Распад ложного вакуума вокруг чёрной дыры

Газизов Ратмир Ленарович

Научный руководитель: Горбунов Дмитрий Сергеевич
доктор физ.-мат. наук, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

30 мая 2024 г.

Введение

Вакуум поля Хиггса метастабильный

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{4}\lambda_{eff}(\phi)\phi^4$$

Поле может туннелировать в истинный вакуум

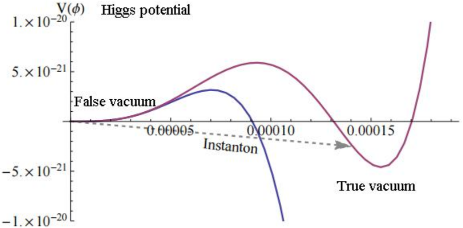


Рис. 1: Эффективный потенциал Хиггса

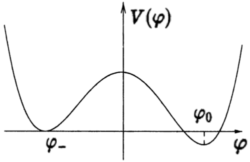
D. Buttazzo et al (2013)

Инстантоны

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi) \right)$$

Вероятность распада ложного вакуума в плоском пространстве-времени:

$$P \sim e^{-S_E}$$



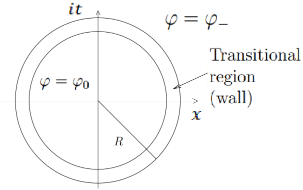
Потенциал с ложным вакуумом

Периодические инстантоны в тепловой ванне (для потенциала $V(\phi)$):

$$T_{Period} = \beta$$

Для высоких температур T:

$$P \sim e^{-E_{sph}/T}$$



Евклидовое решение

Sidney R. Coleman (1977)

Распад ложного вакуума в присутствии ЧД

Температура Хокинга:

$$T_H = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}}$$

Предположение: малые черные дыры имеют высокие температуры $\implies$ значительно увеличивают вероятность распада.

P. Burda et al (2016)

Нужны вычисления из первых принципов

(см. также A. Shkerin, S. Sibiryakov (2021))

1. Постановка задачи.

Способ подробно описывается и обсуждается в статьях A. Shkerin, S. Sibiryakov (2021).
В этом разделе мы приводим теоретическое описание процессов, следуя неопубликованной работе Д.Г. Левкова.

Будем формулировать задачу в пространстве вне горизонта ЧД. Также будем предполагать, что энергия пузыря после распада много меньше массы чёрной дыры $E \ll M_{BH}$.

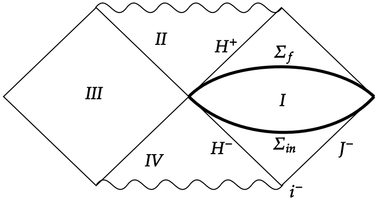


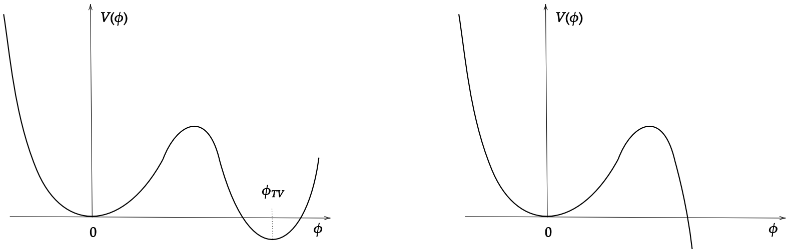
Рис. 4: Диаграмма Пенроуза пространства-времени с ЧД.

1.1 Скалярное поле в метрике Шварцшильда

$$ds^2 = f(r)\,dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad M_{Pl} = 1 \qquad (1)$$

Действие скалярного поля ϕ:

$$S = \int \sqrt{-g}\,d^4x \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi)\right) \qquad (2)$$



(a) (b)

Рис. 5: Потенциалы с ложным вакуумом.

Подстановка:

$$\phi = \frac{\varphi}{r}, x = r + 2M \ln\left(r - 2M\right), \tag{3}$$

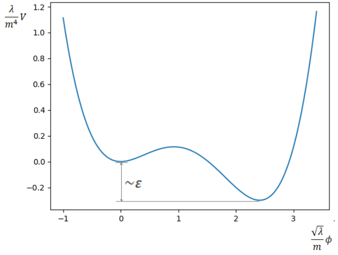
$$S = 4\pi \int dtdx \left(\frac{1}{2}\left(\partial_t \varphi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_x \varphi\right)^2 - \frac{1}{2} U\left(x\right)\varphi^2 - r^2 f\left(r\right) V\left(\frac{\varphi}{r}\right)\right), \tag{4}$$

где $U\left(x\right) = \dfrac{f\left(r\right) f'\left(r\right)}{r} = \dfrac{2M}{r^3}\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)$.

Игрушечный потенциал:

$$V\left(\phi\right) = \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{m\sqrt{\lambda}}{2}\phi^3 + \frac{\lambda}{8}\left(1 - \varepsilon\right)\phi^4 \tag{5}$$

При $\varepsilon \ll 1$ выполняется тонкостенное приближение.



Потенциал V, использованный в

С помощью замены $r \to \dfrac{r}{m}, t \to \dfrac{t}{m}, x \to \dfrac{x}{m}, M \to \dfrac{M}{m}, \varphi \to \dfrac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}$ можно исключить параметры λ и m:

$$S = \frac{4\pi}{\lambda} \int dtdx \left(\frac{1}{2} \left(\partial_t \varphi\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\partial_x \varphi\right)^2 - \frac{1}{2} U\left(x\right) \varphi^2 - \right. \\ \left. - f\left(r\right) \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2r} + \frac{\left(1-\varepsilon\right)\varphi^4}{8r^2} \right) \right) \tag{6}$$

В таком случае система будет зависеть от безразмерного параметра – обезразмеренного радиуса горизонта: $mr_h = 2Mm/M_{Pl}^2$.

1.2 Моды скалярного поля

Малые возмущения около ложного вакуума:

$$V(\phi) \to \frac{m^2\phi^2}{2} \tag{7}$$

$$\partial_t^2\varphi - \partial_x^2\varphi + U(x)\varphi + m^2 f(r(x))\varphi = 0 \tag{8}$$

Положительно- и отрицательно-частотные моды:

$$\varphi_\omega^+(t,x) = f_\omega(x)e^{-i\omega t}, \quad \varphi_\omega^-(t,x) = f_\omega^*(x)e^{i\omega t}, \quad \omega > 0, \tag{9}$$

где

$$-f_\omega'' + (U(x) + f(x)m^2)f_\omega = \omega^2 f_\omega \tag{10}$$

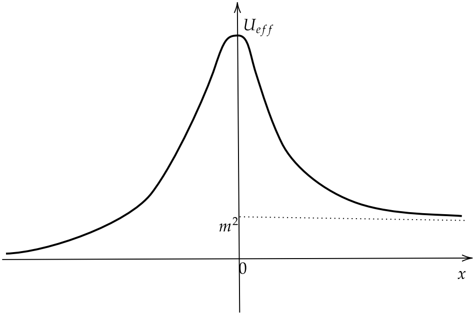


Рис. 7: Качественный вид эффективного потенциала $U_{eff}(x) = U(x) + m^2 f(x)$

Поле φ может быть проквантовано:

$$\varphi(t,x) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \sum_{I=R,L} [\hat{a}_{I,\omega}\varphi^{+}_{I,\omega}(t,x) + \hat{a}^{\dagger}_{I,\omega}\varphi^{-}_{I,\omega}(t,x)], \tag{11}$$

В пространстве в начальный момент времени t_i есть тепловое излучение, и начальное состояние описывается матрицей плотности. Для правых волн:

$$\hat{\rho}_R = e^{-\beta_H \hat{H}_R}, \tag{12}$$

где $\beta_H = 1/T_H = 8\pi M$ – обратная температура Хокинга, и:

$$\hat{H}_R = \int_0^\infty dk\, \omega_k \hat{a}^\dagger_{R,\omega_k} \hat{a}_{R,\omega_k} \tag{13}$$

Для левых волн:

$$\hat{\rho}_L = e^{-\beta_E \hat{H}_L}, \tag{14}$$

где β – обратная температура среды. Полная матрица плотности:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_L \hat{\rho}_R = e^{-\beta_E \hat{H}_L - \beta_H \hat{H}_R} \tag{15}$$

Введём в рассмотрение когерентные состояния $|a_{I,\omega}\rangle$:

$$\hat{a}_{I,\omega}\,|a_{I,\omega}\rangle = a_{I,\omega}\,|a_{I,\omega}\rangle\,,\ I = R, L \tag{16}$$

Матрица плотности для одной моды:

$$\hat{\rho}_{I,\omega} = \sum_n \frac{(\hat{a}^\dagger_{I,\omega})^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,\langle 0|\,\frac{(\hat{a}_{I,\omega})^n}{\sqrt{n!}}e^{-\omega\beta_I} \tag{17}$$

Для полной матрицы плотности:

$$\langle a|\,\hat{\rho}\,|a\rangle = \exp\left[\int_0^\infty d\omega \sum_{I=R,L}\left(-\frac{1}{2}|a_{I,\omega}|^2 - \frac{1}{2}|a'_{I,\omega}|^2 + e^{-\omega\beta_I}a^*_{I,\omega}a'_{I,\omega}\right)\right] \tag{18}$$

В дальнейшем нам понадобится выражение матричного элемента $\langle\varphi_i|\,\hat{\rho}\,|\varphi_i'\rangle$, который можно записать в виде:

$$\langle\varphi_i|\,\hat{\rho}\,|\varphi_i'\rangle = \int DaDa^* Da' Da'^* \langle\varphi_i|a\rangle \langle a|\,\hat{\rho}\,|a'\rangle \langle a'|\varphi_i'\rangle \tag{19}$$

Можно вычислить в седловой точке:

$$\langle\varphi_i|\,\hat{\rho}\,|\varphi_i'\rangle \propto \exp\left[\frac{i}{2}\int dx\left(-\varphi_i(x)\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i} - \varphi_i'(x)\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi_i'}\right)\right] \tag{20}$$

1.3 Вероятность распада

Амплитуда вероятности записывается в виде:

$$\langle\varphi_f|\,\hat{S}\,|\varphi_i\rangle = \langle\varphi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\varphi_i\rangle = \int D\varphi e^{iS[\varphi]}, \qquad (21)$$

t_i, t_f — начальное и конечное время соответственно, φ_i и φ_f - начальная и конечная конфигурации соответственно, $\hat{S}$ – оператор эволюции.

Вероятность туннелирования через функциональный интеграл:

$$\mathcal{P} = \int D\varphi_f D\varphi_i D\varphi_i' \langle\varphi_f|\,\hat{S}\,|\varphi_i\rangle \langle\varphi_i|\,\hat{\rho}\,|\varphi_i'\rangle \langle\varphi_i'|\,\hat{S}^\dagger\,|\varphi_f\rangle \qquad (22)$$

где φ_i и φ_i' – начальные конфигурации поля, φ_f – конечная конфигурация, соответствующая истинному вакууму.

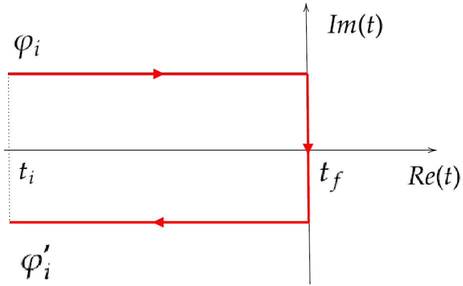
Поля $\varphi(t,x)$ и $\varphi'(t,x)$ можно представить как единое поле $\varphi_{\mathcal{C}}$ на контуре $\mathcal{C}$.

Тогда выражение для вероятности принимает вид:

$$\mathcal{P} = \int D\varphi_{\mathcal{C}} D\varphi_i D\varphi_i' e^{iS[\varphi_{\mathcal{C}}]} \left\langle \varphi_i \right| \hat{\rho} \left| \varphi_i' \right\rangle \tag{23}$$

В седловой точке:

$$\boxed{\mathcal{P} \sim e^{iS[\varphi_{cl}]+B[\varphi_{cl}]}} \tag{24}$$



Контур на временной комплексной плоскости

S.Yu. Khlebnikov et al (1991)

V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov (1996)

Начальные условия

Граничный член $B[\varphi_{cl}]$ имеет вид:

$$B[\varphi_{cl}] = \frac{i}{2} \int dx \left[\varphi_{cl} \partial_t \varphi_{cl} \Big|_{t_i^{up}} + \varphi_{cl} \partial_t \varphi_{cl} \Big|_{t_i^{low}} \right] \tag{25}$$

Их можно выразить в виде условий на коэффициенты в разложении на моды для свободного поля $\varphi_{cl}(t_i, x)$ при $\mathrm{Re}(t_i) \to -\infty$:

$$\varphi(t_i^{up}, x) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \sum_{I=R,L} \left[c_{I,\omega}^{up} \varphi_{I,\omega}^{+}(t_i^{up}, x) + \bar{c}_{I,\omega}^{up} \varphi_{I,\omega}^{-}(t_i^{up}, x) \right] \tag{26}$$

$$\begin{aligned} c_{I,\omega}^{up} &= e^{-\omega\beta_I} c_{I,\omega}^{low} \\ e^{-\omega\beta_I} \bar{c}_{I,\omega}^{up} &= \bar{c}_{I,\omega}^{low} \end{aligned} \tag{27}$$

Значения поля φ_{cl} являются комплексно сопряженными в верхней и нижней полуплоскостях:

$$(\varphi_{cl}(t,x))^* = \varphi_{cl}(t^*,x) \tag{28}$$

Следствием этого являются условия в $t = t_f$:

$$\boxed{\mathrm{Im}[\varphi_{cl}(t_f,x)] = \mathrm{Re}[\partial_\tau \varphi_{cl}(t_f,x)] = 0} \tag{29}$$

и соотношения $c^{low}_{l,\omega} = (\overline{c}^{up}_{l,\omega})^*$, $\overline{c}^{low}_{l,\omega} = (c^{up}_{l,\omega})^*$. Используя их, получаем:

$$\boxed{c^{up}_{l,\omega} = e^{-\omega\beta_l}(\overline{c}^{up}_{l,\omega})^*} \tag{30}$$

Таким образом, мы можем рассматривать только верхнюю часть контура $\mathcal{C}$

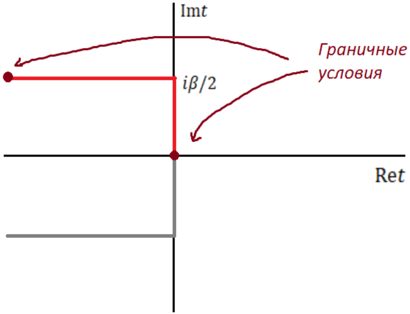


Рис. 9: Верхняя часть контура $\mathcal{C}$

При взятии действия по частям и подстановке уравнений движения выражение для вероятности принимает вид:

$$\boxed{\mathcal{P} \sim e^{i\tilde{S}[\varphi_{cl}]}} \tag{31}$$

$$\tilde{S}[\varphi_{cl}] = 4\pi \int_{\mathcal{C}} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\; r^2(x) f(r) \left[\frac{1}{2} V_{int}' \left(\frac{\varphi}{r}\right) - V_{int} \left(\frac{\varphi}{r}\right)\right] \tag{32}$$

где $V(\phi)$ – неквадратичная часть потенциала. Заметим, что вклад дает только мнимая часть $\tilde{S}$, то есть $\mathcal{P} \sim e^{-\mathrm{Im}\tilde{S}[\varphi_{cl}]}$.
Классическое уравнение поля можно вывести из действия:

$$\boxed{\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + U(x)\,\varphi + r^2 f\,(r(x))\, V\left(\frac{\varphi}{r(x)}\right) = 0} \tag{33}$$

Дополнительные граничные условия:

$$\boxed{\partial_x \varphi(t, -\infty) = \partial_x \varphi(t, +\infty) = 0} \tag{34}$$

Равновесный случай

Период в случае теплового равновесия $\beta = \beta_H = \beta_E$
Упрощенные граничные условия:

$$\partial_\tau \varphi(0, x) = \partial_\tau \varphi(\beta/2, x) = 0 \quad (35)$$

$$\partial_x \varphi(t, -\infty) = \partial_x \varphi(t, +\infty) = 0 \quad (36)$$

Вероятность распада:

$$\mathcal{P} \sim e^{-S_E} \quad (37)$$

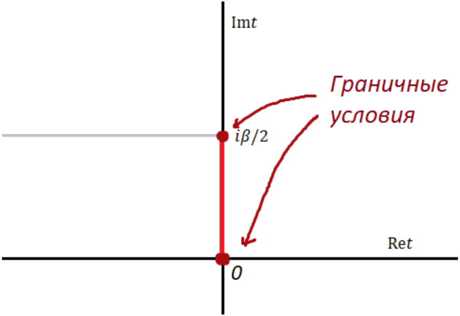


Рис. 10: Евклидовая часть контура $\mathcal{C}$

2. Численное моделирование

Будем использовать метод Ньютона-Рафсона.
Введём сетку $(N_t \times N_x)$: $x_0 = -L$, $x_{N_x-1} = +L$, $t_0 = \mathrm{Re}[t_0] + i\mathrm{Im}[t_0]$, $t_{N_t-1} = 0$, $\varphi_{ij} = \varphi(t_i, x_j)$, $r_j = r(x_j)$.

$$dx_j = x_{j+1} - x_j, \quad j = 0, \ldots, N_x - 2 \tag{38}$$

$$\begin{gathered} d\tilde{x}_j = \frac{dx_{j-1} + dx_j}{2}, \quad j = 1, \ldots, N_x - 2 \\ d\tilde{x}_0 = \frac{dx_0}{2}, \quad d\tilde{x}_{N_x-1} = \frac{dx_{N_x-2}}{2} \end{gathered} \tag{39}$$

Аналогично для t.

A. N. Kuznetsov and P. G. Tinyakov (1997)

Дискретизованное уравнение:

$$
\begin{aligned}
F_{ij}(\varphi) = -\frac{1}{d\tilde{t}_i}\left(\frac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{ij}}{dt_i}+\frac{\varphi_{i-1,j}-\varphi_{ij}}{dt_{i-1}}\right)+\\
+\frac{1}{d\tilde{x}_j}\left(\frac{\varphi_{i,j+1}-\varphi_{ij}}{dx_j}+\frac{\varphi_{i,j-1}-\varphi_{ij}}{dx_{j-1}}\right)-\\
-U(r_j)\varphi_{ij}-r_j^2 f(r_j)V'_\varphi\left(\frac{\varphi_{ij}}{r_j}\right)=0,
\end{aligned}
\tag{40}
$$

дискретизованные граничные условия:

$$
\frac{\varphi_{i1}-\varphi_{i0}}{dx_0}=\frac{\varphi_{i,N_x-1}-\varphi_{i,N_x-2}}{dx_{N_x-2}}=0 \tag{41}
$$

В общем случае начальное условие:

$$
\hat{B}^0\boldsymbol{\varphi}_0+\hat{B}^+\boldsymbol{\varphi}_1=0, \tag{42}
$$

Конечное условие:

$$\frac{\mathrm{Im}[\varphi_{N_t-1,j}] + \mathrm{Im}[\varphi_{N_t-2,j}]}{2} = \frac{\mathrm{Re}[\varphi_{N_t-1,j}] - \mathrm{Re}[\varphi_{N_t-2,j}]}{dt_{N_t-1}} = 0 \tag{43}$$

Для периодического инстантона $t_0 = i\beta/2$:

$$\frac{\varphi_{1j} - \varphi_{0j}}{dt_0} = \frac{\varphi_{N_t-1,j} - \varphi_{N_t-2,j}}{dt_{N_t-2}} = 0 \tag{44}$$

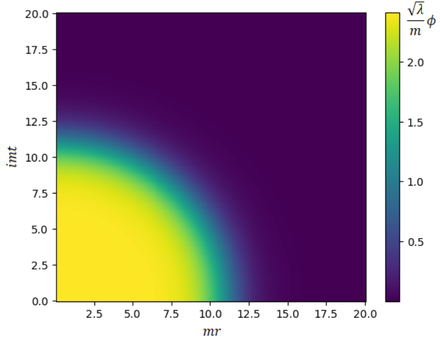
Таким образом, получаем систему нелинейных уравнений

$$\boxed{\mathbf{F}\left(\varphi\right) = 0} \tag{45}$$

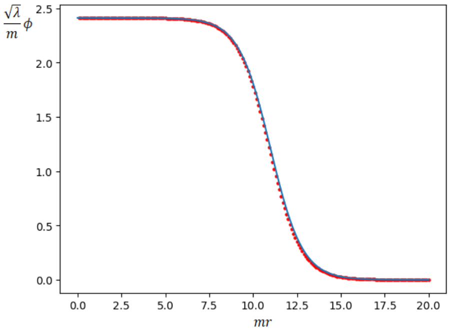
$$\boxed{\hat{J}\left[\varphi_0\right]\mathbf{u} = -\mathbf{F}\left(\varphi_0\right)}, \tag{46}$$

где $\hat{J}\left[\varphi\right]$ – якобиан функции $\mathbf{F}\left(\varphi\right)$, φ решение уравнения, а φ_0 приближенное решение, $\varphi = \varphi_0 + \mathbf{u}$

3. Результаты

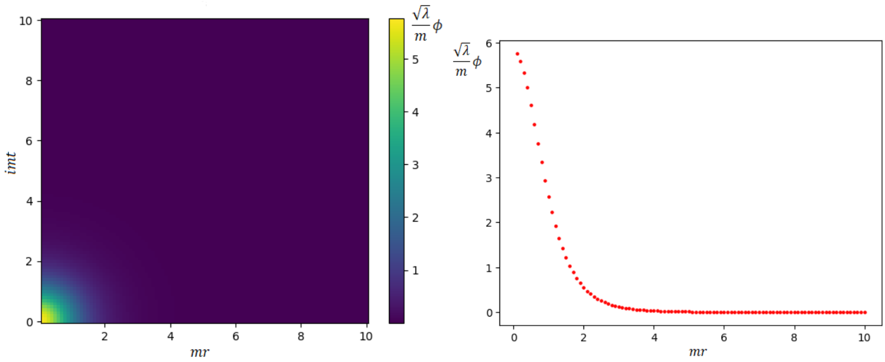


(a)



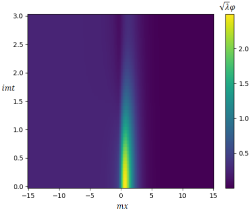
(b)

Рис. 11: (a) Инстантон $\varphi(t, x)$ в плоском евклидовом пространстве-времени при $\varepsilon = 0.1$. (б) Профиль инстантона в момент времени $t = 0$ (точки) и тонкостенное приближение (линия). Решетка $N_t \times N_x = 200 \times 200$.

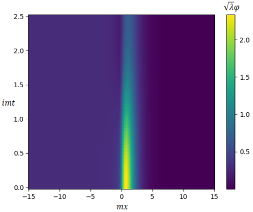


(a) (b)

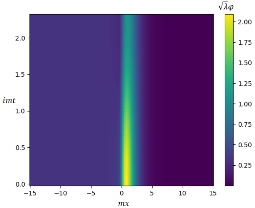
Рис. 12: (a) Инстантон $\varphi(t,x)$ в плоском евклидовом пространстве-времени при $\varepsilon = 1$. (б) Профиль инстантона в момент времени $t = 0$. $(N_t \times N_x = 100 \times 100)$.



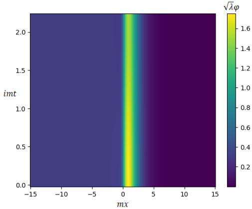
(a) $m\beta/2 = 3$



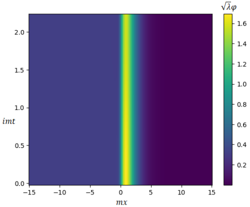
(b) $m\beta/2 = 2.5$



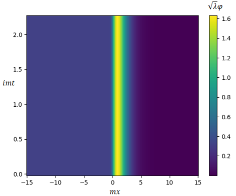
(c) $m\beta/2 = 2.3$



(d) $m\beta/2 = 2.22$

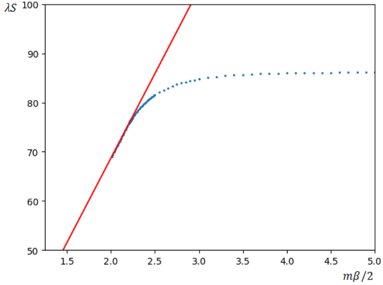


(e) $m\beta/2 = 2.217$

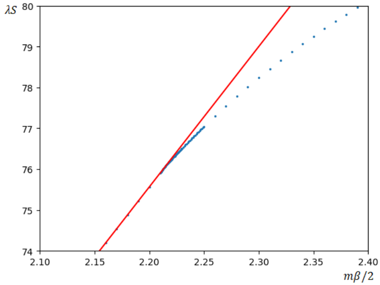


(f) $m\beta/2 = 2.215$

Рис. 13: Периодические инстантоны при разных β в присутствии ЧД с радиусом $mr_h = 2Mm/M_{Pl}^2 = 0.1$. Период и масса здесь независимые параметры. ($N_t \times N_x = 50 \times 300$).



(a)



(b)

Рис. 14: Евклидовое действие S как функция от периода β. Рассматриваются нетривиальные периодические инстантоны (синий) и статические сфалероны (красный) при $mr_h = 0.1$

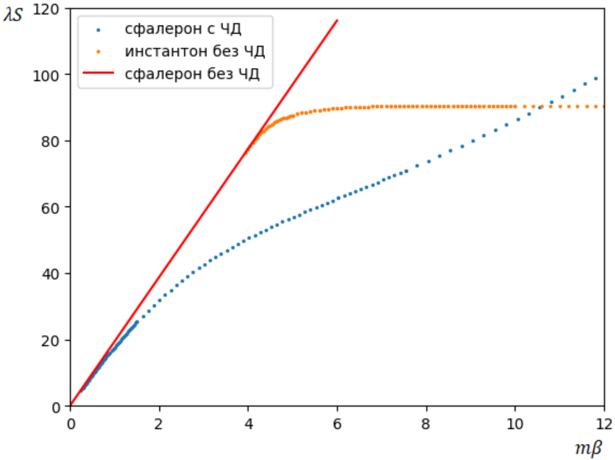


Рис. 15: Евклидовое действие S как функция от обратной температуры среды β. Синие и оранжевые точки соответствуют распаду с ЧД с $m\beta_H = m\beta$ и без ЧД соответственно. Красная линия показывает сфалероны в плоском пространстве, в которые переходят инстантоны при $m\beta \to 0$.

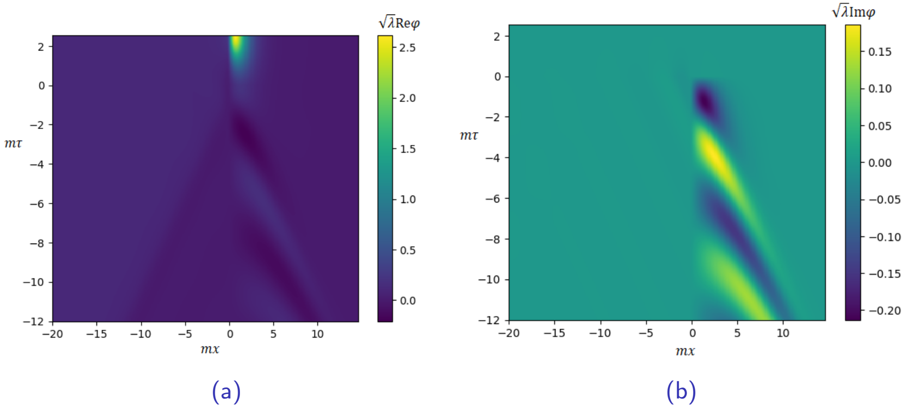


Рис. 16: Решение на верхней части контура $\mathcal{C}$ при $m\beta_E = \infty$, $m\beta_H = 10 \times 8\pi Mm/M_{Pl}^2 \simeq 5.03$, $mr_h = 0.04$. Здесь по вертикальной оси отображен параметр τ вдоль временного контура такой, что $\tau = \mathrm{Re} t_i = -12$ соответствует $t = t_i$, $\tau = 0 \leftrightarrow t = i\beta_H/2$, $\tau = +\beta_H/2 \leftrightarrow t = 0$. То есть $\tau = 0$ обозначает точку поворота на контуре. ($N_t \times N_x = 900 \times 400$).

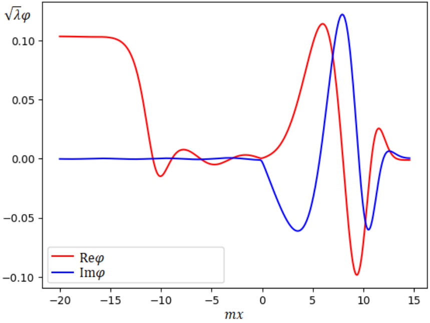


Рис. 17: Вещественная и мнимая часть решения (рис.16) в начальный момент времени. ($N_t \times N_x = 900 \times 400$).

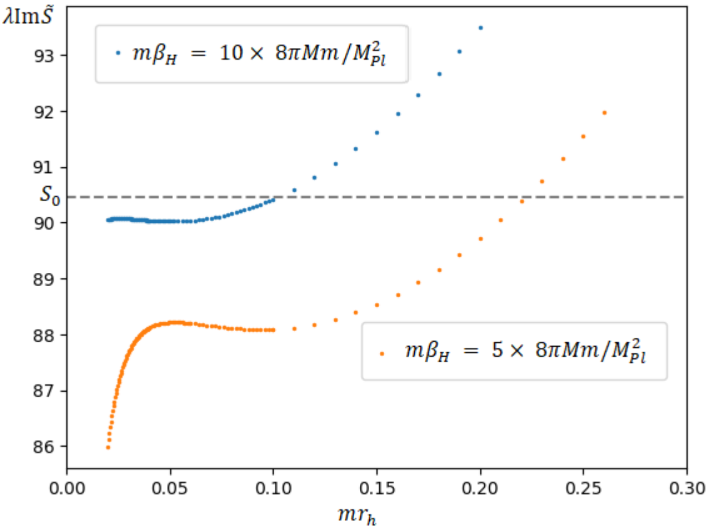


Рис. 18: Зависимость коэффициента экспоненциального подавления от радиуса горизонта ЧД при разном соотношении температуры и массы ЧД.

Выводы

- При тепловом равновесии физические решения $\beta = \beta_H$, описывающие процесс, являются статическими сфалеронами
- $\beta \to 0$: сфалероны с ЧД стремятся к сфалеронам без ЧД. Это означает, что малые ЧД $mr_h \ll mr_b$ не меняют значительно сфалероны в горячей среде и соответствующие вероятности, в том числе.
- $\beta \to \infty$: Большие ЧД $mr_h \not\ll mr_b$ значительно изменяют геометрию пространства $\implies$ меняют сфалеронные решения и вероятность распада.
- Вероятность распада вокруг ЧД сильно подавляется для больших ЧД, т.к. в таком случае нужно родить большой пузырь истинного вакуума
- Тем не менее существует область размеров ЧД, при которых вероятность распада увеличивается.

Заключение

- Физических решений при температурах излучения Хокинга и рассмотрение диапазона малых ЧД.
- более реалистичный потенциал, такой как $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$, чтобы оценить вероятность распада вакуума Хиггса, индуцированного ЧД.

Благодарности

Автор благодарен Дмитрию Сергеевичу Горбунову и Дмитрию Геннадиевичу Левкову за научное руководство, полезные обсуждения и помощь в подготовке данной работы.

Спасибо за внимание