

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова»

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

**Оценки фазовой плотности темной материи  
в карликовых галактиках**

Выполнил:

Студент 443 группы

Корешкова Екатерина Павловна

Научный руководитель:

член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук

Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва  
2024

# Содержание

Введение	2
Теорема Лиувилля	3
EMF функция	5
Численный анализ	6
Результаты	9
Список литературы	10

## Введение.

Карликовые сфероидальные галактики являются отличными системами для изучения природы темной материи из-за ее высокой наблюдаемой плотности. В этой работе рассматривается наблюдаемая фазовая плотность карликовых галактик, из которой можно получить нижние оценки массы частиц фермионной темной материи. Уточнение результатов по сравнению с предыдущими работами возможно благодаря новым наблюдаемым данным, а также улучшению численного анализа.

В данной работе обсуждается два метода получения оценок фазовой плотности (а следовательно и массы): один заключается в использовании теоремы Лиувилля, другой – на использовании функции, названной Excess Mass Function (EMF)[1]. Оба метода основаны на свойствах фазовой функции распределения и являются модельно-зависимыми. Представленные в данной работе оценки для четырех карликовых галактик были получены в предположении об однокомпонентной фермионной темной материи, состоящей из нерезонансно-генерируемых стерильных нейтрино. Таким образом было получено  $m_s \geq 2.17$  кэВ из теоремы Лиувилля и  $m_s \geq 2.44$  кэВ из EMF функции (на уровне 68%-го доверительного интервала).

# Теорема Лиувилля.

Нижняя граница на массу частицы темной материи может быть получена с помощью теоремы Лиувилля[2], которая утверждает, что при бесстолкновительной и диссипативной эволюции максимум распределения темной материи в фазовом пространстве внутри карликовой галактики не может превышать изначального значения. Чтобы применить теорему Лиувилля, необходимо знать форму изначального распределения, что явно зависит от модели.

Следует учитывать также, что наблюдаемая фазовая плотность карликовой галактики не является ее точной фазовой плотностью, а лишь усреднением ее по некоторым областям. Тем не менее очевидно, что при усреднении величина не увеличивается, поэтому можно записать условие теоремы в следующей форме:

$$F_{coarse}^{late} \leq F_{fine}^{late} \leq F_{fine}^{prim}. \quad (1)$$

Оценку при усреднении можно улучшить, приняв во внимание динамику темной материи внутри карликовой галактики. Преимущество такого подхода заключается в возможности найти максимум функции распределения аналитически, что в дальнейшем усилит ограничение на массу. Классическим выбором функции распределения по скоростям является многомерная Гауссова функция:

$$F_{maxwell} = \frac{\rho(r)}{(2\pi)^{3/2} m^4 \sigma_r \sigma_\tau^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{v_r^2}{\sigma_r^2} + \frac{v_\phi^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{v_\theta^2}{\sigma_\tau^2}\right)\right) \implies \\ \implies F_{maxwell}^{max} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} m^4} \left(\frac{\rho(r)}{\sigma_r \sigma_\tau^2}\right)_{max} \quad (2)$$

Стерильные нейтрино могут быть получены в результате осцилляций с активными нейтрино в ранней Вселенной. В отсутствие изначальной лептонной асимметрии это происходит по механизму Додельсона-Уидроу и обычно называется нерезонансным рождением. Было показано, что при низких температурах распределение нерезонансно-рожденных стерильных нейтрино примерно пропорционально распределению активных нейтрино. Таким образом, мы принимаем, что распределение стерильных нейтрино в ранней Вселенной близко к термальному:

$$F_{Fermi} = \frac{gN}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{p/T_\nu} + 1} \implies F_{Fermi}^{max} = \frac{gN}{2(2\pi)^3} \quad (3)$$

где  $g = 2$  для фермионов,  $T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_0$  – температура нейтрино.

Нормировочная константа  $N$  выбирается так, чтобы функция распределения воспроизводила наблюдаемую плотность темной материи:

$$n = \frac{3}{4} gN \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_\nu^3 = \frac{\rho_{DM}}{m}$$

Подставляя полученные функции распределения (2) и (3) в неравенство теоремы Лиувилля (1), можно получить явное выражение для массы:

$$\boxed{m^3 \geq \frac{2(2\pi)^{3/2}}{11.16eV} \left(\frac{\rho(r)}{\sigma_r \sigma_\tau^2}\right)_{max}} \quad (4)$$

Однако, как видно из данных, полученных в симуляциях, возникают трудности с определением максимума выражения, стоящего в скобках в формуле (4). Из теоретического анализа видно, что данная конфигурация не имеет локальных максимумов на всей области своего определения, кроме того, расходится при стремлении радиуса к нулю, что свидетельствует о том, что максимума не существует (или же он бесконечно большой). Существует несколько способов разрешения данной проблемы:

1. Принять максимальное значение на минимально возможном радиусе симуляций. Такой подход, очевидно, даст более строгое ограничение, однако в отсутствии наблюдаемых данных на малых радиусах снижает качество полученных в результате моделирования определяемых параметров, что ухудшает качество получаемой оценки.

2. Принять максимальное значение на некотором конечном радиусе. Строгость такой оценки меньше, по сравнению с предыдущим методом, однако наличие наблюдаемых данных на выбранном радиусе увеличивает качество определяемых в результате моделирования параметров, что увеличивает качество получаемой оценки.

В данной работе максимум обсуждаемого выражения был принят на радиусе полуширины гистограммы распределения звезд в галактике.

3. Принять другую модель динамики темной материи в галактике. Является более трудной теоретической задачей и не рассматривается в данной работе.

Также встает вопрос о поиске возможно более строгой оценки на массу частицы темной материи. Одна из таких оценок будет рассмотрена в следующей главе.

Представленный анализ все еще не решает проблемы отсутствия локального максимума у усредненной функции распределения, но можно теоретически показать, что такой подход дает более строгую оценку на массу.

## EMF функция.

Предыдущая оценка может быть усилена с использованием EMF функции:

$$D(f) = \int (F(x, p) - f)\Theta(F(x, p) - f)dx dp \quad (5)$$

Для такой функции можно показать, что для любого значения аргумента она, аналогично максимуму функции распределения, не увеличивается как при эволюции системы, так и при усреднении функции распределения. Аналогично теореме Лиувилля это можно записать в виде неравенства:

$$\forall f : D_{coarse}^{late}(f) \leq D_{fine}^{late}(f) \leq D_{fine}^{prim.}(f) \quad (6)$$

Подставляя уже полученные в предыдущем разделе функции распределения стерильных нейтрино (2) и (3) в определении EMF функции (5) и составляя неравенство (6), можно получить неявное выражение для массы:

$$\begin{aligned} & 4\pi V_i \left( \frac{1}{(2\pi)^3 m} \int_0^{\log(\frac{1}{mf(2\pi)^3} - 1)} p^2 \frac{1}{e^{p/T_\nu} + 1} dp - \frac{1}{3} f \log^3 \left( \frac{1}{mf(2\pi)^3} - 1 \right) \right) \geq \\ & \geq \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\rho(r)}{(2\pi)^{3/2} (1-\beta) \sigma_r^3} (4\pi r^2 dr) \int_{p_{r,min}(r)}^{p_{r,max}(r)} \exp\left(-\frac{1}{2m^2} \frac{p_r^2}{\sigma_r^2}\right) dp_r \int_{p_{\tau,min}(r,p_r)}^{p_{\tau,max}(r,p_r)} \exp\left(-\frac{1}{2m^2} \frac{p_\tau^2}{\sigma_\tau^2}\right) (2\pi p_\tau) dp_\tau - \\ & \quad - f \int_{r_{min}}^{r_{max}} (4\pi r^2 dr) \int_{p_{r,min}(r)}^{p_{r,max}(r)} dp_r \int_{p_{\tau,min}(r,p_r)}^{p_{\tau,max}(r,p_r)} (2\pi p_\tau) dp_\tau \end{aligned} \quad (7)$$

где уравнения на пределы интегрирования определяются из  $\Theta$ -функции:

$$p_{r,min} = 0; p_{\tau,min} = 0$$

$$p_{r,max} = 2m^2 \sigma_r^2 \ln\left(\frac{fm^4(2\pi)^{3/2}(1-\beta)\sigma_r^3}{\rho(r)}\right)$$

$$p_{\tau,max} = (1-\beta)(2m^2 \sigma_\tau^2 \ln\left(\frac{fm^4(2\pi)^{3/2}(1-\beta)\sigma_r^3}{\rho(r)}\right) - p_r^2) = (1-\beta)(p_{r,max}^2 - p_r^2)$$

$\beta = 1 - \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_r^2}$  -анизотропия дисперсии скоростей

## Численный анализ.

Карликовые сфероидальные галактики - это тусклые объекты с малой массой, которые, как обычно считается, существуют вблизи более крупных галактик. В настоящее время телескопы могут обнаружить только те карликовые галактики, которые находятся вокруг Млечного Пути и Андромеды, из-за их чрезвычайно низкой светимости. У карликовых галактик очень большое отношение массы к светимости, что означает, что они почти полностью состоят из темной материи.

Плотность темной материи во внутренних областях карликовой галактики, расположенных далеко внутри полусветового радиуса, можно определить используя код GravSphere[3], построенный на анализе радиального уравнения Джинса:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}(\rho\sigma) + 2\frac{\beta\sigma}{r} = -\frac{M}{r^2} \quad (8)$$

Фиттируя наблюдаемые характеристики карликовых галактик - поверхностную плотность и проекцию дисперсии скоростей на луч зрения, можно получить параметры стоящие в уравнении Джинса - полную массу галактики (и, как следствие профиль плотности).

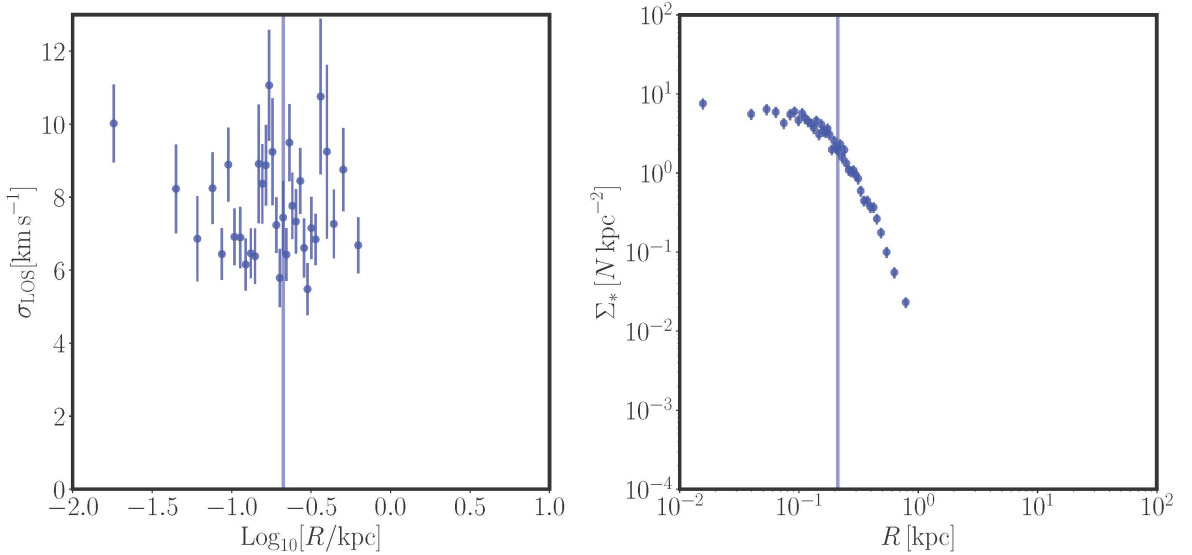


Рис. 1: Observed parameters of the galaxy as a functions of projected radius: Normalized stellar surface density(left) & Projected stellar velocity dispersion(right) (Sculptor Dwarf Galaxy)

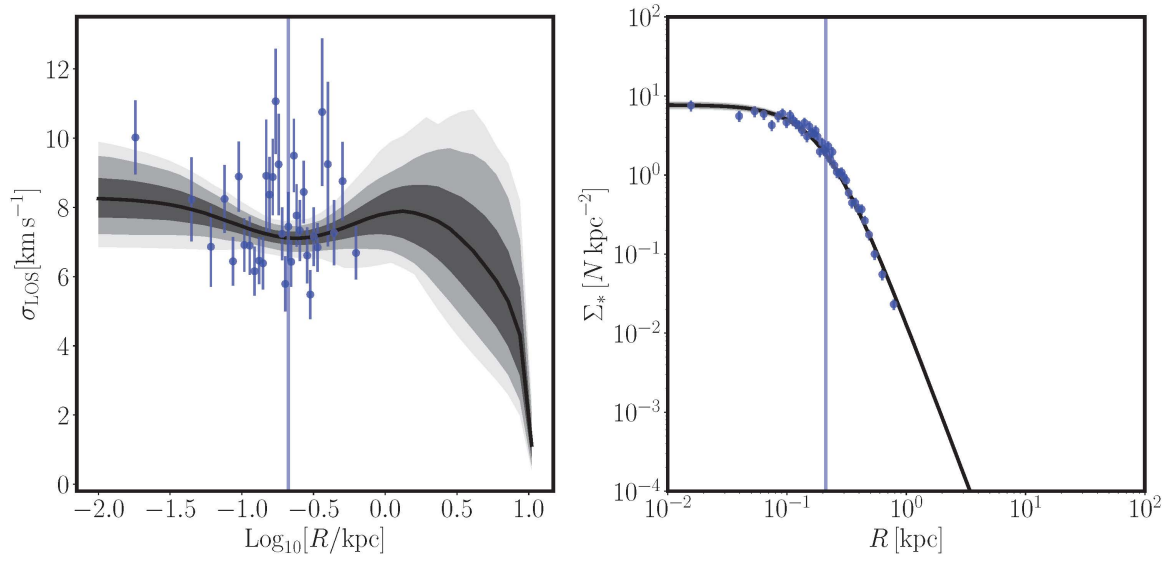


Рис. 2: Fitted parameters of the galaxy as a functions of projected radius: Normalized stellar surface density(left) & Projected stellar velocity dispersion(right) (Sculptor Dwarf Galaxy)

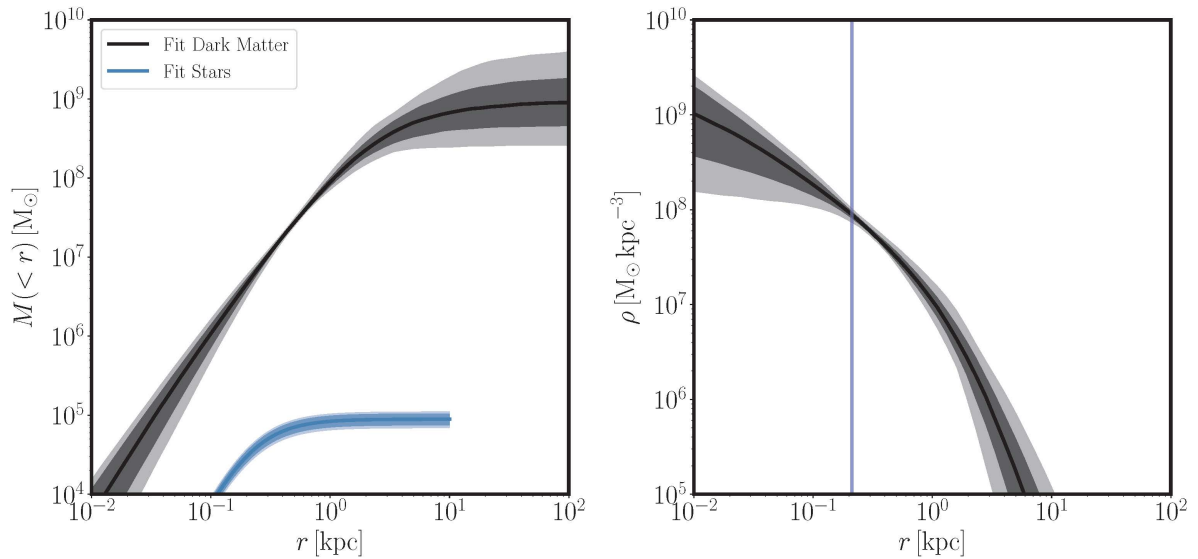


Рис. 3: Obtained (using Jeans equation) unobservable parameters of the galaxy as a functions of radius: mass(left) & dark matter density(right) (Sculptor Dwarf Galaxy)

Используя полученные прямо ненаблюдаемые параметры галактики – массу и плотность темной материи, необходимо решить то же уравнение Джинса для темной материи, и, тем самым, получить ее дисперсию скоростей. Таким образом, в уравнении остается один свободный неизмеряемый параметр – анизотропия дисперсии скоростей темной материи, которая, вообще говоря, не обязательно совпадает с анизотропией дисперсии скоростей светящегося вещества. Поэтому приходится "вручную" задавать этот параметр, руководствуясь, например, симуляциями гало темной материи.

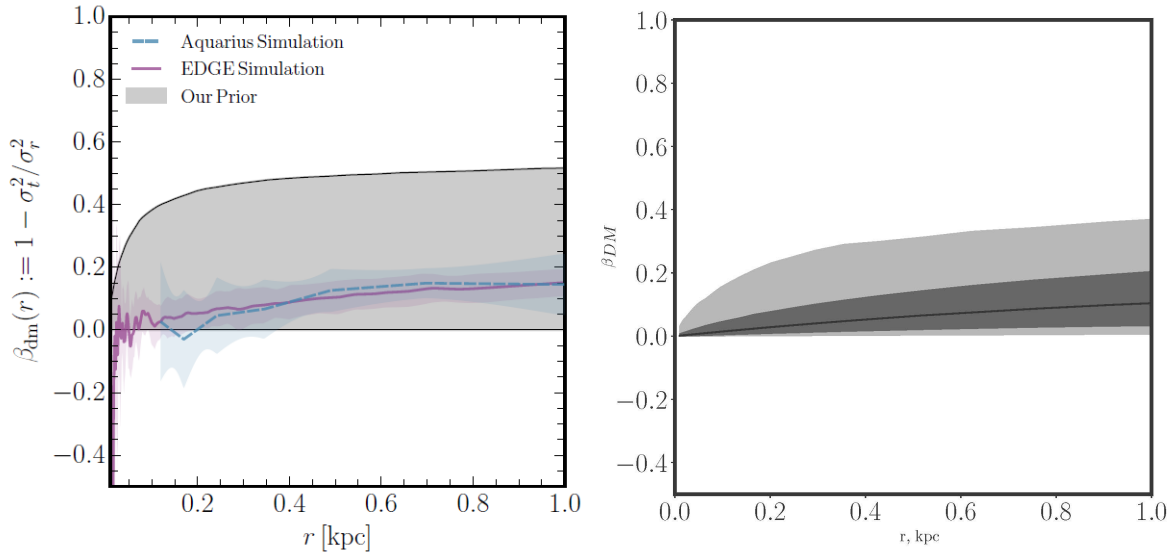


Рис. 4: DM velocity dispersion anisotropy used in: [4] & this work

Для того, чтобы вычислить дисперсию скоростей темной материи с принятой анизотропией и полученными в результате моделирования параметрами галактики, был усовершенствован используемый код GravSphere. Таким образом, моделируя решение уравнения Джинса для темной материи, можно получить ее дисперсию скоростей.

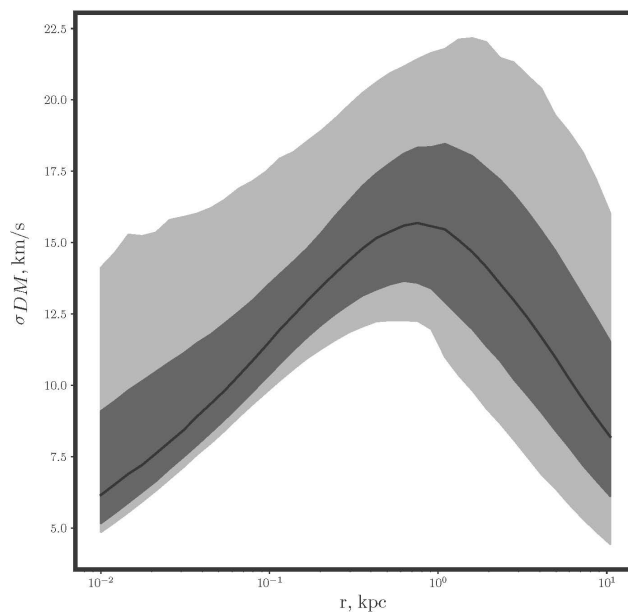


Рис. 5: DM velocity dispersion obtained using adjusted GravSphere code (Sculptor Dwarf Galaxy)



## Результаты.

С помощью численного анализа были получены все параметры, необходимые для построения фазовой функции распределения и, следовательно, получения оценок массы частицы темной материи. После подставления найденных профилей в выражения для массы (4) и (7), были получены оценки для 4-х карликовых галактик.

Galaxy name	Liouville's theorem (keV)	EMF (keV)
Fornax Dwarf Spheroidal	$0.80^{+0.28}_{-0.24}$	$0.84^{+0.34}_{-0.26}$
Sculptor Dwarf Galaxy	$1.78^{+0.40}_{-0.50}$	$1.91^{+0.54}_{-0.60}$
Leo I	$1.11^{+0.16}_{-0.27}$	$1.31^{+0.37}_{-0.36}$
Carina dSph	$1.23^{+0.60}_{-0.54}$	$1.25^{+0.65}_{-0.56}$

Таблица 1: Lower bounds on  $m_s$  with 68% C.L. uncertainties

## Список литературы.

- [1] Dehnen W., 2005, Phase-space mixing and the merging of cusps, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 360 (2005) 869-891
- [2] Binney J., Tremaine S., 2008, *Galactic Dynamics: Second Edition*
- [3] Read J.I., Steger P., 2017, How to break the density-anisotropy degeneracy in spherical stellar systems, arXiv:1701.04833 [astro-ph.GA]
- [4] Alvey J. et al., 2020, New Constraints on the Mass of Fermionic Dark Matter from Dwarf Spheroidal Galaxies, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 501, (2021), 1, 1188-1201