

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«РАСПАД ЛОЖНОГО ВАКУУМА ВОКРУГ ЧЁРНОЙ
ДЫРЫ»**

Выполнил студент
243м группы
Газизов Ратмир Ленарович

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____

МОСКВА

2024

Оглавление

Введение	2
1. Постановка задачи	4
1.1 Скалярное поле в метрике Шварцшильда	4
1.2 Моды скалярного поля	7
1.3 Вероятность распада	11
2. Численное моделирование	15
3. Результаты	17
Выводы	22
Заключение	23
Список использованных источников	24

ВВЕДЕНИЕ

Согласно экспериментальным данным и вычислениям в рамках Стандартной Модели, вакуум Хиггса является метастабильным [1] и может распасться из-за квантового туннелирования. Существует полуклассический формализм для расчёта вероятности распада ложного вакуума в плоском пространстве-времени [2]. Этот формализм основан на классических решениях в евклидовом времени – инстантонах. Евклидовое действие инстантона S даёт значение экспоненциального подавления вероятности распада ложного вакуума $P \sim e^{-S}$. Если распад вакуума происходит в среде с температурой T , то рассматриваются инстантоны периодические в евклидовом времени с периодом $\beta = 1/T$. При высоких температурах инстантоны становятся независимыми от времени решениями – сфалеронами, и соответствующая вероятность распада дается выражением $P \sim \exp(-E_{sph}/T)$, где E_{sph} – энергия сфалерона. В таком случае распад ложного вакуума происходит из-за тепловых флуктуаций.

Было предположено, что малые чёрные дыры (ЧД) могут увеличивать вероятность распада вакуума в их окрестности [3]. Это тесно связано с тем, что малые ЧД имеют высокие температуры $T_H = M_{Pl}^2/8\pi M_{BH}$ и нагревают окружающую среду. Однако этот вывод основан на определенных предположениях, которые подверглись критике в литературе [4]. Следует отметить, что все еще не существует надежного вычисления вероятности распада ложного вакуума в окрестности ЧД, поэтому нужны вычисления из первых принципов [5].

В главе 1 описывается последовательный квазиклассический метод расчета вероятности распада ложного вакуума в присутствии ЧД с учетом излучения ЧД и среды. В этом методе коэффициент экспоненциального подавления представлен мнимой частью действия

комплексного классического решения уравнения поля на контуре в комплексной временной плоскости. Излучение учитывается как граничные условия. В случае термодинамического равновесия черной дыры со средой соответствующие квазиклассические решения являются периодическими в евклидовом времени. В главе 2 описывается способ получения численных результатов, основанный на методе Ньютона-Рафсона. В главе 3 представлены численные результаты в равновесном и неравновесном (с малой температурой ЧД) случаях. Сравнение зависимостей вероятности распада от температуры с ЧД и без ЧД позволяет сделать определенные выводы о влиянии ЧД на распад вакуума.

1. Постановка задачи

Способ, с помощью которого в работе рассчитывается вероятность распада ложного вакуума, индуцированного ЧД, подробно описывается и обсуждается в статьях [5, 6].

В этом разделе мы приводим теоретическое описание процессов, следуя неопубликованной работе Д.Г. Левкова.

1.1 Скалярное поле в метрике Шварцшильда

Будем формулировать задачу в пространстве вне горизонта ЧД (рис. 1.1), ожидая, что динамика внутри горизонта не влияет на скорость распада, измеряемую наблюдателем вне горизонта. Для этого удобно использовать метрику Шварцшильда.

Также будем предполагать, что энергия пузыря после распада много меньше массы чёрной дыры $E \ll M_{BH}$, чтобы пренебречь влиянием поля на метрику, и будем считать метрику стационарной.

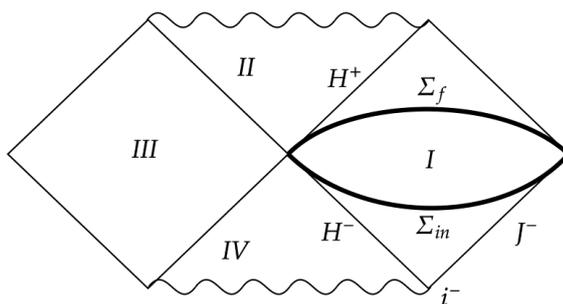


Рис. 1.1: Диаграмма Пенроуза пространства-времени с ЧД. Метрика Шварцшильда охватывает область I . Рассматривается эволюция поля между гиперповерхностями Σ_{in} и Σ_f . В следующих разделах на многообразии Σ_{in} будет определено начальное квантовое состояние системы.

$$ds^2 = f(r) dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad M_{Pl} = 1 \quad (1.1)$$

Действие скалярного поля ϕ в таком случае имеет вид:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (1.2)$$

где метрика определяется из (1.1):

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(f(r), -\frac{1}{f(r)}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (1.3)$$

Потенциал $V(\phi)$ имеет локальный минимум при $\phi = 0$ со значением $V(0) = 0$, который соответствует ложному вакууму. Потенциал может или иметь истинный вакуум, или быть неограниченным снизу, обе ситуации представлены на рис. 1.2.

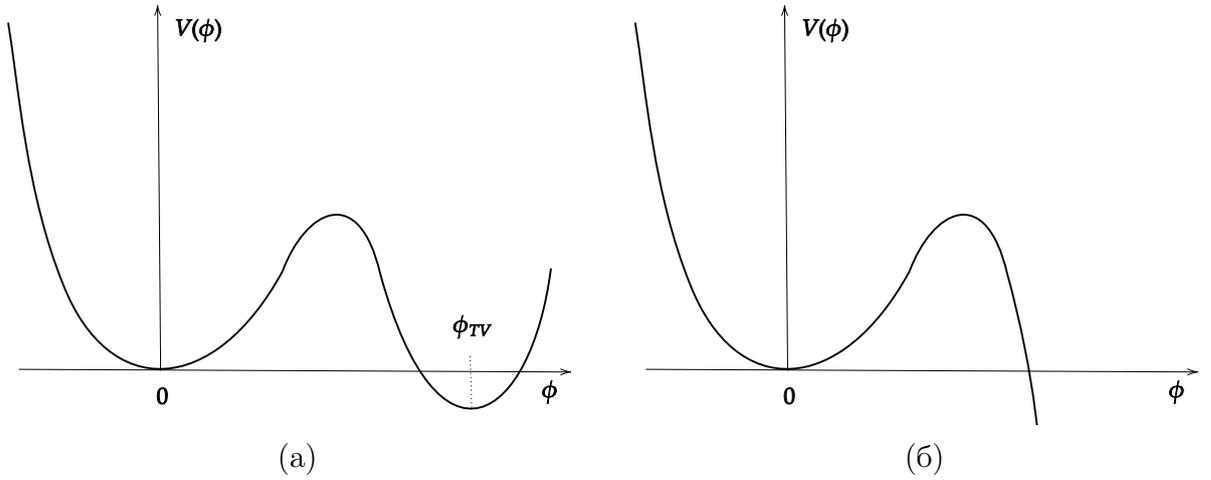


Рис. 1.2: Потенциалы с ложным вакуумом. (а) Потенциал с истинным вакуумом $\phi = \phi_{TV}$ (б) Потенциал неограниченный снизу.

Введём так называемую черепашую координату x :

$$\frac{dr}{dx} = f(r) \quad (1.4)$$

$$x = r + 2M \ln(r - 2M) \quad (1.5)$$

$r(x)$ является монотонной однозначной функцией x такой, что $r \rightarrow r_h = 2M$ при $x \rightarrow -\infty$, и $r \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Будем считать, что поле

является сферически симметричным, а также сделаем замену $\phi = \frac{\varphi}{r}$. Тогда, подставляя новые переменные и интегрируя по частям, получаем:

$$S = 4\pi \int dt dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \frac{1}{2} U(x) \varphi^2 - r^2 f(r) V\left(\frac{\varphi}{r}\right) \right], \quad (1.6)$$

где $U(x) = \frac{f(r) f'(r)}{r} = \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$.

В работе будет производиться расчёт для игрушечного потенциала (рис.1.3):

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{m\sqrt{\lambda}}{2} \phi^3 + \frac{\lambda}{8} (1 - \varepsilon) \phi^4 \quad (1.7)$$

Заметим, что при $\varepsilon \ll 1$ можно пользоваться тонкостенным приближением.

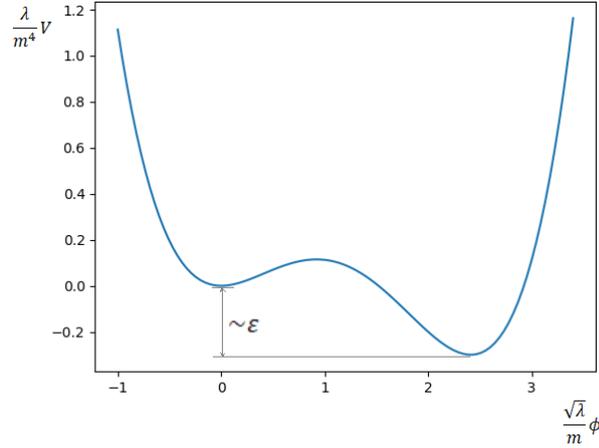


Рис. 1.3: Потенциал $V(\phi)$

С помощью замены $r \rightarrow \frac{r}{m}, t \rightarrow \frac{t}{m}, x \rightarrow \frac{x}{m}, M \rightarrow \frac{M}{m}, \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{\sqrt{\lambda}}$ можно исключить параметры λ и m :

$$S = \frac{4\pi}{\lambda} \int dt dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \frac{1}{2} U(x) \varphi^2 - f(r) \left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^3}{2r} + \frac{(1 - \varepsilon) \varphi^4}{8r^2} \right) \right] \quad (1.8)$$

В таком случае система будет зависеть от безразмерного параметра — безразмерного радиуса горизонта — $mr_h = 2Mm/M_{Pl}^2$ (здесь восстановлена масса Планка M_{Pl} и использованы старые размерные переменные r и M)

1.2 Моды скалярного поля

Рассмотрим малые возмущения около ложного вакуума. Тогда:

$$V(\phi) \rightarrow \frac{m^2\phi^2}{2} \quad (1.9)$$

в случае массивного поля (1.7). Получаем линейное уравнение поля:

$$\partial_t^2\varphi - \partial_x^2\varphi + U(x)\varphi + m^2f(r(x))\varphi = 0 \quad (1.10)$$

Поле φ может быть проквантовано с использованием положительно- и отрицательно-частотных мод:

$$\varphi_\omega^+(t, x) = f_\omega(x)e^{-i\omega t}, \quad \varphi_\omega^-(t, x) = f_\omega^*(x)e^{i\omega t}, \quad \omega > 0, \quad (1.11)$$

где моды $f_\omega(x)$ удовлетворяют уравнению на собственные значения:

$$-f_\omega'' + (U(x) + f(x)m^2)f_\omega = \omega^2 f_\omega \quad (1.12)$$

Вблизи и вдали от горизонта ЧД скалярное поле является асимптотически свободным. Вблизи горизонта $f(r) = 1 - 2M/r \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, и тогда:

$$S = 4\pi \int dt dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x\varphi)^2 \right], \quad (1.13)$$

что соответствует свободному безмассовому скалярному полю. Вдали от горизонта $f(r) = 1 - 2M/r \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$

$$S = 4\pi \int dt dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x\varphi)^2 - r^2 V\left(\frac{\varphi}{r}\right) \right], \quad (1.14)$$

что соответствует свободному массивному полю. Например, для потенциала (1.7):

$$r^2 V\left(\frac{\varphi}{r}\right) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{m\sqrt{\lambda}}{2}\frac{\varphi^3}{r} + \frac{\lambda(1-\varepsilon)}{8}\frac{\varphi^4}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad (1.15)$$

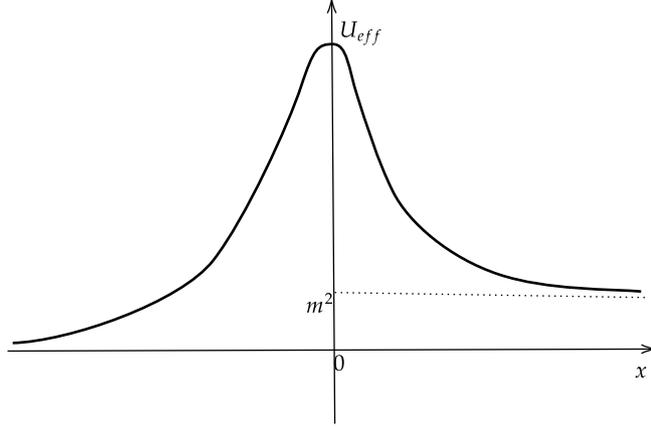


Рис. 1.4: Качественный вид эффективного потенциала $U_{eff}(x) = U(x) + m^2 f(x)$

Уравнение (1.12) имеет два линейно независимых решения $f_{R,\omega}$ и $f_{L,\omega}$ при $\omega > m$, и из (1.13) и (1.14) известно их асимптотическое поведение:

$$f_{R,\omega} = \begin{cases} \alpha_\omega e^{i\omega x} + \beta_\omega e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty \\ \gamma_\omega e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.16)$$

$$f_{L,\omega} = \begin{cases} \tilde{\beta}_\omega e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty \\ \tilde{\gamma}_\omega e^{ikx} + \tilde{\delta}_\omega e^{-ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1.17)$$

$$k = \sqrt{\omega^2 - m^2} \quad (1.18)$$

Эти решения описывают правую и левую волны соответственно, которые проходят и отражаются на потенциале $U_{eff}(x) = U(x) + m^2 f(x)$ (рис. 1.4). Они удовлетворяют следующим выражениям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_{R,\omega}(x) f_{L,\omega'}^*(x) = 0 \quad (1.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_{R,\omega}(x) f_{R,\omega'}^*(x) = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (1.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_{L,\omega}(x) f_{L,\omega'}^*(x) = 2\pi\delta(\omega - \omega') \quad (1.21)$$

Это означает, что решения $f_{R,\omega}$ и $f_{L,\omega}$ ортогональны друг другу и нормированы на δ -функцию. В случае $\omega < m$ $f_{L,\omega} = 0$ и $\gamma_\omega = 0$. Также

выполняется условие полноты:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{I=R,L} f_{I,\omega}(x) f_{I,\omega}^*(x') = \delta(x - x') \quad (1.22)$$

Итак, поле φ может быть проквантовано с помощью мод $f_{I,\omega}(x)$:

$$\varphi(t, x) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \sum_{I=R,L} [\hat{a}_{I,\omega} \varphi_{I,\omega}^+(t, x) + \hat{a}_{I,\omega}^\dagger \varphi_{I,\omega}^-(t, x)], \quad (1.23)$$

где $\hat{a}_{I,\omega}$ и $\hat{a}_{I,\omega}^\dagger$ — операторы уничтожения и рождения соответственно, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[\hat{a}_{I,\omega}, \hat{a}_{I,\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$

Введём в рассмотрение когерентные состояния $|a_{I,\omega}\rangle$:

$$\hat{a}_{I,\omega} |a_{I,\omega}\rangle = a_{I,\omega} |a_{I,\omega}\rangle, \quad I = R, L \quad (1.24)$$

с условием полноты:

$$\int DaDa^* |a\rangle \langle a| = \mathbb{1} \quad (1.25)$$

Когерентное состояние можно записать в виде:

$$|a\rangle = \exp \left[\int_0^\infty d\omega \sum_{I=R,L} \left(-\frac{1}{2} |a_{I,\omega}|^2 + a_{I,\omega} \hat{a}_{I,\omega}^\dagger \right) \right] |0\rangle \quad (1.26)$$

В пространстве в начальный момент времени t_i есть тепловое излучение, и начальное состояние должно описываться матрицей плотности. Для правых волн [7]:

$$\hat{\rho}_R = e^{-\beta_H \hat{H}_R}, \quad (1.27)$$

где $\beta_H = 1/T_H = 8\pi M$ — обратная температура Хокинга, и:

$$\hat{H}_R = \int_0^\infty dk \omega_k \hat{a}_{R,\omega_k}^\dagger \hat{a}_{R,\omega_k} \quad (1.28)$$

Для левых волн:

$$\hat{\rho}_L = e^{-\beta_E \hat{H}_L}, \quad (1.29)$$

где β_E — обратная температура среды. Полная матрица плотности:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_L \hat{\rho}_R = e^{-\beta_E \hat{H}_L - \beta_H \hat{H}_R} \quad (1.30)$$

Далее будем обозначать:

$$\beta_I = \begin{cases} \beta_H, I = R \\ \beta_E, I = L \end{cases} \quad (1.31)$$

Для одной моды матрицу плотности можно представить в виде:

$$\hat{\rho}_{I,\omega} = \sum_n \frac{(\hat{a}_{I,\omega}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \langle 0| \frac{(\hat{a}_{I,\omega})^n}{\sqrt{n!}} e^{-\omega\beta_I} \quad (1.32)$$

и тогда можно вычислить:

$$\langle a | \hat{\rho}_{I,\omega} | a \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} |a_{I,\omega}|^2 - \frac{1}{2} |a'_{I,\omega}|^2 + e^{-\omega\beta_I} a_{I,\omega}^* a'_{I,\omega} \right] \quad (1.33)$$

Для полной матрицы плотности:

$$\langle a | \hat{\rho} | a \rangle = \exp \left[\int_0^\infty d\omega \sum_{I=R,L} \left(-\frac{1}{2} |a_{I,\omega}|^2 - \frac{1}{2} |a'_{I,\omega}|^2 + e^{-\omega\beta_I} a_{I,\omega}^* a'_{I,\omega} \right) \right] \quad (1.34)$$

В дальнейшем нам понадобится выражение матричного элемента $\langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi'_i \rangle$, который можно записать в виде:

$$\langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi'_i \rangle = \int Da Da^* Da' Da'^* \langle \varphi_i | a \rangle \langle a | \hat{\rho} | a' \rangle \langle a' | \varphi'_i \rangle \quad (1.35)$$

и нам понадобится формула для волновой функции когерентного состояния:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i | a \rangle \propto \exp & \left[-\frac{1}{2} \int dx dx' A(x, x') \varphi_i(x) \varphi_i(x') \right. \\ & + \int d\omega dx \sqrt{\omega/\pi} \sum_I f_{I,\omega}(x) \varphi_i(x) a_{I,\omega} e^{-i\omega t_i} \\ & \left. - \frac{1}{2} \int d\omega \left(\sum_I |a_{I,\omega}|^2 + \sum_{I,J} B_{IJ} a_{I,\omega} a_{J,\omega} e^{-2i\omega t_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.36)$$

где

$$A(x, x') = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \sum_I f_{I,\omega}(x) f_{I,\omega}^*(x') \quad (1.37)$$

$$2\pi B_{IJ} \delta(\omega - \omega') = \int dx f_{I,\omega}(x) f_{J,\omega}(x) \quad (1.38)$$

Можно вычислить в седловой точке:

$$\langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi'_i \rangle \propto \exp \left[\frac{i}{2} \int dx \left(-\varphi_i(x) \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi_i} - \varphi'_i(x) \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi'_i} \right) \right] \quad (1.39)$$

1.3 Вероятность распада

Будем искать вероятность распада с помощью функционального интеграла [8, 9]. Амплитуда вероятности записывается в виде:

$$\langle \varphi_f | \hat{S} | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \varphi_i \rangle = \int D\varphi e^{iS[\varphi]}, \quad (1.40)$$

t_i, t_f – начальное и конечное время соответственно, $\varphi_i(x)$ и $\varphi_f(x)$ – начальная и конечная конфигурации соответственно, \hat{S} – оператор эволюции. Для вероятности туннелирования из состояния в ложном вакууме, описываемого матрицей плотности $\hat{\rho}$, в истинный вакуум получаем:

$$\mathcal{P} = \int D\varphi_f D\varphi_i D\varphi'_i \langle \varphi_f | \hat{S} | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi'_i \rangle \langle \varphi'_i | \hat{S}^\dagger | \varphi_f \rangle \quad (1.41)$$

где $\varphi_i(x)$ и $\varphi'_i(x)$ – начальные конфигурации поля, $\varphi_f(x)$ – конечная конфигурация, соответствующая истинному вакууму. Поля $\varphi(t, x)$ и $\varphi'(t, x)$ можно представить как единое поле φ_C на контуре \mathcal{C} (рис. 1.5). Тогда выражение для вероятности принимает вид:

$$\mathcal{P} = \int D\varphi_C D\varphi_i D\varphi'_i e^{iS[\varphi_C]} \langle \varphi_i | \hat{\rho} | \varphi'_i \rangle \quad (1.42)$$

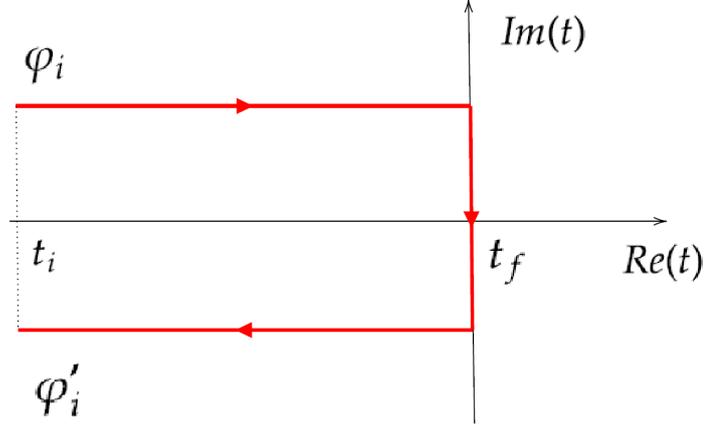


Рис. 1.5: Контур \mathcal{C} на временной комплексной плоскости для расчета вероятности распада.

Выполняя интегрирование функционального интеграла в приближении седловой точки, получаем выражение вида:

$$\mathcal{P} \sim e^{iS[\varphi_{cl}] + B[\varphi_{cl}]} \quad (1.43)$$

φ_{cl} удовлетворяет классическим уравнениям поля на контуре \mathcal{C} , $S[\varphi_{cl}]$ – действие поля φ_{cl} , $B[\varphi_{cl}]$ описывает вклад матрицы плотности в подынтегральное выражение (1.42). Граничный член $B[\varphi_{cl}]$ имеет вид:

$$B[\varphi_{cl}] = \frac{i}{2} \int dx \left[\varphi_{cl} \partial_t \varphi_{cl} \Big|_{t_i^{up}} + \varphi_{cl} \partial_t \varphi_{cl} \Big|_{t_i^{low}} \right] \quad (1.44)$$

Начальные условия получаются варьированием по φ_i и φ'_i подынтегрального выражения 1.42. Их можно выразить в виде условий на коэффициенты в разложении на моды для свободного поля $\varphi_{cl}(t_i, x)$ при $\text{Re}(t_i) \rightarrow -\infty$:

$$\varphi(t_i^{up}, x) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \sum_{I=R,L} \left[c_{I,\omega}^{up} \varphi_{I,\omega}^+(t_i^{up}, x) + \bar{c}_{I,\omega}^{up} \varphi_{I,\omega}^-(t_i^{up}, x) \right] \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} c_{I,\omega}^{up} &= e^{-\omega\beta_I} c_{I,\omega}^{low} \\ e^{-\omega\beta_I} \bar{c}_{I,\omega}^{up} &= \bar{c}_{I,\omega}^{low} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Значения поля φ_{cl} являются комплексно сопряженными в верхней и

нижней полуплоскостях:

$$(\varphi_{cl}(t, x))^* = \varphi_{cl}(t^*, x) \quad (1.47)$$

Следствием (1.47) являются условия в $t = t_f$:

$$\text{Im}[\varphi_{cl}(t_f, x)] = \text{Re}[\partial_\tau \varphi_{cl}(t_f, x)] = 0 \quad (1.48)$$

и соотношения $c_{I,\omega}^{low} = (\bar{c}_{I,\omega}^{up})^*$, $\bar{c}_{I,\omega}^{low} = (c_{I,\omega}^{up})^*$. Используя их, получаем из (1.46):

$$c_{I,\omega}^{up} = e^{-\omega\beta_I} (\bar{c}_{I,\omega}^{up})^* \quad (1.49)$$

и, таким образом, мы можем рассматривать только верхнюю часть контура \mathcal{C} (рис.1.6).

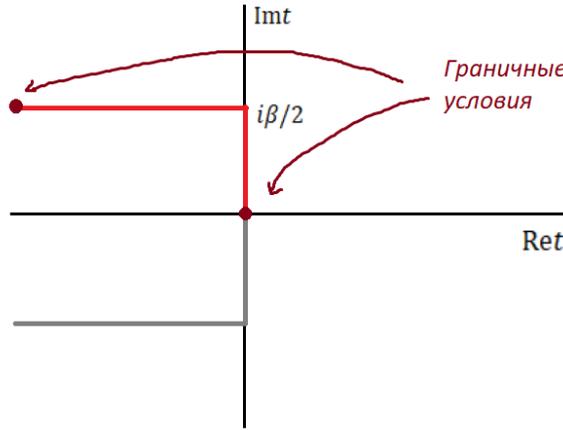


Рис. 1.6: Верхняя часть контура \mathcal{C}

При взятии действия по частям и подстановке уравнений движения выражение (1.43) принимает вид:

$$\mathcal{P} \sim e^{i\tilde{S}[\varphi_{cl}]} \quad (1.50)$$

$$\tilde{S}[\varphi_{cl}] = 4\pi \int_{\mathcal{C}} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx r^2(x) f(r) \left[\frac{1}{2} V'_{int} \left(\frac{\varphi}{r} \right) - V_{int} \left(\frac{\varphi}{r} \right) \right] \quad (1.51)$$

где $V(\phi)$ – неквадратичная часть потенциала. Заметим, что вклад дает только мнимая часть \tilde{S} , то есть $\mathcal{P} \sim e^{-\text{Im}\tilde{S}[\varphi_{cl}]}$.

Классическое уравнение поля можно вывести из действия (1.6):

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + U(x) \varphi + r^2 f(r(x)) V\left(\frac{\varphi}{r(x)}\right) = 0 \quad (1.52)$$

Также решение будет искаться в ограниченной области, поэтому нужно задать дополнительные граничные условия:

$$\partial_x \varphi(t, -\infty) = \partial_x \varphi(t, +\infty) = 0 \quad (1.53)$$

Итак, нужно получить решения φ_{cl} нелинейного уравнения (1.52) на временном комплексном контуре \mathcal{C} с граничными условиями (1.48), (1.49), (1.53). Для начала можно рассмотреть равновесный случай, при котором задача упрощается. В этом случае на определенном контуре решение является вещественным, член $B[\varphi_{cl}]$ в (1.43) равен нулю, а вклад в вероятность дает только часть на евклидовом времени. Решение φ_{cl} является периодическим в евклидовом времени с периодом $\beta = \beta_H = \beta_E$ (рис.1.7), вероятность распада дается выражением $\mathcal{P} \sim e^{-S_E}$, где S_E – евклидовое действие. То есть в случае теплового равновесия ЧД со средой нужно решать классическое уравнение в евклидовом времени с граничными условиями (1.53) и:

$$\partial_\tau \varphi(0, x) = \partial_\tau \varphi(\beta/2, x) = 0 \quad (1.54)$$

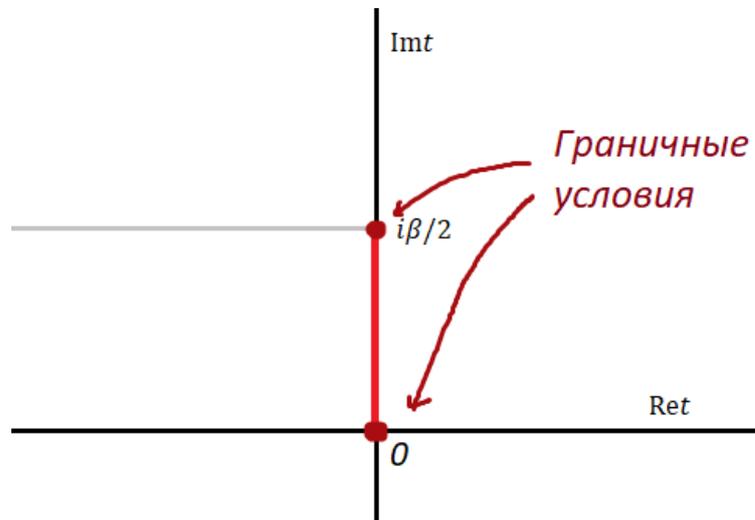


Рис. 1.7: Евклидовая часть контура \mathcal{C}

2. Численное моделирование

Уравнение (1.52) с граничными условиями (1.48), (1.49), (1.53) и с потенциалом (1.7) будем решать численно с помощью метода Ньютона-Рафсона [10, 11]. Введём сетку $(N_t \times N_x)$: $x_0 = -L$, $x_{N_x-1} = +L$, $t_0 = \text{Re}[t_0] + i\text{Im}[t_0]$, $t_{N_t-1} = 0$, $\varphi_{ij} = \varphi(t_i, x_j)$, $r_j = r(x_j)$.

$$dx_j = x_{j+1} - x_j, \quad j = 0, \dots, N_x - 2 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{x}_j &= \frac{dx_{j-1} + dx_j}{2}, \quad j = 1, \dots, N_x - 2 \\ d\tilde{x}_0 &= \frac{dx_0}{2}, \quad d\tilde{x}_{N_x-1} = \frac{dx_{N_x-2}}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогично для t . Дискретизованное уравнение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{ij}(\varphi) &= -\frac{1}{d\tilde{t}_i} \left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{ij}}{dt_i} + \frac{\varphi_{i-1,j} - \varphi_{ij}}{dt_{i-1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{d\tilde{x}_j} \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}}{dx_j} + \frac{\varphi_{i,j-1} - \varphi_{ij}}{dx_{j-1}} \right) - \\ &- U(r_j) \varphi_{ij} - r_j^2 f(r_j) V'_\varphi \left(\frac{\varphi_{ij}}{r_j} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

дискретизованные граничные условия:

$$\frac{\varphi_{i1} - \varphi_{i0}}{dx_0} = \frac{\varphi_{i,N_x-1} - \varphi_{i,N_x-2}}{dx_{N_x-2}} = 0 \quad (2.4)$$

Для периодического инстантона $t_0 = i\beta/2$:

$$\frac{\varphi_{1j} - \varphi_{0j}}{dt_0} = \frac{\varphi_{N_t-1,j} - \varphi_{N_t-2,j}}{dt_{N_t-2}} = 0 \quad (2.5)$$

В общем случае (1.49) выражается как действие определенных матриц:

$$\hat{B}^0 \varphi_0 + \hat{B}^+ \varphi_1 = 0, \quad (2.6)$$

а конечное условие:

$$\frac{\operatorname{Im}[\varphi_{N_t-1,j}] + \operatorname{Im}[\varphi_{N_t-2,j}]}{2} = \frac{\operatorname{Re}[\varphi_{N_t-1,j}] - \operatorname{Re}[\varphi_{N_t-2,j}]}{dt_{N_t-1}} = 0 \quad (2.7)$$

Таким образом, получаем систему нелинейных уравнений

$$\mathbf{F}(\varphi) = 0 \quad (2.8)$$

Если φ решение уравнения (2.8), а φ_0 приближенное решение, $\varphi = \varphi_0 + \mathbf{u}$, то, раскладывая в ряд Тейлора (2.8), получаем линейные уравнения на \mathbf{u} :

$$\hat{J}[\varphi_0] \mathbf{u} = -\mathbf{F}(\varphi_0), \quad (2.9)$$

где $\hat{J}[\varphi]$ – якобиан функции $\mathbf{F}(\varphi)$. Метод Ньютона-Рафсона заключается в последовательном решении (2.9) и приближении к решению уравнения.

3. Результаты

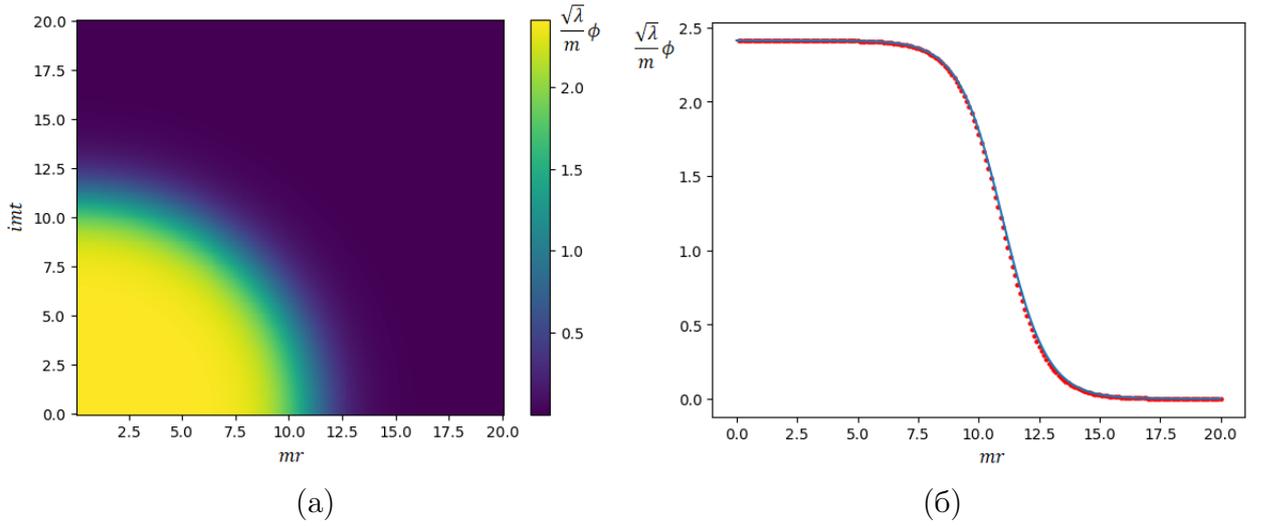


Рис. 3.1: (а) Инстантон $\varphi(t, x)$ в плоском евклидовом пространстве-времени при $\varepsilon = 0.1$. (б) Профиль инстантона в момент времени $t = 0$ (точки) и тонкостенное приближение (линия). Оба рисунка получены с использованием решетки $N_t \times N_x = 200 \times 200$.

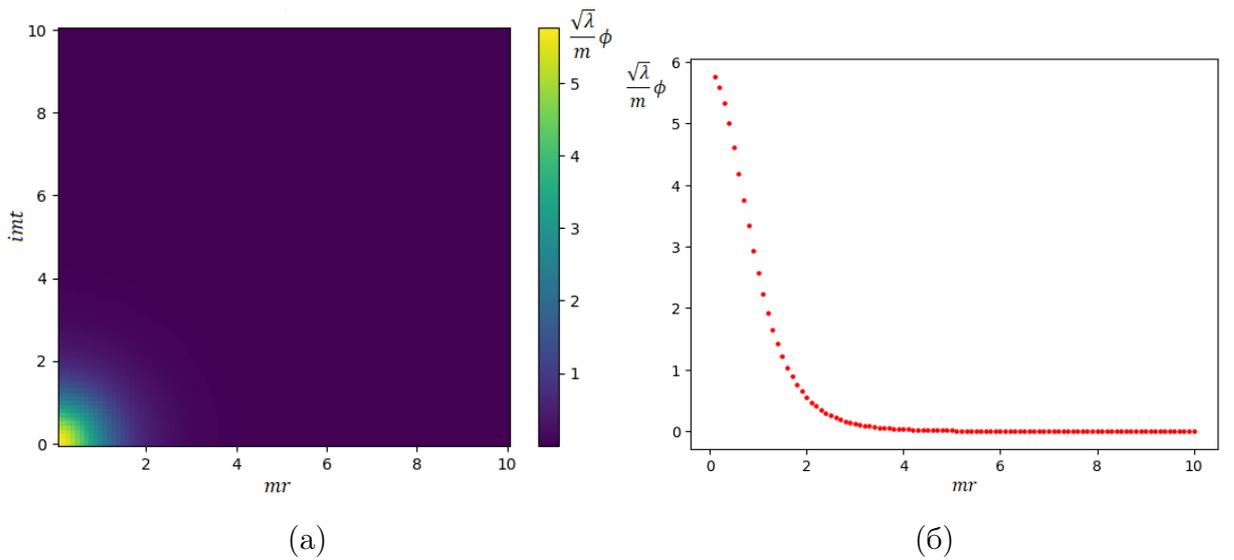


Рис. 3.2: (а) Инстантон $\varphi(t, x)$ в плоском евклидовом пространстве-времени при $\varepsilon = 1$. (б) Профиль инстантона в момент времени $t = 0$. ($N_t \times N_x = 100 \times 100$).

Решим сначала уравнения (1.52), (1.53), (1.54) с потенциалом (1.7) в плоском пространстве. На рис. 3.1 представлено решение для поля ϕ при $\varepsilon = 0.1$, для которого верно тонкостенное приближение. На рис. 3.2 инстантон при $\varepsilon = 1$, когда тонкостенное приближение не работает. Пузырь ложного вакуума имеет размер $mr_b \simeq 1$. В дальнейшем будем получать решения для значения $\varepsilon = 1$.

Далее, численно рассчитываются периодические инстантоны с разными периодами β в присутствии ЧД в тепловом равновесии со средой. На рис. 3.3 ЧД имеет радиус $mr_h = 2Mt/M_{Pl}^2 = 0.1$. Следует отметить, что эти решения не являются реалистичными инстантонами, т.к. их период не соответствует температуре ЧД $m\beta = m\beta_H = 8Mt/M_{Pl}^2 \simeq 2.51$, но при этом геометрия пространства искривлена ЧД с массой M . При стремлении периода к физическому значению $m\beta_H/2 \simeq 1.25$, в соответствии с формулой для температуры излучения Хокинга, инстантон плавно стремится к статическому решению – сфалерону. Это также видно на рис. 3.4, который показывает зависимость действия от периода.

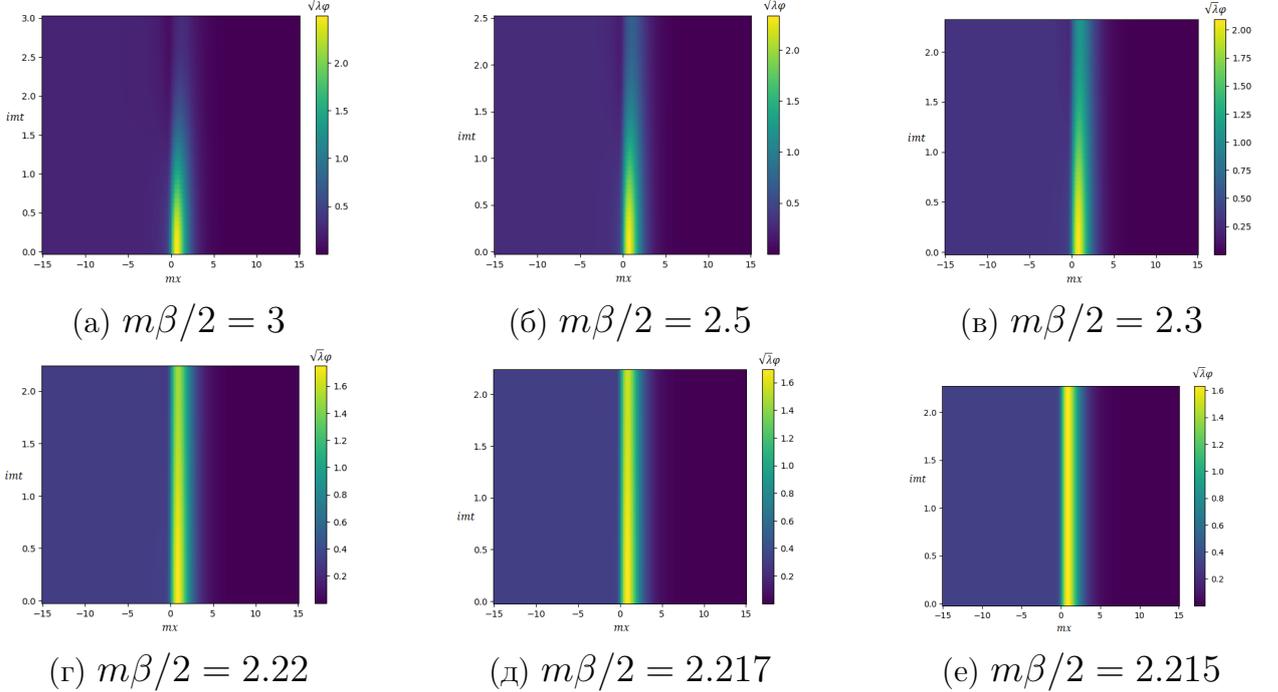


Рис. 3.3: Периодические инстантоны при разных β в присутствии ЧД с радиусом $mr_h = 2Mt/M_{Pl}^2 = 0.1$. ($N_t \times N_x = 50 \times 300$).

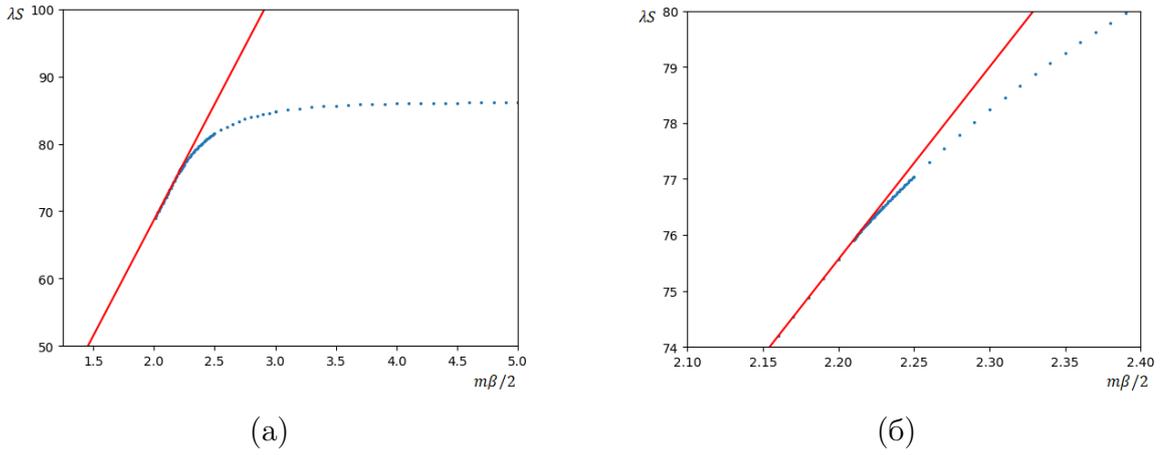


Рис. 3.4: Евклидовое действие S как функция от периода β . Рассматриваются нетривиальные периодические инстантоны (синий) и статические сфалероны (красный) при $mr_h = 0.1$

Подобная картина наблюдается и для других масс ЧД. Таким образом, инстантоны в физическом пределе оказываются сфалеронами. На рис.3.5 показана зависимость действия сфалерона от обратной температуры среды, где синие точки и красная линия соответствуют случаям с ЧД и без ЧД соответственно. В пределе $\beta \rightarrow 0$ размер ЧД стремится к нулю, и результаты с ЧД и без ЧД совпадают. Другими словами, малые ЧД не меняют значительно вероятность распада в очень горячей среде. И наоборот, при стремлении $\beta \rightarrow \infty$ большие ЧД значительно меняют геометрию пространства, влияя на сфалеронные решения. Это происходит при $m\beta \simeq 1$, т.е. когда радиус ЧД достигает $mr_h \simeq 0.1 \times mr_b$.

Далее решаем уравнения на верхней части контура \mathcal{C} (рис.1.6) с граничными условиями 1.49 с разными температурами $\beta_E = \infty$ и $\beta_H \neq \infty$. Пример такого решения представлен на рис. 3.6, 3.7. Точка поворота берется в $t = i\beta_H/2$. Таким образом, правая волна является вещественной, а левая содержит только положительно-частотную компоненту. Решение представляет собой два сходящихся волновых пакета, рождающих после столкновения и динамики в евклидовом времени пузырь истинного вакуума.

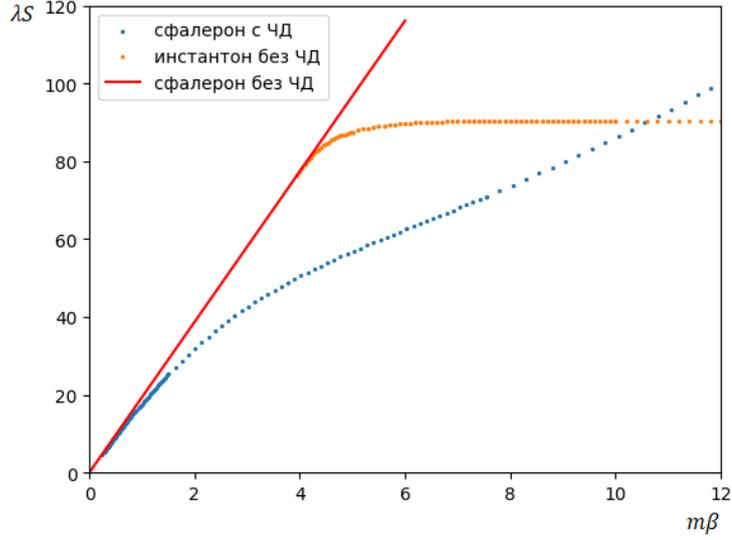


Рис. 3.5: Евклидовое действие S как функция от обратной температуры среды β . Синие и оранжевые точки соответствуют распаду с ЧД с $m\beta_H = m\beta$ и без ЧД соответственно. Красная линия показывает сфалероны в плоском пространстве, в которые переходят инстантоны при $m\beta \rightarrow 0$.

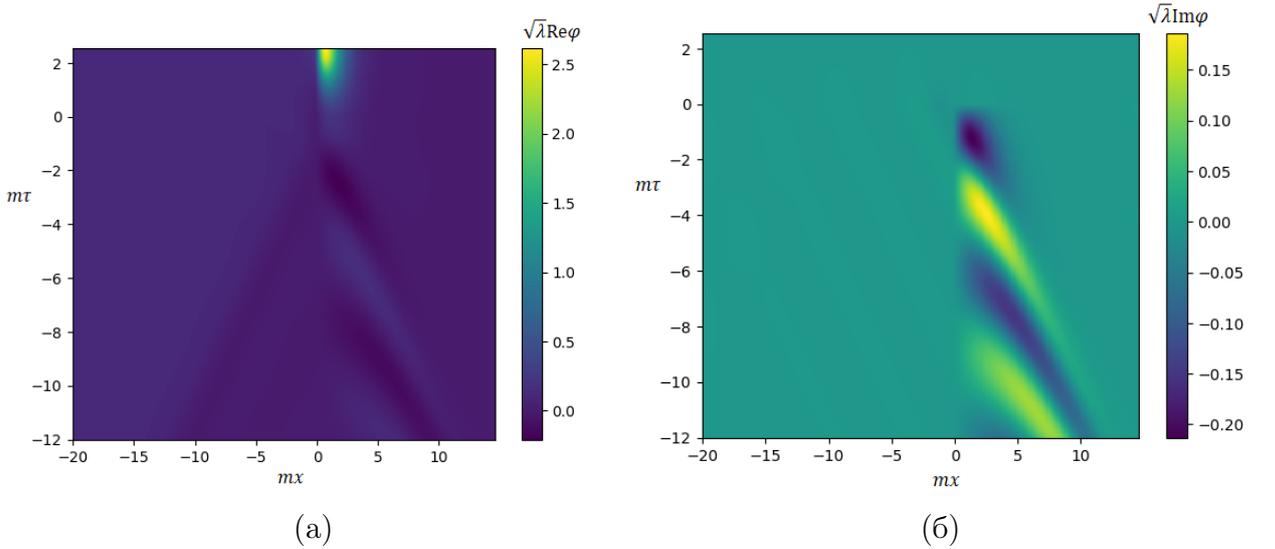


Рис. 3.6: Решение на верхней части контура \mathcal{C} при $m\beta_E = \infty$, $m\beta_H = 10 \times 8\pi Mm/M_{Pl}^2 \simeq 5.03$, $mr_h = 0.04$. Здесь по вертикальной оси отображен параметр τ вдоль временного контура такой, что $\tau = \text{Ret}_i = -12$ соответствует $t = t_i$, $\tau = 0 \leftrightarrow t = i\beta_H/2$, $\tau = +\beta_H/2 \leftrightarrow t = 0$. То есть $\tau = 0$ обозначает точку поворота на контуре. ($N_t \times N_x = 900 \times 400$).

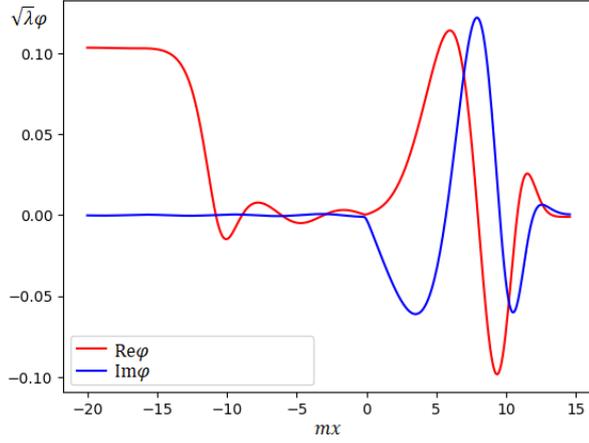


Рис. 3.7: Вещественная и мнимая часть решения (рис.3.6) в начальный момент времени. ($N_t \times N_x = 900 \times 400$).

На рис.3.8 показана зависимость коэффициента экспоненциального подавления вероятности распада от размера ЧД при разных соотношениях массы и температуры ЧД: $\beta_H = 10 \times 8\pi M/M_{Pl}^2$ и $\beta_H = 5 \times 8\pi M/M_{Pl}^2$. При малых размерах ЧД $mr_h < 0.05$ наблюдается численный артефакт, но о характере зависимости можно судить по значениям в области $mr_h > 0.05$. Вероятность распада вокруг больших ЧД оказывается более подавленной, чем вероятность распада в плоском пространстве, т.к. в этом случае нужно родить большой пузырь истинного вакуума. Можно ожидать, что график имеет вид функции стремящейся к инстантонному S_0 при $mr_h \rightarrow 0$. Возможно, подобная зависимость имеет место и при более высоких температурах ЧД.

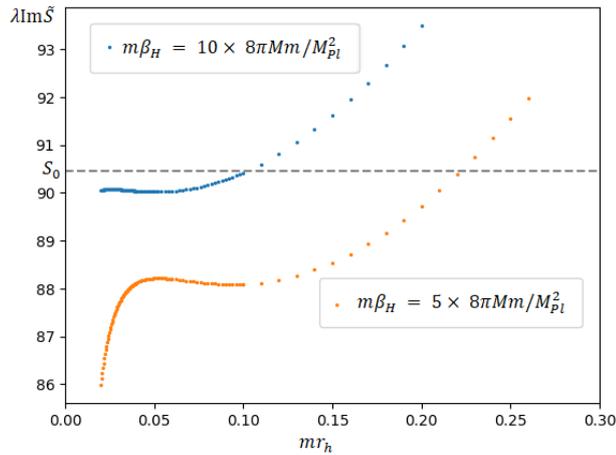


Рис. 3.8: Зависимость коэффициента экспоненциального подавления от радиуса горизонта ЧД при разном соотношении температуры и массы ЧД.

ВЫВОДЫ

В работе был рассмотрен распад ложного вакуума при ненулевой температуре в присутствии ЧД в тепловом равновесии со средой. Соответствующие переходы происходят через тепловые скачки, т.е. скачки через энергетический барьер, вызванные тепловыми флуктуациями. Кроме того, было обнаружено, что малые ЧД с $mr_h \ll mr_b$ не меняют значительно сфалероны в горячей среде и соответствующие вероятности, в том числе. С другой стороны, большие ЧД с $mr_h \lll mr_b$ значительно изменяют геометрию пространства, и следовательно, сфалеронные решения и вероятность распада.

Также был рассмотрен неравновесный случай и были получены соответствующие решения при малых температурах ЧД. С помощью них были получены значения коэффициента подавления вероятности распада в присутствии ЧД разных размеров. Несмотря на численный артефакт при $mr_h \rightarrow 0$, можно сделать определенные выводы о вероятности распада при разных ЧД. Вероятность распада вокруг ЧД сильно подавляется для больших ЧД, т.к. в таком случае нужно родить большой пузырь истинного вакуума. Тем не менее существует область размеров ЧД, при которых вероятность распада незначительно увеличивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особый интерес представляет получение физических решений при температурах излучения Хокинга и рассмотрение диапазона малых ЧД. Для этого следует более аккуратно и точнее подойти к численным расчетам. Возможно, помимо этого следует выбрать иной контур или особым образом регуляризовать задачу.

Также было бы интересным рассмотреть более реалистичный потенциал, такой как $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$, чтобы оценить вероятность распада вакуума Хиггса, индуцированного ЧД.

Благодарности

Автор благодарен Дмитрию Сергеевичу Горбунову и Дмитрию Геннадиевичу Левкову за научное руководство, полезные обсуждения и помощь в подготовке данной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dario Buttazzo, Giuseppe Degrassi, Pier Paolo Giardino, Gian F. Giudice, Filippo Sala, Alberto Salvio, and Alessandro Strumia. Investigating the near-criticality of the higgs boson. *Journal of High Energy Physics*, 2013(12), December 2013.
2. Sidney R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory. *Phys. Rev. D*, 15:2929–2936, 1977. [Erratum: *Phys.Rev.D* 16, 1248 (1977)].
3. Philipp Burda, Ruth Gregory, and Ian G. Moss. The fate of the higgs vacuum. *Journal of High Energy Physics*, 2016(6), June 2016.
4. Dmitry Gorbunov, Dmitry Levkov, and Alexander Panin. Fatal youth of the universe: black hole threat for the electroweak vacuum during preheating. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(10):016–016, oct 2017.
5. Andrey Shkerin and Sergey Sibiryakov. Black hole induced false vacuum decay from first principles. *Journal of High Energy Physics*, 2021(11), nov 2021.
6. Andrey Shkerin and Sergey Sibiryakov. Black hole induced false vacuum decay: The role of greybody factors, 2021.
7. Ted Jacobson. Introduction to quantum fields in curved spacetime and the hawking effect, 2003.
8. S. Yu. Khlebnikov, V. A. Rubakov, and P. G. Tinyakov. Periodic instantons and scattering amplitudes. *Nucl. Phys. B*, 367:334–358, 1991.

9. Valerii A Rubakov and M E Shaposhnikov. Electroweak baryon number non-conservation in the early universe and in high-energy collisions. *Physics-Usp ekhi*, 39(5):461–502, May 1996.
10. A. N. Kuznetsov and P. G. Tinyakov. False vacuum decay induced by particle collisions. *Physical Review D*, 56(2):1156–1169, jul 1997.
11. William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3 edition, 2007.