

Масштабная инвариантность в классической механике

Петров И.В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

23.04.2026

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Нугаев Э.Я.

Введение и постановка задачи

- ▶ **Симметрии** физической системы \leftrightarrow **сохраняющиеся величины** (теорема Нётер).
- ▶ **Цель:** исследовать масштабную инвариантность (дилатации) в классической механике.
- ▶ **Задачи работы:**
 - ▶ Вывести законы сохранения и несохранения дилатационного заряда двумя методами, с использованием глобального и локального параметров симметрии.
 - ▶ Подтвердить аналитические результаты численным моделированием.

Вид преобразования и метод глобального параметра

- ▶ Преобразование координат:

$$q(t) \rightarrow e^{-\lambda} q(e^{2\lambda} t), \quad \lambda = \text{const}$$

оставляет S инвариантным в свободной теории.

- ▶ При фиксированных границах вариация действия $\delta S = 0$ на уравнениях движения.
- ▶ Из принципа наименьшего действия следует сохраняющаяся величина:

$$I = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = \text{const}$$

- ▶ Для свободной частицы ($L = m\dot{q}^2/2$):

$$D = m t \dot{q}^2 - m q \dot{q}$$

Метод локального параметра: сохранение и несохранение

- ▶ Параметр становится функцией времени: $\lambda(t)$, с условиями $\lambda(t_1) = \lambda(t_2) = 0$.
- ▶ Позволяет единым способом получать законы как сохранения, так и несохранения.
- ▶ **Потенциал** $U = -a/q^2$:

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 2 \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{a}{q^2} \right) t - m\dot{q}q = \text{const}$$

(Симметрия сохраняется)

- ▶ **Потенциал** $U = -a/q$:

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{D} + \frac{a}{q} = 0$$

(Симметрия нарушена, получаем закон несохранения)

Численное моделирование и результаты

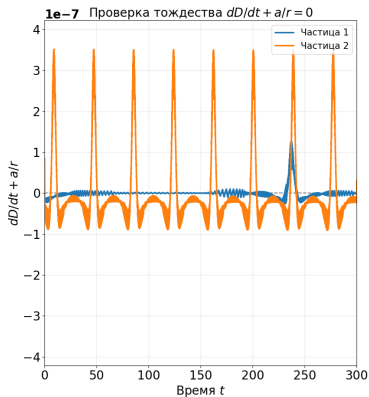
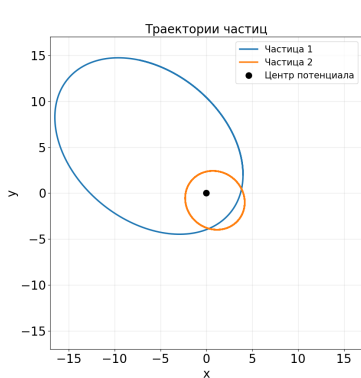


Рис.: Численные решения для потенциала вида $U = -\frac{a}{r}$

Численное моделирование и результаты

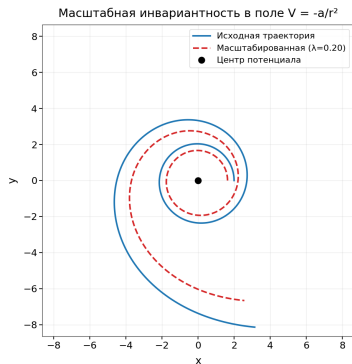


Рис.: Численные решения для потенциала вида $U = -\frac{a}{r^2}$.
Масштабированную траекторию можно получить также при помощи преобразования симметрии.

Заключение и перспективы

- ▶ Изучен метод получения законов сохранения/несохранения при помощи локального параметра симметрии.
- ▶ Показано, что потенциал $-a/r^2$ обладает масштабной инвариантностью, а $-a/r$ — нет.
- ▶ Полученные соотношения можно использовать для проверки численного моделирования.
- ▶ **Перспективы:**
 - ▶ Обобщение на произвольные центрально-симметричные поля $U(r)$.
 - ▶ Исследование механизмов нарушения масштабной симметрии в классической и квантовой механике.

Спасибо за внимание!