МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПЕТРОВ Иван Владимирович

Масштабная инвариантность в классической механике

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА 2 КУРСА

____

(Подпись студента)

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук

Нугаев Эмин Яткярович

____

(Подпись научного руководителя)

Москва - 2026 г.

Оглавление

Введение

Симметрии вызывают большой интерес в физике, потому что каждой симметрии соответствует сохраняющаяся величина. Довольно часто возникает необходимость найти эти величины, с чем помогает теорема Нётер. В данной работе для классической нерелятивистской механики рассмотрены простейшие системы, по отношению к которым применяется теорема Нётер. Подробно изложены несколько способов вычисления сохраняющихся величин. Также построен довольно простой способ получения законов несохранения. Проведен анализ с использованием численных методов для подтверждения теоретических предположений. В [3] главе 2 рассмотрены основные законы сохранения, выведенные с помощью уравнений Лагранжа. Более глубокий анализ дается в [2], для квантового случая в [1].

Основная часть

Дилатация: метод глобального параметра

Симметрия — свойство физической системы оставаться неизменной при определенных преобразованиях. В механике это означает неизменность действия. Будем рассматривать свободное одномерное движение нерелятивистской частицы. Функция Лагранжа этой частицы имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} \tag{1}$$

Уравнение движения:

$$m\ddot{q} = 0 \tag{2}$$

Сделаем следующую замену координат:

$$q(t) \to e^{-\lambda} q(e^{2\lambda} t) \tag{3}$$

Условия на границах будут задаваться неизменностью вариаций координат и времени на концах:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{4}$$

$$\delta t(t_1) = \delta t(t_2) = 0 \tag{5}$$

λ - глобальный параметр, то есть от времени не зависит. Рассмотрим вариацию действия:

$$\delta S = \int_{\tilde{t_1}}^{\tilde{t_2}} \tilde{L} d\tilde{t} - \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{6}$$

где $\tilde{L} = L(\dot{\tilde{q}}, \tilde{q}, \tilde{t})$. Теперь определим некоторые новые величины:

$$\bar{\delta} q = \tilde{q}(t) - q(t) = \lambda q(t) \tag{7}$$

$$\bar{\delta} \dot{q} = \dot{\tilde{q}}(t) - \dot{q}(t) = \lambda \dot{q}(t) \tag{8}$$

$$\delta t = \tilde{t} - t \tag{9}$$

в то время как $\delta q = \tilde{q}(\tilde{t}) - q(t)$ и аналогично $\delta \dot{q}$. Очевидно выполняются следующие соотношения:

$$\bar{\delta} q = \delta q - \dot{q}\delta t \tag{10}$$

$$\bar{\delta} \dot{q} = \delta \dot{q} - \ddot{q}\delta t \tag{11}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[(1 + \dot{\delta t}) \left(L(\dot{q}, q, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right) - L(\dot{q}, q, t) \right] dt \tag{12}$$

В последнем выражении учтем слагаемые только первого порядка малости:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\dot{\delta t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \right] dt \tag{13}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\dot{\delta t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{dL}{dt}\delta t - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}\delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q}\delta t \right] dt \tag{14}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[L\dot{\delta t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bar{\delta} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\bar{\delta} q + \frac{dL}{dt}\delta t \right] dt \tag{15}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bar{\delta} q \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \bar{\delta} q \right] dt \tag{16}$$

На уравнениях движения второе слагаемое обращается в ноль, поэтому по принципу наименьшего действия первая величина должна обращаться в ноль, то есть:

$$\frac{d}{dt} \left(L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bar{\delta} q \right) = 0 \tag{17}$$

Подставим результат из (8) и получим выражение для сохраняющейся величины:

$$\left(L - \frac{dL}{d\dot{q}}\dot{q} \right) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q = const \tag{18}$$

Подставим сюда все известные величины и получим:

$$D = mt\dot{q}^2 - mq\dot{q} = const \tag{19}$$

Дилатация: метод локального параметра

Опять рассмотрим функцию Лагранжа вида (1) и преобразования вида (3). Тогда для $\lambda \ll 1$ инфинитезимальные преобразования запишутся в виде:

$$e^{-\lambda} q(e^{2\lambda} t) \approx (1 - \lambda)(q(t) + 2\lambda t\dot{q}(t)) \tag{20}$$

Локальность параметра означает, что λ будет зависеть от времени. Мы решаем задачу с закрепленными концами, поэтому, условимся, что:

$$\lambda(t_1) = \lambda(t_2) = 0 \tag{21}$$

Вариация координаты будет иметь вид:

$$\delta q = \lambda(2t\dot{q}(t) - q(t)) \tag{22}$$

Теперь вычислим $\delta\dot{q}$:

$$\delta\dot{q} = \dot{\lambda}(2t\dot{q}(t) - q(t)) + \lambda 2t\ddot{q}(t) + \lambda\dot{q}(t) \tag{23}$$

В силу (2) второе слагаемое даст 0. Вычислим вариацию действия и применим (23):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta\dot{q}\; dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\lambda}(2mt\dot{q}^2 - mq\dot{q}) + \lambda m\dot{q}^2\; dt \tag{24}$$

Теперь посчитаем следующую величину:

$$d(\lambda q\dot{q}) = (\dot{\lambda}q\dot{q} + \lambda\dot{q}^2 + \lambda q\ddot{q})\, dt \tag{25}$$

Тогда вариация действия запишется в виде:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\lambda}(2mt\dot{q}^2 - 2mq\dot{q})\, dt + \int_{t_1}^{t_2} m\, d(\lambda q\dot{q})$$

Второй интеграл в силу условия (21) будет равен нулю. Интегрируя по частям первое слагаемое получим:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \lambda\frac{d}{dt}(2mt\dot{q}^2 - 2mq\dot{q})\, dt \tag{26}$$

Так как λ - произвольная функция, сохраняется следующая величина:

$$D = mt\dot{q}^2 - mq\dot{q} = const \tag{27}$$

Теперь усложним задачу и рассмотрим потенциальное поле вида $U = -\frac{a}{q^2}$. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{a}{q^2} \tag{28}$$

Вариация действия в этом случае:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\right)\, dt \tag{29}$$

Подставим сюда известные величины (22) и (23):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{q}(\dot{\lambda}(2t\dot{q} - q) + \lambda 2t\ddot{q} + \lambda\dot{q}) - \frac{2a}{q^3}\lambda(2t\dot{q} - q)\right)\, dt \tag{30}$$

Для второй группы слагаемых посчитаем величину:

$$d\left(4\lambda t\frac{a}{q^2}\right) = \left(-8\lambda t\frac{a}{q^3}\dot{q} + 4\dot{\lambda}t\frac{a}{q^2} + 4\lambda\frac{a}{q^2}\right)\,dt \tag{31}$$

Подставляя (25) и (31) в (30) получим:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\lambda}\left(2\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{a}{q^2}\right)t - m\dot{q}q\right)\,dt \tag{32}$$

Интегрируя по частям и учитывая (21), а также произвольность λ, из принципа наименьшего действия получим выражение для сохраняющейся величины:

$$D = 2\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{a}{q^2}\right)t - m\dot{q}q = const \tag{33}$$

Следовательно система симметрична относительно масштабных преобразований вида (3). Значит если у нас есть одно решение уравнений движения, то другое можно получить из него масштабным преобразованием.

Метод локального параметра: законы сохранения и несохранения

Что отличает метод локального параметра от глобального, так это, что помимо закона сохранения можно довольно просто получить и закон несохранения. Рассмотрим функцию Лагранжа вида:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{a}{q} \tag{34}$$

Опять рассмотрим преобразования вида (3). Тогда вариации координаты и ее производной будут даваться формулами (22) и (23) соответственно. Вычислим вариацию действия, ее вид дается (35), тогда подставляя известные величины:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{q}(\dot{\lambda}(2t\dot{q} - q) + \lambda 2t\ddot{q} + \lambda\dot{q}) - \frac{a}{q^2}\lambda(2t\dot{q} - q)\right)\,dt \tag{35}$$

Для второй группы слагаемых посчитаем следующую величину:

$$d\left(4\lambda t\frac{a}{q}\right) = \left(-4\lambda t\frac{a}{q^2}\dot{q} + 4\dot{\lambda}t\frac{a}{q} + 4\lambda\frac{a}{q}\right)\,dt \tag{36}$$

Подставляя (25) и (36) в (35) получим:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\lambda}\left(mt\dot{q}^2 - mq\dot{q} - 2t\frac{a}{q}\right)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \lambda\frac{a}{q}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(2\lambda t\frac{a}{q} + \frac{\lambda q\dot{q}}{2}\right) \tag{37}$$

Третий интеграл в силу условия (21) будет равен нулю, а первый интеграл "возьмем по частям":

$$\delta S = \lambda \left(mt\dot{q}^2 - mq\dot{q} - 2t\frac{a}{q} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \lambda \left(\frac{d}{dt} \left(mt\dot{q}^2 - mq\dot{q} - 2t\frac{a}{q} \right) + \frac{a}{q} \right) dt \tag{38}$$

Как и в предыдущих случаях, вводя обозначение:

$$D = 2\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{a}{q} \right) t - m\dot{q}q \tag{39}$$

По принципу наименьшего действия и в силу произвольности λ получим, что следующая величина должна равняться нулю:

$$\dot{D} + \frac{a}{q} = 0 \tag{40}$$

Как мы видим, в данном случае дилатация не сохраняется, так как система несимметрична относительно данных преобразований. Все приведенные ранее законы сохранения и несохранения имеют расширение на случай двух пространственных координат.

Проверка законов с помощью численного метода

Для простоты зафиксируем $m = 1$. В программе применяется численный метод Рунге-Кутты 4 порядка (RK4). Программе подается на вход 9 параметров: начальные координаты и скорости обеих частиц, параметр a. Для избежания деления на ноль также добавлено условие на минимальное расстояние приближения к центру потенциала, (если $r < 10^{-6}$, то $r = 10^{-6}$) фиксированное для всех измерений. Программа выводит два графика: первый — траектории двух частиц в потенциальном поле, второй — график зависимости $\dot{D} + \frac{a}{r}$ от времени для двух частиц. Здесь приведен пример работы программы (рис.1). Так как изображается график, отражающий уравнение (40), то мы ожидаем, что зависимость будет постоянной и равна нулю, но используемые численные методы вносят ошибку в вычисления. При этом, чем ближе к центру частицы, тем больше ошибка. В приведенном примере мы видим скачки порядка 10^{-7}. Это есть ошибка численного метода, она появляется в следствие резкого изменения скоростей при приближении к центру потенциала. Таким образом, можно утверждать о правильности закона (40).

Также была написана еще обна программа, позволяющая проследить за масштабной инвариантностью в потенциале вида $U = -\frac{a}{r^2}$. Программе подается на вход 6 праметров: начальные координаты и скорости, параметр потенциала a, масштабный

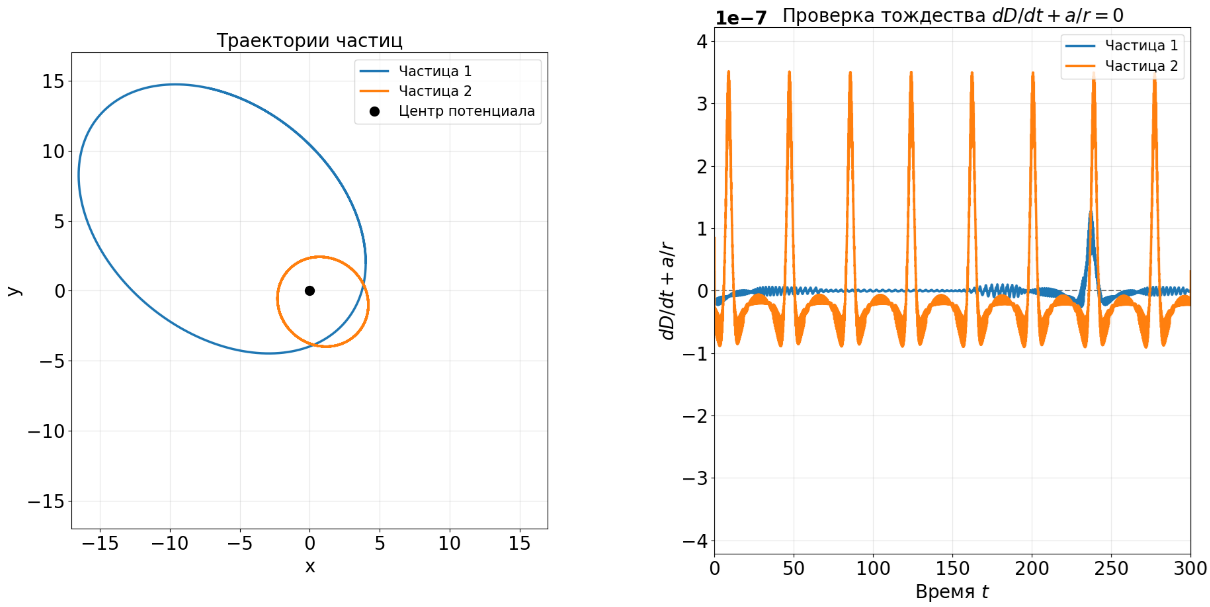

Рис. 1: Численное решение для потенциала вида $U = -\frac{a}{r}$.

параметр λ. Для избежания деления на ноль добавлен малый параметр $\epsilon = 10^{-12}$. Программа выводит один график, на котором изображены две траектории: одна — исходная, то есть истинная, вторая — дилатированная, то есть с измененным масштабом. Здесь приведен пример работы программы (рис.2). Как уже было сказано, система симметрична относительно масштабных преобразований вида (3), поэтому мы действительно получаем из одного решения сразу целое множество решений для различных λ.

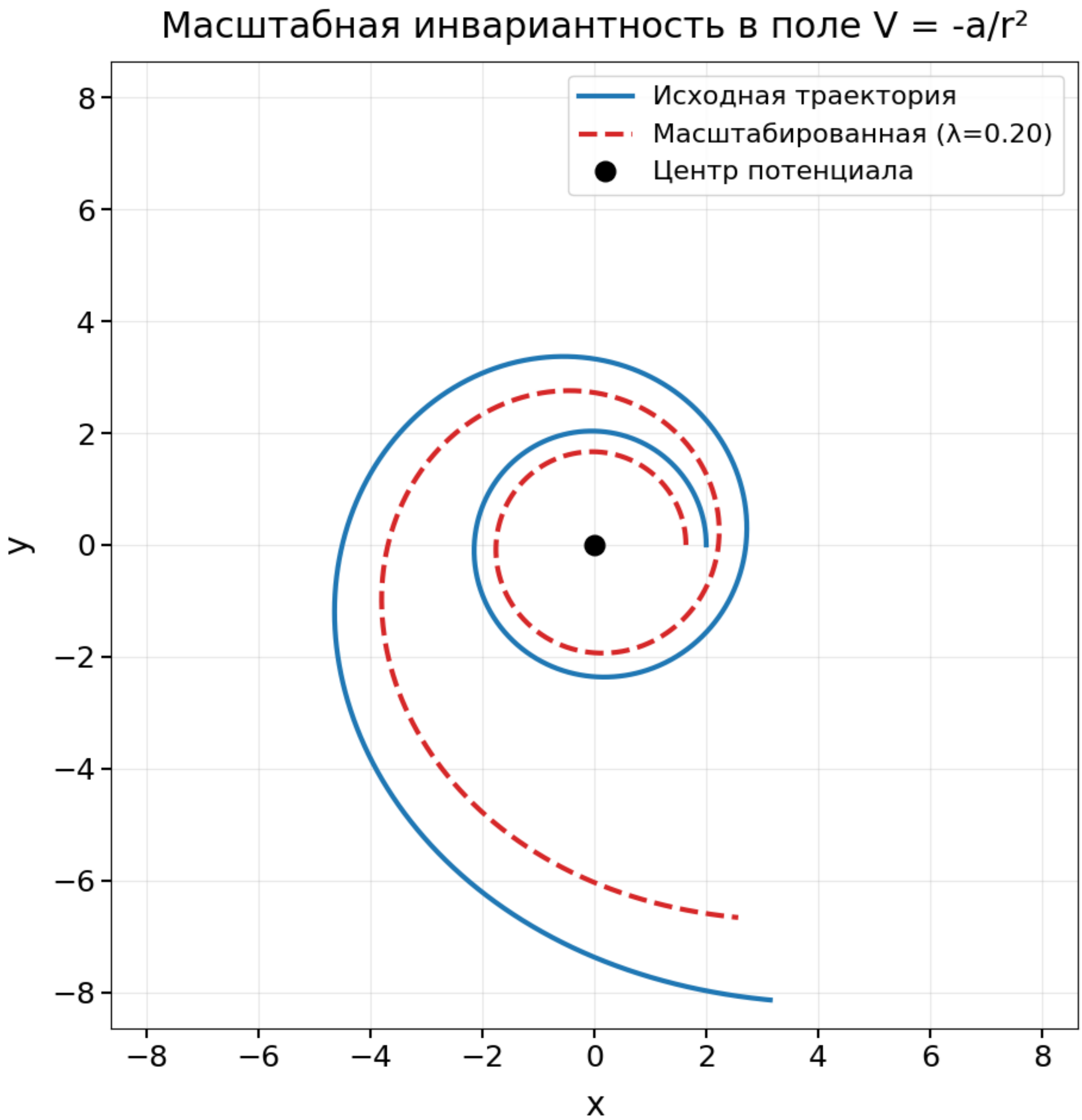

Рис. 2: Численное решение для потенциала вида $U = -\frac{a}{r^2}$.

Заключение

В результате работы был проведен анализ систем с применением теоремы Нетер с глобальными и локальными параметрами. Был получен простой способ получения законов сохранения и несохранения, используя принцип наименьшего действия и локальность параметра. Для конкретных систем с потенциалами $U = -\frac{a}{r^2}$, $U = -\frac{a}{r}$ был проведен численный расчет, показывающий, что преобразования координат вида (3) задают закон сохранения и несохранения соответственно.

В дальнейшем планируется расширить результаты данной работы, рассмотрев произвольное центрально-симметричное поле вида $U = U(r)$ и различные механизмы нарушения масштабнной симметрии, например в классической и квантовой механике.

Литература

[1] V. de Alfaro, S. Fubini and G. Furlan, “Conformal Invariance in Quantum Mechanics,” Nuovo Cim. A **34** (1976), 569 doi:10.1007/BF02785666

[2] C. Duval, M. Henkel, P. A. Horvathy, S. Rouhani, and P.-M. Zhang, “Schrödinger Symmetry: A Historical Review,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 63, no. 8, Aug. 2024, doi: 10.1007/s10773-024-05673-0.

[3] Ландау Л. Д.б Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. — В 10-ти т. Т. I. Механика. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 216 с. ISBN 5-02-013850-9 (т. I)