$$I(x_2) = \mathcal{A}\sqrt{\frac{2\pi\Delta T}{m}}\left(\frac{1}{1 + \omega\Delta T/2}\right)e^{-\frac{m\omega x_2^2}{2}}$$

Интегрируя аналогичным образом по x_2 для нахождения $I(x_3)$, мы видим, что структура экспоненты сохраняется (коэффициенты $\alpha_2 = \alpha_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$). Каждый шаг интегрирования добавляет одинаковый множитель:

$$I(x_{N+1}) = \mathcal{A}\left(\sqrt{\frac{2\pi\Delta T}{m}}\right)^N\left(\frac{1}{1 + \omega\Delta T/2}\right)^N e^{-\frac{m\omega x_{N+1}^2}{2}}$$

[II] В потенциале стоит среднее арифметическое x_j и x_{j+1}

[III] в данном случае начальная и конечная координаты — это x_1 и x_{N+1} соответственно

Соберем полный интеграл $\mathcal{I}$, учитывая нормировочный множитель $\mathcal{H} = \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta T}}\right)^N$ и интегрирование по последней координате:

$$\mathcal{I} = \mathcal{A}^2 \left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta T}}\right)^N \left(\sqrt{\frac{2\pi\Delta T}{m}}\right)^N \left(\frac{1}{1+\omega\Delta T/2}\right)^N \int dx_{N+1} e^{-m\omega x_{N+1}^2}$$

Сокращая все лишнее, приходим к выражению:

$$\mathcal{I} = \left(1 + \frac{\omega\Delta T}{2}\right)^{-N}$$

Переходя к пределу при $\Delta T \to 0$ (учитывая, что $N\Delta T = T$), получаем окончательный ответ:

$$\mathcal{I} = e^{-\frac{\omega}{2}N\Delta T} = e^{-\frac{\omega}{2}T} = e^{-E_0 T}$$

Получили известный результат $E_0 = \frac{\omega}{2}$

3 Вычисление вероятности перехода

Рассматривается квантовый гармонический осциллятор, на который в течение времени T действует сила F. Гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \hat{x}F(t),$$

где сила задана как:

$$F(t) = \begin{cases} F, & 0 < t < T \\ 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [T, +\infty) \end{cases}$$

Начальное состояние системы (при $t = 0$) — основное состояние невозмущенного осциллятора: $|\Psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$. Необходимо найти вероятность перехода в состояние ψ_N после окончания действия силы.

3.1 Стационарное уравнение Шрёдингера при $0 < t < T$

Для начала решим эту задачу для постоянной в интервале времени $0 < t < T$ силы F, используя уравнение Шрёдингера. Так как гамильтониан тогда остается стационарным, будем искать СФ и СЗ стационарного УШ $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$. После выделения полного квадрата в потенциальной энергии и введения смещенной координаты $\tilde{x} = x - x_0$, где $x_0 = -\frac{F}{m\omega^2}$, УШ принимает вид уравнения для стандартного осциллятора:

$$-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{m\omega^2\tilde{x}^2}{2}\psi = \left(E + \frac{F^2}{2m\omega^2}\right)\psi \equiv \tilde{E}\psi$$

Собственные значения энергии нового гамильтониана:

$$\tilde{E}_k = \omega\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad E_k = \omega\left(k + \frac{1}{2}\right) - \Delta E, \quad \text{где } \Delta E = \frac{F^2}{2m\omega^2}$$

Собственные функции $\tilde{\psi}_k(x)$ представляют собой смещенные волновые функции стандартного осциллятора:

$$\tilde{\psi}_k(x) = N_k H_k\big(\sqrt{m\omega}(x - x_0)\big)e^{-\frac{m\omega(x-x_0)^2}{2}}, \quad N_k = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^k k!}}$$

3.2 Разложение начального состояния и эволюция

Разложим начальное состояние $\psi_0(x)$ по базису новых собственных функций $\tilde{\psi}_k(x)$. Интеграл перекрытия дает коэффициенты разложения:

$$C_k = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}_k^*(x)\psi_0(x)\,dx = \frac{j^k}{\sqrt{k!}}e^{-j^2/2}, \quad \text{где} \quad j = \frac{F}{\sqrt{2m\omega^3}}$$

Волновая функция системы в момент времени T (перед выключением силы) с учетом временной эволюции имеет вид:

$$\Psi(x,T) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \tilde{\psi}_k(x) e^{-i\tilde{E}_k T}$$

3.3 Вероятность перехода в произвольное состояние ψ_n

Найдем амплитуду вероятности A_n того, что система перейдет в состояние $\psi_n(x)$ после выключения поля:

$$A_n = \langle \psi_n | \Psi(T) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-i\tilde{E}_k T} \tilde{\psi}_k(x) \right) dx$$

Чтобы избежать интегрирования произведений полиномов Эрмита, свернем бесконечную сумму с помощью производящей функции $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(z)}{k!} \tau^k = e^{2z\tau - \tau^2}$. Обозначим $z = \sqrt{m\omega}(x - x_0)$ и $\tau = \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-i\omega T}$.

Перейдем к безразмерной переменной $\xi = \sqrt{m\omega}x$. Тогда безразмерное смещение $\xi_0 = -j\sqrt{2}$, а $z = \xi + j\sqrt{2}$. Интеграл сводится к виду:

$$A_n = K \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \cdot e^{-(\xi + j\sqrt{2})^2/2} \cdot e^{2(\xi + j\sqrt{2})\tau - \tau^2} d\xi$$

где $K = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} e^{-i(\frac{\omega}{2} - \Delta E)T} e^{-j^2/2}$.

Раскрывая скобки в показателе экспоненты под интегралом, приводим его к табличному виду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) e^{-\xi^2 + 2c\xi} d\xi = \sqrt{\pi}(2c)^n e^{c^2}, \quad \text{где } c = \frac{j}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega T} - 1)$$

После подстановки c и упрощения экспоненциальной части, амплитуда разбивается на множители:

$$A_n = A_0 \frac{j^n (e^{-i\omega T} - 1)^n}{\sqrt{n!}},$$

где A_0 — амплитуда того, что система останется в основном состоянии:

$$A_0 = \exp\left\{ j^2 (e^{-i\omega T} - 1) - i\left(\frac{\omega}{2} - \Delta E\right) T \right\}$$

Вероятность перехода определяется квадратом модуля амплитуды: $P_n = |A_n|^2$. Учитывая, что $|A_0|^2 = P_0$, а $|e^{-i\omega T} - 1|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$, получаем:

$$P_n = P_0 \frac{\left(4j^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}\right)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \left[\frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right]^n \exp\left\{ -\frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right\} \tag{4}$$

Введем параметр $\lambda = 4j^2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} = \frac{2F^2}{m\omega^3} \sin^2 \frac{\omega T}{2}$. Замечая, что $P_0 = e^{-\lambda}$, приходим к итоговому ответу — распределению Пуассона:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \tag{5}$$

4 Применение континуального интеграла для решения той же задачи

Теперь мы не будем ограничивать общность и решим эту задачу для произвольной силы. Пусть задана внешняя сила:

$$F(t) = \begin{cases} F(t), & 0 < t < T \\ 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [T, +\infty) \end{cases}$$

Начальное состояние: $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_0\rangle$ — основное состояние. Найти вероятность перехода в состояние $|\psi_n\rangle$ после окончания действия силы можно следующим методом:

Замена переменных в функциональном интеграле:

$$\langle x_N|\hat{U}(T,0)|x_0\rangle = \mathcal{H}\int \mathcal{D}[x(t)]\Big|_{x(0)=x_0}^{x(T)=x_N} e^{iS[x]}$$

Положим $x(t) = x_{\text{кл}}(t) + y(t)$, где $x_{\text{кл}}(t)$ — решение классического уравнения движения с граничными условиями $x_{\text{кл}}(0) = x_0$ и $x_{\text{кл}}(T) = x_N$. Тогда граничные условия для $y(t)$ принимают вид: $y(0) = 0$ и $y(T) = 0$. Мера интегрирования не изменится: $\mathcal{D}[x(t)] = \mathcal{D}[y(t)]$, поэтому принимает вид:

$$\langle x_N|\hat{U}(T,0)|x_0\rangle = \mathcal{H}\int \mathcal{D}[y(t)]\Big|_{y(0)=0}^{y(T)=0} e^{iS[x_{\text{кл}}+y]}$$

4.1 Классическое уравнение движения

Классический лагранжиан системы:

$$L = \frac{m\dot{x}_{\text{кл}}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x_{\text{кл}}^2}{2} - x_{\text{кл}}F(t)$$

Классическое уравнение движения (уравнение Эйлера-Лагранжа):

$$m\ddot{x}_{\text{кл}} + m\omega^2 x_{\text{кл}} + F(t) = 0 \implies \ddot{x}_{\text{кл}} + \omega^2 x_{\text{кл}} = -\frac{F(t)}{m} \equiv -f(t)$$

1) Общее решение однородного уравнения $\ddot{x}_{\text{кл}} + \omega^2 x_{\text{кл}} = 0$ имеет вид:

$$\tilde{x}_{\text{кл}}(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

2) Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянных: $x_{\text{част}}(t) = C_1(t)\cos\omega t + C_2(t)\sin\omega t$. Составим систему:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos\omega t + \dot{C}_2 \sin\omega t = 0 \implies \dot{C}_2 = -\dot{C}_1 \frac{\cos\omega t}{\sin\omega t} \\ -\dot{C}_1\omega \sin\omega t + \dot{C}_2\omega\cos\omega t = -f(t) \end{cases}$$

Подставляя $\dot{C}_2$ во второе уравнение:

$$-\dot{C}_1\omega\sin\omega t - \dot{C}_1\omega\frac{\cos^2\omega t}{\sin\omega t} = -f(t) \implies -\dot{C}_1\frac{\omega}{\sin\omega t}(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) = -f(t)$$

Отсюда находим производные:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{f(t)\sin\omega t}{\omega}, \quad \dot{C}_2(t) = -\frac{f(t)\cos\omega t}{\omega}$$

Интегрируя с нулевыми начальными условиями, получаем коэффициенты:

$$C_1(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)\sin\omega\tau}{\omega}d\tau, \quad C_2(t) = -\int_0^t \frac{f(\tau)\cos\omega\tau}{\omega}d\tau$$

Следовательно, частное решение:

$$x_{\text{част}}(t) = \cos\omega t\int_0^t \frac{f(\tau)\sin\omega\tau}{\omega}d\tau - \sin\omega t\int_0^t \frac{f(\tau)\cos\omega\tau}{\omega}d\tau$$

3) Полное классическое решение:

$$x_{\text{кл}}(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + x_{\text{част}}(t)$$

Из граничных условий определяем константы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} x_{\text{кл}}(0) = x_0 \implies C_1 = x_0 \\ x_{\text{кл}}(T) = x_N \implies x_0\cos\omega T + C_2\sin\omega T + x_{\text{част}}(T) = x_N \end{cases}$$

$$\implies C_2 = \frac{x_N - x_0\cos\omega T - x_{\text{част}}(T)}{\sin\omega T}$$

Итоговая траектория:

$$x_{\text{кл}}(t) = x_0\cos\omega t + \frac{x_N - x_0\cos\omega T - x_{\text{част}}(T)}{\sin\omega T}\sin\omega t + x_{\text{част}}(t)$$

4.2 Классическое действие

Классическое действие на найденной траектории:

$$S[x_{\text{кл}}] = \int_0^T \left(\frac{m\dot{x}_{\text{кл}}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x_{\text{кл}}^2}{2} - x_{\text{кл}}F(t)\right)dt$$

Интегрируя кинетическую часть по частям:

$$\int_0^T \frac{m\dot{x}_{\text{кл}}^2}{2}dt = \frac{m x_{\text{кл}}\dot{x}_{\text{кл}}}{2}\bigg|_0^T - \int_0^T \frac{m x_{\text{кл}}\ddot{x}_{\text{кл}}}{2}dt$$

Подставляем это обратно в действие:

$$S[x_{\text{кл}}] = \frac{m}{2}\Big(x_N\dot{x}_{\text{кл}}(T) - x_0\dot{x}_{\text{кл}}(0)\Big) - \frac{1}{2}\int_0^T x_{\text{кл}}\Big(m\ddot{x}_{\text{кл}} + m\omega^2 x_{\text{кл}} + 2F(t)\Big)dt$$

Используя уравнение движения $m\ddot{x}_{\text{кл}}+m\omega^2 x_{\text{кл}} = -F(t)$, выражение в скобках под интегралом упрощается до $F(t)$:

$$S[x_{\text{кл}}] = \frac{m}{2}\Big(x_N\dot{x}_{\text{кл}}(T) - x_0\dot{x}_{\text{кл}}(0)\Big) - \frac{1}{2}\int_0^T x_{\text{кл}}F(t)dt$$

Обозначим интегралы перекрытия силы:

$$I_s = \int_0^T F(t)\sin\omega t\,dt, \quad I_c = \int_0^T F(t)\cos\omega t\,dt$$

После взятия интегралов получаем классическое действие. Слагаемое при x_0 происходит от интеграла:

$$\int_0^T F(t)\sin\omega(T-t)dt = \int_0^T F(t)\Big(\sin\omega T\cos\omega t - \cos\omega T\sin\omega t\Big)dt = \\ = I_c\sin\omega T - I_s\cos\omega T \equiv \tilde{B}$$

Итоговое классическое действие:

$$S[x_{\text{кл}}] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_0^2 + x_N^2)\cos\omega T - 2x_0x_N + \frac{2x_N}{m\omega}I_s + \frac{2x_0}{m\omega}\tilde{B}\right] \\ - \frac{1}{2m\omega}\int_0^T dt\int_0^t d\tau F(t)F(\tau)\sin\omega(t-\tau) \tag{6}$$

Важно отметить, что классическое действие $S[x_{кл}]$ зависит только от начальной и конечной точек x_0 и x_N

4.3 Вычисление функционального интеграла

Разобьем действие $S[x_{\text{кл}} + y]$ на три компоненты:

$$S[x_{\text{кл}} + y] = \int_0^T \left[\frac{m(\dot{x}_{\text{кл}} + \dot{y})^2}{2} - \frac{m\omega^2(x_{\text{кл}} + y)^2}{2} - F(t)(x_{\text{кл}} + y)\right]dt = (1) + (2) + (3)$$

1) Слагаемые, зависящие только от $x_{\text{кл}}$:

$$(1) = \int_0^T \left[\frac{m\dot{x}_{\text{кл}}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x_{\text{кл}}^2}{2} - F(t)x_{\text{кл}}\right]dt = S[x_{\text{кл}}]$$

2) Перекрестные слагаемые:

$$(2) = \int_0^T \left[m\dot{x}_{\text{кл}}\dot{y} - m\omega^2 x_{\text{кл}}y - F(t)y\right]dt = m\dot{x}_{\text{кл}}y\Big|_0^T - \int_0^T y\Big(m\ddot{x}_{\text{кл}}+m\omega^2 x_{\text{кл}}+F(t)\Big)dt = 0$$

Внеинтегральный член зануляется из-за граничных условий $y(0) = y(T) = 0$, а интеграл равен нулю в силу классического уравнения движения.

3) Слагаемые, зависящие только от y (действие свободного осциллятора):

$$(3) = \int_0^T \left[\frac{m\dot{y}^2}{2} - \frac{m\omega^2 y^2}{2}\right] dt \equiv S'[y]$$

Таким образом, амплитуда перехода примет вид:

$$\langle x_N|\hat{U}(T,0)|x_0\rangle = \mathcal{H} e^{iS[x_{\text{кл}}]} \int \mathcal{D}[y(t)]\Big|_{y(0)=0}^{y(T)=0} e^{iS'[y]}$$

4.4 Вычисление константы нормировки

Амплитуда перехода между квантовыми состояниями:

$$\langle\psi_N|\hat{U}(T,0)|\psi_0\rangle = \mathcal{H}\left(\int \mathcal{D}[y(t)] e^{iS'[y]}\right)\int dx_0 dx_N \psi_0(x_0)\psi_N^*(x_N) e^{iS[x_{\text{кл}}]}$$

Множитель $\mathrm{C}(T) = \mathcal{H}\int \mathcal{D}[y(t)]e^{iS'[y]}$ не зависит от координат и силы $F(t)$. Найдем его из условия нормировки для свободного осциллятора ($F = 0$). При $F = 0$ вероятность перехода из ψ_0 в ψ_0 равна 1.

Беря двойной гауссов интеграл по x_0 и x_N с волновыми функциями основного состояния, получаем амплитуду для свободного осциллятора. Из условия $|\langle\psi_0|\hat{U}_{F=0}(T,0)|\psi_0\rangle|^2 = 1$ следует:

$$\mathrm{C}(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \sin\omega T}}$$

4.5 Полная амплитуда перехода и взятие интегралов

Искомая амплитуда перехода в n-ое состояние:

$$A_n = \mathrm{C}(T)\int dx_0 dx_N \psi_0(x_0)\psi_n^*(x_N) e^{iS[x_{\text{кл}}]}$$

Обозначим $A = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}$. Выделим все члены с x_0 в показателе экспоненты: $-\alpha_0 x_0^2 + b_0 x_0$, учитывая $\psi_0(x_0) \propto e^{-\frac{m\omega}{2}x_0^2}$.

$$\alpha_0 = \frac{m\omega}{2} - iA\cos\omega T = \frac{m\omega}{2}(1 - i\cot\omega T) = -iAe^{i\omega T}$$
$$b_0 = -2iAx_N + i\frac{2A}{m\omega}\tilde{B}$$

Интеграл по x_0 гауссов и дает множитель $e^{b_0^2/(4\alpha_0)}$. Вычислим его показатель:

$$\frac{b_0^2}{4\alpha_0} = \frac{-4A^2\left(x_N - \frac{\tilde{B}}{m\omega}\right)^2}{-4iAe^{i\omega T}} = -iAe^{-i\omega T}\left(x_N - \frac{\tilde{B}}{m\omega}\right)^2$$

Теперь соберем все члены с x_N в показателе экспоненты (сюда также входит множитель $-\frac{m\omega}{2}x_N^2$ от конечной волновой функции ψ_n^*):

Члены с x_N^2:

$$-\frac{m\omega}{2} + iA\cos\omega T - iAe^{-i\omega T} = -\frac{m\omega}{2} + iA\cos\omega T - iA(\cos\omega T - i\sin\omega T) = -m\omega$$

Квадратичная часть схлопывается до $-m\omega x_N^2$.

Линейные члены x_N (обозначим их сумму γx_N): Из действия у нас есть $i\frac{2A}{m\omega}I_s = i\frac{I_s}{\sin\omega T}$. Из $b_0^2/4\alpha_0$ приходит перекрестный член $2iAe^{-i\omega T}\frac{\tilde{B}}{m\omega} = i\frac{\tilde{B}e^{-i\omega T}}{\sin\omega T}$.

$$\gamma = \frac{i}{\sin\omega T}\left(I_s + \tilde{B}e^{-i\omega T}\right)$$

Подставим $\tilde{B} = I_c\sin\omega T - I_s\cos\omega T$:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{i}{\sin\omega T}\Big[I_s + (I_c\sin\omega T - I_s\cos\omega T)(\cos\omega T - i\sin\omega T)\Big]\\ &= \frac{i}{\sin\omega T}\Big[I_s\sin^2\omega T + I_c\sin\omega T\cos\omega T - iI_c\sin^2\omega T + iI_s\sin\omega T\cos\omega T\Big]\\ &= i\big(I_s\sin\omega T + I_c\cos\omega T\big) - \big(I_s\cos\omega T - I_c\sin\omega T\big)\end{aligned}$$

Квадрат модуля этого коэффициента:

$$|\gamma|^2 = (I_s\sin\omega T + I_c\cos\omega T)^2 + (I_s\cos\omega T - I_c\sin\omega T)^2 = I_s^2 + I_c^2$$

Подынтегральная функция для вычисления амплитуды сводится к интегралу с полиномами Эрмита:

$$A_n \propto \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_N\, H_n(\sqrt{m\omega}x_N)e^{-m\omega x_N^2 + \gamma x_N}$$

Сделаем безразмерную замену $\xi = \sqrt{m\omega}x_N$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)e^{-\xi^2 + \frac{\gamma}{\sqrt{m\omega}}\xi}d\xi$$

Используя табличный интеграл для производящей функции $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi)e^{-\xi^2+2c\xi}d\xi = \sqrt{\pi}(2c)^n e^{c^2}$, где $2c = \frac{\gamma}{\sqrt{m\omega}}$, получаем:

$$A_n \propto \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{m\omega}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2m\omega}}\right)^n$$

Вероятность перехода $P_n = |A_n|^2$:

$$P_n = C\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m\omega}\right)^n$$

Из условия сохранения вероятности $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ нормировочная константа равна:

$$C = \exp\left(-\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m\omega}\right)$$

Окончательное распределение имеет вид распределения Пуассона:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m\omega}\right]^n \exp\left(-\frac{I_c^2 + I_s^2}{2m\omega}\right) \tag{7}$$

Особый случай: $F(t) = F = \mathbf{const}$

Вычисляя интегралы $\int_0^T \cos\omega t\, dt$ и $\int_0^T \sin\omega t\, dt$, получаем:

$$I_c^2 + I_s^2 = \frac{F^2}{\omega^2}\sin^2\omega T + \frac{F^2}{\omega^2}(1 - \cos\omega T)^2 = \frac{F^2}{\omega^2}\big(2 - 2\cos\omega T\big) = \frac{2F^2}{\omega^2}(1 - \cos\omega T)$$

Подставляя это в общую формулу вероятности:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{F^2}{m\omega^3}(1 - \cos\omega T)\right)^n \exp\left(-\frac{F^2}{m\omega^3}(1 - \cos\omega T)\right)$$

или:

$$P_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{2F^2}{m\omega^3}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]^n \exp\left\{-\frac{2F^2}{m\omega^3}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right\} \tag{8}$$

Результат в точности совпадает с полученным ранее (4)

Заключение

В рамках данной курсовой работы было детально рассмотрено применение функционального интеграла в квантовой механике. Были систематически разобраны математический аппарат метода, вывод оператора эволюции через континуальный интеграл, а также алгоритмы практического вычисления вероятностей перехода.

Проведенное сравнение подходов на примере задачи о квантовом гармоническом осцилляторе под действием внешней силы наглядно демонстрирует концептуальную мощь метода интегралов по траекториям. В то время как стандартный подход, основанный на стационарном уравнении Шрёдингера, требует весьма громоздких манипуляций с рядами, производящими функциями и полиномами Эрмита, метод Фейнмана позволяет изящно разделить на множители амплитуду перехода.

Особо стоит подчеркнуть фундаментальную значимость изученного формализма. Если для простейших задач нерелятивистской квантовой механики метод континуального интеграла может показаться математически более сложной альтернативой, то в квантовой теории поля (КТП) он становится абсолютно необходимым инструментом и стандартным языком описания. Благодаря изначальной релятивистской ковариантности (в отличие от гамильтонова подхода), а также явным сохранением симметрий системы, именно функциональный интеграл лежит в основе построения диаграммной техники и вычисления функций Грина.

Таким образом, успешное освоение аппарата интегралов по траекториям на базовых квантовомеханических задачах, выполненное в этой работе, служит необходимым и надежным фундаментом для дальнейшего погружения в современную теоретическую физику.

Список литературы

[1] М. Пескин, Д. Шредер, «Введение в квантовую теорию поля», М., РХД, 2001.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Физматлит, 2004.

[3] Левков Д. Г. Конспект курса «Функциональный интеграл, инстантоны и туннелирование. Часть 1»

[4] Парфенов К. В. Конспект курса «Квантовая теория. Часть 1»