Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа
Стерильные нейтрино в ранней Вселенной

Выполнила:

студентка 2 курса 218 группы
Черненко Алина Дмитриевна

Научный руководитель:

д.ф. - м.н., член - корр. РАН
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва, 2024

Содержание

Глава 1

Введение

Наблюдаемые экспериментально вакуумные осцилляции нейтрино, в отличии от осцилляций в веществе, где можно ввести эффективную массу, не могут быть объяснены в рамках Стандартной модели, где масса нейтрино полагается равной нулю, что говорит о необходимости ее расширения. Одним из методов решающих проблему осцилляций, наличия барионной асимметрии, а также который, при некоторых условиях рассмотренных далее, может служить обоснованием существования теплой темной материи - является введение новых дополнительных частиц, не нарушающих наблюдаемые явления, описываемые Стандартной моделью.

Одними из таких частиц являются стерильные нейтрино - правые фермионы, смешивающиеся с нейтрино Стандартной модели (активными, относительно слабого взаимодействия) и не вступающие во взаимодействие с классическими калибровочными полями Стандартной модели. Важно заметить, что даже в том случае, если введение стерильных нейтрино не решит проблему темной материи, оно все еще будет являться решением большого числа задач необъяснимых в рамках Стандартной модели.

В данной работе будут рассмотрены два аспекта - термодинамика плазмы в расширяющейся Вселенной и механизм осцилляций произвольного активного нейтрино в кэВ-ное стерильное нейтрино в плазме при наличии лептонной асимметрии. С учетом всех полученных величин будет решено уравнение Больцмана и получено распределение стерильных нейтрино по импульсам.

Также путем интегрирования функции распределения будет получено уравнение ограничения на массу стерильного нейтрино и углы смешивания из условия генерации теплой темной материи кэВ-ными стерильными нейтрино при всех температурах.

Глава 2

Термодинамика в расширяющейся Вселенной

2.1. Функции распределения частиц

Распределения по импульсам для всех частиц с хорошей точностью представимо в виде распределений Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака для бозонов и фермионов соответственно:

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\frac{E(\vec{p})-\mu}{T}} \mp 1} \tag{2.1}$$

В данной работе рассматриваются ультрарелятивистские частицы вступающие во взаимодействие с плазмой, поэтому Лоренц-инвариант для частицы i-ого типа преобразуется в условие $E_i(\vec{p_i}) = |\vec{p_i}|$ при $m_i \ll T$.

Для температур при которых плазма становится нерелятивистской необходимо использовать классическое распределение Максвелла-Больцмана, так как экспонента в знаменателе для распределений Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака подавляет ± 1. Однако, так как все выкладки кроме непосредственной подстановки $f_\alpha, n_i(T)$, $\rho_i(T)$ и Лоренц-инварианта меняться не будут, а также так как рассматриваемый в работе диапазон температур превышает 1 МэВ (при котором теплая темная материя перестает быть релятивистской) – данные поправки в работе рассмотрены не будут.

2.2. Плотность числа частиц, плотность энергии и плотность энтропии с учетом химического потенциала μ_i

Исходя из ультрарелятивистского приближения и определения плотности числа частиц получим n_i для частицы типа i с соответствующим для нее числом степеней свободы g_i и химическим потенциалом μ_i при фиксированной температуре T:

$$n_i = \begin{cases} \dfrac{g_i T^3}{\pi^2}\zeta(3) + \dfrac{g_i T^2 \mu_i}{6} + \cdots & \text{для бозонов} \\ \\ \dfrac{3}{4}\dfrac{g_i T^3}{\pi^2}\zeta(3) + \dfrac{g_i T^2 \mu_i}{12} + \cdots & \text{для фермионов} \end{cases} \tag{2.2}$$

В данном выводе пренебрегается последним членом суммы интегралов с μ_i^2, так как полагаем $\dfrac{\mu_i^2}{2\pi^2}$ достаточно малым.

Аналогично можно получить плотности энергии для частиц i-го типа:

$$\rho_i = \begin{cases} g_i \dfrac{\pi^2}{30}T^4 + \dfrac{3 g_i T^3 \mu_i}{\pi^2}\zeta(3) + \cdots & \text{для бозонов} \\ \\ \dfrac{7}{8} g_i \dfrac{\pi^2}{30}T^4 + \dfrac{9 g_i T^3 \mu_i}{4\pi^2}\zeta(3) + \cdots & \text{для фермионов} \end{cases} \tag{2.3}$$

где так же пренебрегается членами с μ_i^2 и μ_i^3.

Суммируя ρ_i по всем типам частиц являющихся ультрарелятивистскими при заданной температуре T, с учетом условия $\mu_\alpha = -\mu_{\bar{\alpha}}$ получим:

$$\rho(T) = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 \tag{2.4}$$

где $g_* = \sum\limits_i g_{i_{\text{бозонов}}} + \dfrac{7}{8}\sum\limits_k g_{k_{\text{фермионов}}}$ - эффективное число степеней свободы

Аналогичный результат в силу пренебрежения μ_i более высоких четных порядков можно получить решая интегралы аналитически с условием $\mu_i = 0$, это вычислительно гораздо проще, но не позволяет учесть вклад лептонной асимметрии в эффективный Гамильтониан смешивания (асимметрия отсутствует).

Так как в данной задаче темная материя ультрарелятивистская, то ее уравнение состояния можно представить в виде $p = \rho/3$, тогда уравнение плотности энтропии имеет следующий вид:

$$s_i = \frac{p_i + \rho_i}{T} = \frac{4}{3} \begin{cases} g_i \dfrac{\pi^2}{30}T^3 + \dfrac{3 g_i T^2 \mu_i}{\pi^2}\zeta(3) + \cdots & \text{для бозонов} \\ \\ \dfrac{7}{8} g_i \dfrac{\pi^2}{30}T^3 + \dfrac{9 g_i T^2 \mu_i}{4\pi^2}\zeta(3) + \cdots & \text{для фермионов} \end{cases} \tag{2.5}$$

$$s(T) = g_* \frac{2\pi^2}{45} T^3 \tag{2.6}$$

2.3. Эффективные степени свободы

Для большей части времени остывания Вселенной степени свободы g_i и следовательно g_* считаются линейно из некоторого сглаженного ступенчатого приближения с хорошей точностью, однако в период КХД - перехода считать эффективные степени свободы таким методом не представляется возможным, поскольку мы не знаем на данный момент точно ни состава плазмы, ни зависимости этого состава от температуры, а значит не можем посчитать степени свободы аналитически для каждой температуры перехода - необходимо построение модели протекающих реакций для всех температур и последующее численное моделирование. Модель также должна отражать известные нам экспериментальные данные до и после эпохи КХД.

Однако, как правило, в случаях, когда аналитически получить функцию для всех температур невозможно, используют полученные из эксперимента наблюдаемые величины. Откуда в рамках данной задачи можно заметить, что полученные при помощи решеточных вычислений значения для эффективного числа степеней свободы [2] хорошо ложатся на гладкое ступенчатое приближение, даже в рамках КХД-перехода:

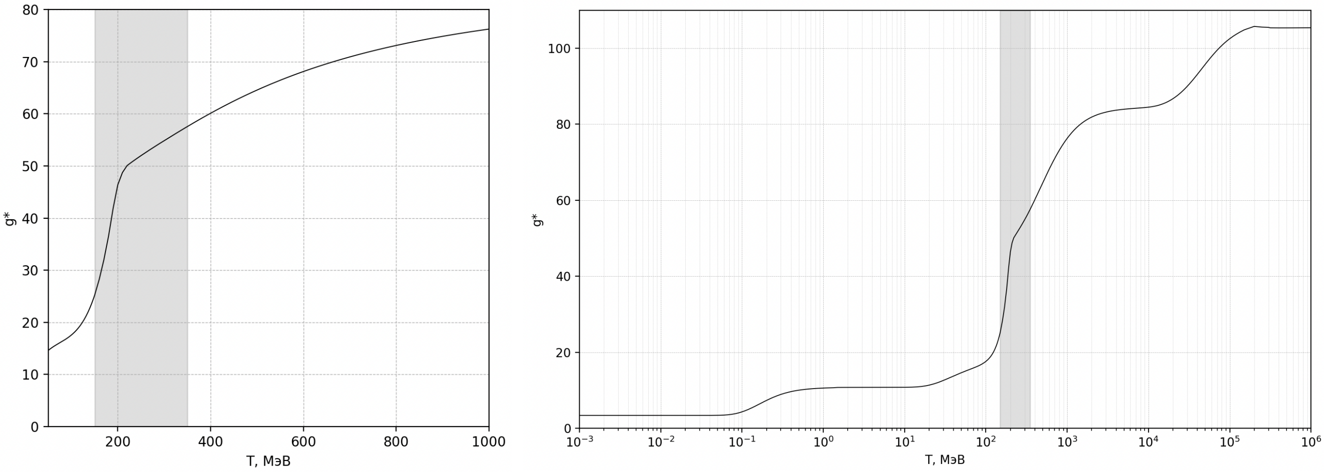


Рис. 2.1: Зависимость $g_*(T)$

На данном графике серым цветом отмечена интересующая нас зона КХД-перехода - резкий скачок эффективных степеней свободы позволяет говорить в ступенчатом приближении.

Остальные значения эффективных степеней свободы также можно сравнить с полученными аналитически при помощи формулы:

$$g_* = \sum_i (2s_i + 1) \left(\frac{T_i}{T} \right)^4_{\text{бозонов}} + \frac{7}{8} \sum_k (2s_k + 1) \left(\frac{T_k}{T} \right)^4_{\text{фермионов}} \tag{2.7}$$

где s - спиновое квантовое число соответствующей частицы, а $2s+1$ - число спиновых состояний, соответственно. Исключением является фотон, который имеет спин $\bar{s} = \bar{1}$, но так как он также безмассовый и имеет 2 поляризации, то для него реализуются только два спиновых состояния ± 1.

Также, здесь и далее считается, что температура ультрарелятивистских частиц одинакова и равна температуре фотонов (температуре Вселенной в рассматриваемый момент времени), тогда множитель осуществляющий искусственный переход от T_i - температуры рассматриваемых частиц, к T - температуре Вселенной $\left(\frac{T_i}{T}\right)^4 = 1$.

Вычисленные аналитически значения эффективного числа степеней свободы приведенные в таблице совпадают с усредненными значениями решеточных вычислений для температур различных "плато"полученных при помощи **sterile-dm** кода [3] (см. Рис. 2.1):

T, МэВ	10	100	300	1000
g_*	10,75	14,25	58,25	68,75

2.4. Вывод параметра Хаббла для различных температур из решения уравнения Эйнштейна

Для случая радиационно-доминированной стадии ($T > 0,8$ эВ) при которой существенно преобладание ультрарелятивистского вещества, уравнение состояния имеет вид $p = \rho_{rad}/3$. Тогда согласно решению Фридмана для случая пространственно - плоской ($\varkappa = 0$) однородной изотропной Вселенной и с учетом полученного ранее выражения для плотности энергии всех ультрарелятивистских частиц $\rho_{rad} \equiv \rho$ (2.4) имеем:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\varkappa}{a^2} \tag{2.8}$$

$$H^2(T) = \frac{8\pi G}{3}\rho(T) = \frac{8\pi G}{3} g_* \frac{\pi^2}{30} T^4 = g_* \frac{4\pi^3 G}{45} T^4 \tag{2.9}$$

$$H(T) = \sqrt{g_* \frac{4\pi^3 G}{45} T^4} \ll \Gamma \tag{2.10}$$

где $\Gamma \sim \alpha^2 T$ - темп протекания реакции, α^2 - сечение процесса

Последнее выражение является условием равновесности любого протекающего во Вселенной процесса при текущей T. Для процессов осцилляций, как и большинства процессов данный критерий является существенным.

Глава 3

Нейтринные осцилляции в плазме

Для нахождения спектра стерильных нейтрино необходимо понимание того какие процессы приводят к их появлению и какие факторы могут эти процессы ускорить или замедлить. Единственным методом получения стерильных нейтрино являются осцилляции, это обусловлено теми условиями которые мы накладываем на эту модель, а именно - отсутствие взаимодействия стерильных нейтрино с веществом.

Рассматривая процесс завершения осцилляций данного нейтрино в плазме, как столкновение осциллирующего активного нейтрино и частицы плазмы с последующим вылетом или активного нейтрино продолжающего осцилляции, или стерильного нейтрино выходящего из взаимодействия, становится очевидно, что наличие вещества (плазмы) увеличивает темп производства стерильных нейтрино.

В данной работе для простоты вычисления матрицы смешивания рассмотрен случай $N_s = 1$, а также пренебрегается смешиванием $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ активных нейтрино между собой и $\nu_s \to \nu_\alpha$ - обратными осцилляциями из стерильных нейтрино в активные.

Рассмотрим стандартный механизм осцилляций в вакууме и изменения, вносимые в полученные уравнения при осцилляциях в плазме с учетом лептонной асимметрии.

3.1. Механизм смешивания активных нейтрино типа α со стерильными нейтрино в вакууме

Для смешивания 2 типов нейтрино можно записать переход от флейворного базиса к массовому базису [1] следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_s\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_\alpha & \sin\theta_\alpha\\ -\sin\theta_\alpha & \cos\theta_\alpha\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

В данном случае матрица смешивания представляет собой сопряженную матрицу поворота в одной плоскости для одного угла Каббибо в отсутствии фаз, однако в произвольном случае перехода между базисами матрица $U^*_{\alpha,i}$ определяется уже несколькими углами Каббибо и фазами.

Откуда векторы состояний имеют вид:

$$|\nu_\alpha\rangle = \cos\theta_\alpha|\nu_1\rangle + \sin\theta_\alpha|\nu_2\rangle \qquad |\nu_s\rangle = -\sin\theta_\alpha|\nu_1\rangle + \cos\theta_\alpha|\nu_2\rangle \tag{3.2}$$

Учитывая, что для стерильных нейтрино $m_s \gg m_\alpha$, а также полагая что $m_2 > m_1$ углы смешивания малы $-\ \sin\theta_\alpha \ll 1$ можно положить $|\nu_2\rangle \approx |\nu_s\rangle$, откуда $m_2 = m_s$, тогда вероятность осцилляций в вакууме $\alpha \to s$ можно записать в следующем виде:

$$P(\alpha \to s) = \sin^2 2\theta_\alpha \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{s,1}}{4E}L\right) \tag{3.3}$$

$$t^{vac}_\alpha = \frac{2E}{\Delta m^2_{s,1}} \approx \frac{2E}{m^2_s} \tag{3.4}$$

Перепишем уравнение для вакуумных осцилляций с учетом, что длина осцилляций $L \approx t$ при $E \gg m_s$:

$$P(\alpha \to s) = \sin^2 2\theta_\alpha \sin^2\left(\frac{t}{2t^{vac}_\alpha}\right) \tag{3.5}$$

Здесь и далее, если не оговорено обратного, запись $\nu_\alpha \to \nu_s$ преобразуется в $\alpha \to s$, где $\alpha = e, \mu, \tau$.

3.2. Взаимодействие активных нейтрино с плазмой

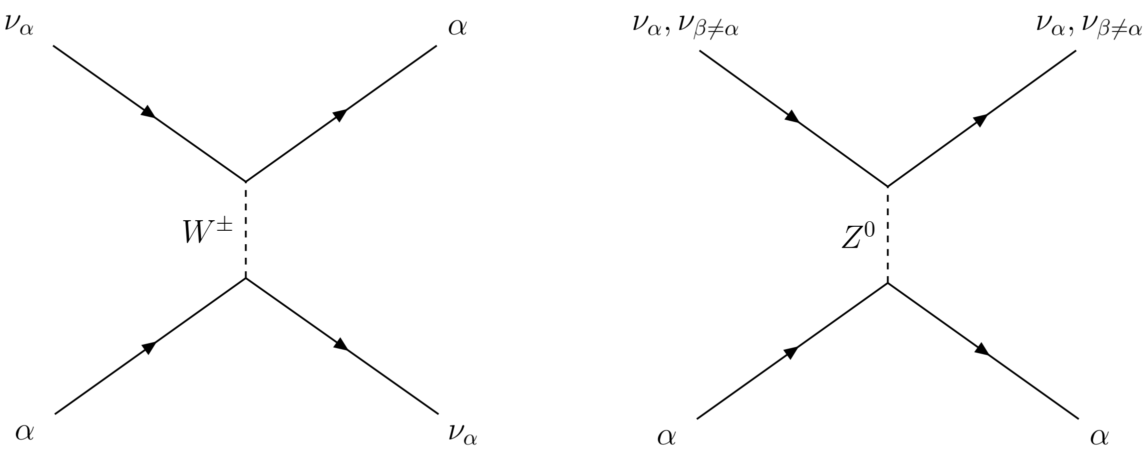
Остановимся подробнее на взаимодействии активных нейтрино с плазмой во время осцилляций. Данное явление называется эффектом Михеева - Смирнова - Вольфенштейна (MSW) и состоит в резонансном когерентном рассеянии активных нейтрино на частицах плазмы. Для этого необходимо внести поправку на взаимодействие в эффективный Гамильтониан смешивания [1]:

$$H = U^*_{\alpha,i}\frac{M^2}{2E}U_{\alpha,i} + V_{int} \tag{3.6}$$

где $M = \begin{pmatrix} m_\alpha & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}$ - массовая матрица,

$V_{int} = \begin{pmatrix} V_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - матрица взаимодействия ν_α с $\alpha = e, \mu, \tau$ в плазме

Матрица взаимодействия включает только взаимодействие с лептонами того же типа, что и смешивающееся активное нейтрино, это обусловлено тем, что в слабых взаимодействиях вероятность рассеяния ν_α на α по $W^\pm$ каналу гораздо выше, чем по нейтральному Z^0 каналу (уже для всех типов лептонов).



Упругое рассеяние активных нейтрино на лептоне типа $\alpha = e, \mu, \tau$.

Однако, как будет показано далее, при осцилляциях могут возникать также взаимодействия между осциллирующим нейтрино и нейтрино плазмы, что при наличии лептонной асимметрии также дает вклад в матрицу взаимодействия уже по первому порядку G_F. Из электрослабой теории:

$$V_{\alpha\alpha} = \sqrt{2} G_F n_\alpha(L) \tag{3.7}$$

Перепишем уравнение (3.5) аналогично для плазмы:

$$P(\alpha \to s) = \sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}} \sin^2 \left(\frac{t}{2t_\alpha^{\text{пл.}}} \right) \tag{3.8}$$

$$\langle P(\alpha \to s) \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}} \tag{3.9}$$

Где фактор $\frac{1}{2}$ обусловлен усреднением вероятности по нескольким периодам осцилляций, при этом:

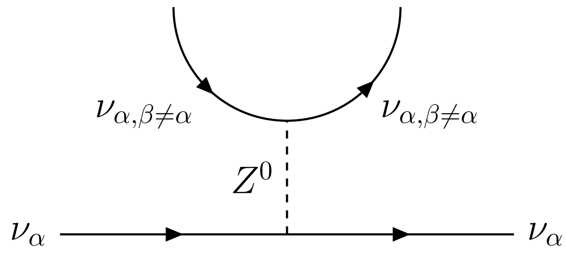
$$t_\alpha^{\text{пл.}} = \frac{t_\alpha^{vac}}{\sqrt{\sin^2 2\theta_\alpha + (\cos 2\theta_\alpha - V_{\alpha\alpha} t_\alpha^{vac})^2}} \tag{3.10}$$

$$\sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}} = \frac{t_\alpha^{2\,\text{пл.}}}{t_\alpha^{2\,vac}} \sin^2 2\theta_\alpha \tag{3.11}$$

Подставляя второе выражение в первое и учитывая что углы смешивания малы, получим:

$$\sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}} = \frac{\sin^2 2\theta_\alpha}{(1 - V_{\alpha\alpha} t_\alpha^{vac})^2} \tag{3.12}$$

3.3. Лептонная асимметрия и ее вклад в добавочный член $V_{\alpha\alpha}$ взаимодействия ν_α с плазмой



Взаимодействие активных нейтрино с нейтрино плазмы.

Рассмотрим вклад лептонной асимметрии в добавочный член взаимодействия с плазмой. Из уравнения (3.7):

$$V_{\alpha\alpha} = \sqrt{2}G_F\left[2(n_{\nu_\alpha}(T) - n_{\bar{\nu}_\alpha}(T)) + \sum_{\beta\neq\alpha}(n_{\nu_\beta}(T) - n_{\bar{\nu}_\beta}(T))\right] \tag{3.13}$$

где слагаемое по α суммируется дважды из-за неразличимости переходов между тождественными фермионами в плазме $\nu_\alpha \longleftrightarrow \nu_\alpha$.

С учетом эпохи e^-e^+ аннигиляции из лептон-фотонного отношения имеем:

$$\frac{n_{\nu_\alpha}(T) - n_{\bar{\nu}_\alpha}(T)}{n_\gamma(T)} = \frac{11}{4}\,\frac{n_{\nu_{\alpha,0}} - n_{\bar{\nu}_{\alpha,0}}}{n_{\gamma,0}} \tag{3.14}$$

$$\Delta n_{\nu_\alpha}(T) = \frac{11}{4}\frac{n_\gamma(T)}{n_{\gamma,0}}\Delta n_{\nu_{\alpha,0}} = \frac{11}{4}\frac{T^3}{T_0^3}\frac{T_0^2\mu_{\nu_\alpha}}{6} = \frac{11}{24}\,\frac{T^3\mu_{\nu_\alpha}}{T_0} \tag{3.15}$$

где фактор $\frac{11}{4}$ соответствует отношению кубов температур до эпохи e^-e^+ аннигиляции и после. Также можно заметить что благодаря ненулевому хим. потенциалу μ_i появляется лептонная асимметрия, что и дает основной вклад во взаимодействие с плазмой.

$$V_{\alpha\alpha} = \frac{11\sqrt{2}}{24T_0}\,T^3G_F\left[2\mu_{\nu_\alpha} + \sum_{\beta\neq\alpha}\mu_{\nu_\beta}\right] \tag{3.16}$$

где хим. потенциал нейтрино типа α в плазме при температуре T:

$$\mu_{\nu_\alpha}(T) = L_{\nu_\alpha}\mu_{L_\alpha}(T)$$

примем что $\mu_\nu = 0.01\,T$ для всех типов активных нейтрино, что справедливо благодаря осцилляциям активных нейтрино между собой.

3.4. Темп производства стерильных нейтрино

При наличии термодинамического равновесия (2.10) (для $T \gtrsim 3$ МэВ) плотность активных нейтрино в среде не меняется, однако в процессе осцилляций с некоторой вероятностью происходит рождение стерильных нейтрино, сразу же выходящих из взаимодействия (мы пренебрегаем обратными осцилляциями) из-за чего их плотность растет с течением времени. Таким образом темп производства стерильных нейтрино в осцилляциях [1] отражает усредненную вероятность переходов (3.9) на темп потери когерентности волнового пакета нейтрино в плазме, т.к. при рассеянии активного нейтрино происходит коллапс волновой функции:

$$\Gamma_{\alpha\to s} = \frac{1}{2}\,\Gamma_\alpha \langle P(\alpha \to s)\rangle = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}}\Gamma_\alpha \tag{3.17}$$

Фактор 1/2 соответствует тому что волновой пакет во время осцилляций половину времени находится в состоянии стерильных нейтрино, которые не взаимодействуют с плазмой.

$$\Gamma_\alpha = \frac{7\pi}{24} G_F^2 T^4 E_{\nu_\alpha}\left(1 + \frac{4}{9}\delta_\alpha^e\right) \tag{3.18}$$

Для температур значительно ниже 100 МэВ, присутствует практически полное доминирование e - компоненты в плазме, поэтому темп взаимодействия с ней будет выше, чем с τ и μ.

Однако, данная формула учитывает взаимодействие только в лептонном секторе, на деле же для температур выше 100 МэВ необходимо проводить качественный анализ адронов в плазме и строить модель учитывающую также взаимодействия с адронами, возникающими в КХД-переход. По большей части к таким адронам относятся легкие мезоны, такие как например π - мезон.

Глава 4

Стерильные нейтрино как частицы темной материи

Так как при рождении и достаточно продолжительное время после стерильные нейтрино являются ультрарелятивистскими, мы полагаем, что при достаточной массе они могут являться частицами теплой темной материи. Наиболее весомым аргументом в выборе модели с WDM служит проблема карликовых галактик и малых неоднородностей, которая решается за счет высокой энергии частиц темной материи, разлетающихся достаточно быстро из областей с высокой плотностью энергии темной материи и "оседая" в областях с низкой плотностью энергии и как следствие - происходят "замывания" и подавление образовавшихся на ранних этапах неоднородностей темной материи во Вселенной. Этот процесс продолжается до тех пор пока частицы темной материи остаются релятивистскими.

Для получения ограничений на массу стерильных нейтрино и угол смешивания при которых их можно рассматривать как частицы теплой темной материи - необходимо получить их спектр в общем виде от температуры и приведенной по температуре энергии, а затем проинтегрировать полученное выражение.

4.1. Уравнение Больцмана

Запишем уравнение Больцмана [4]:

$$\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{\alpha\rightleftharpoons s}\Big[f_\alpha - f_s\Big] \tag{4.1}$$

Как и ранее, учтем что обратные процессы (в рамках данной задачи) маловероятны и внесут лишь небольшую поправку в результат, тогда:

$$\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{\alpha\to s}\; f_\alpha \tag{4.2}$$

где f_α - с хорошей точностью описывается распределением Ферми - Дирака по $(\vec{p}, t)$.

$$\frac{\mathrm{d}f_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}}\,\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \tag{4.3}$$

С учетом, что $\vec{p} \propto 1/$a, где a - масштабный фактор:

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \propto -\frac{\dot{a}}{a^2} = -\frac{H}{a} = -H\vec{p} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - H\vec{p}\,\frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}} = \Gamma_{\alpha\to s}\; f_\alpha \tag{4.5}$$

Тогда, т.к. частицы ультрарелятивистские $E \gg m$ и $E \approx |\vec{p}|$, а плазма изотропна, то:

$$T(t) \propto \frac{const}{a(t)} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{\partial f_s}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t} = -\left(\frac{\dot{a}}{a^2}\right)\frac{\partial f_s}{\partial T} = -HT\frac{\partial f_s}{\partial T} \tag{4.7}$$

$$-H\left(T\,\frac{\partial f_s}{\partial T} + E\,\frac{\partial f_s}{\partial E}\right) = \Gamma_{\alpha\to s}\; f_\alpha \tag{4.8}$$

Сделаем замену переменных: $y \equiv E_\nu/T$

$$-H\left(T\,\frac{\partial f_s}{\partial T} + \frac{E}{T}\,\frac{\partial f_s}{\partial \frac{E}{T}}\right) = \Gamma_{\alpha\to s}\; f_\alpha \tag{4.9}$$

$$\left(T\,\frac{\partial f_s}{\partial T} + y\,\frac{\partial f_s}{\partial y}\right) = -\frac{1}{H}\,\Gamma_{\alpha\to s}\; f_\alpha \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{\partial f_s(y,T)}{\partial T}\right)_y = -\frac{1}{HT}\,\Gamma_{\alpha\to s}\; f_\alpha \tag{4.11}$$

Интегрируя полученное выражение по T и подставляя результат (3.17):

$$f_s(y,T) = -\frac{1}{4}\int\limits_{\infty}^{T} \sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}}\;\Gamma_\alpha\; f_\alpha \frac{1}{HT'}\;\mathrm{d}T' \tag{4.12}$$

где f_α с учетом замены имеет вид:

$$f_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3}\;\frac{1}{e^{y-\frac{\mu_\alpha}{T}}+1} \tag{4.13}$$

4.2. Спектр стерильных нейтрино при наличии лептонной асимметрии

При итоговой подстановке всех полученных ранее величин $\sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}}$ (3.12), $V_{\alpha\alpha}$ (3.16), t_{vac} (3.4), Γ_α (3.18), f_α (4.13) , $H(T)$ (2.10) входящих в функцию распределения $f_s(y,T)$ (4.12) и замены $\nu_{\alpha,s} \to \alpha, s$ получаем интегральное уравнение, зависящее от $y, T, m_s, \sin^2 2\theta_\alpha$ и от некоторым кусочным образом заданной функции для эффективных степеней свободы $g_*(T)$:

$$f_s(y,T) = -\frac{7\pi}{24}\,\frac{1}{8\pi^3}\,G_F^2\left(1+\frac{4}{9}\,\delta_\alpha^e\right)\sin^2 2\theta_\alpha \int\limits_\infty^T \frac{T'^5\,y}{\left(1-\frac{11\sqrt{2}}{12\,T_0}\,G_F T'^4\,\frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha+\sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(e^{y-\frac{\mu_\alpha}{T'}}+1\right)\sqrt{\frac{4\pi^3 G}{45}T'^4 g_*(T')}T'}\,\mathrm{d}T' = -\underbrace{\frac{7\,G_F^2}{512\,\pi^4}\sqrt{\frac{5}{\pi G}}\left(1+\frac{4}{9}\,\delta_\alpha^e\right)}_{C(\alpha)}\sin^2 2\theta_\alpha\times$$

$$\times\int\limits_\infty^T \frac{T'^2 y\,\mathrm{d}T'}{\sqrt{g_*(T')}\left(1-\frac{11\sqrt{2}}{12\,T_0}\,G_F T'^4\,\frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha+\sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2\left(e^{y\,-\,\frac{\mu_\alpha}{T'}}+1\right)} =$$

$$= -\,C(\alpha)\,\sin^2 2\theta_\alpha\int\limits_\infty^T \frac{T'^2 y\,\mathrm{d}T'}{\sqrt{g_*(T')}\left(1-\frac{11\sqrt{2}}{12\,T_0}\,G_F T'^4\,\frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha+\sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2\left(e^{y\,-\,\frac{\mu_\alpha}{T'}}+1\right)} \tag{4.14}$$

где $C(\alpha)$ - постоянная определенная выше, зависящая от типа активного нейтрино и в общем случае от порядка расматриваемых температур (как упоминалось ранее при T $>$ 100 МэВ взаимодействие становится близким к равновероятному)

4.3. Получение ограничений на параметры смешивания

Зная спектр стерильных нейтрино при остывании Вселенной и плотность энергии темной материи $\rho_\Lambda(T)$ можно получить условия на угол смешивания и массу стерильного нейтрино при фиксированной температуре в каждый момент. Для этого необходимо проинтегрировать выражение для спектра (4.14) как плотность энергии стерильных нейтрино и положить, что стерильные нейтрино и есть частицы темной материи. А значит:

$$\rho_s(y,T) = 4\pi g_s \int E^3 f_s(y,T)\mathrm{d}E = 4\pi g_s T^4 \int\limits_0^{y_{max}} y^3 f_s(y,T)\mathrm{d}y = \rho_\Lambda(T) \quad (4.15)$$

где y_{max} определяется при численном интегрировании как параметр обрезания графика при стремлении подынтегральной функции к нулю.

Далее будет рассматриваться ультрарелятивистская остывающая темная материя.

Получим среднюю плотность темной материи как функцию температуры из закона сохранения энтропии в сопутствующем объеме с учетом (2.6):

$$sa^3 = const \quad (4.16)$$

$$g_*(T)T^3a^3 = g_{*,0}T_0^3\ a_0^3 = const \quad (4.17)$$

$$\rho_\Lambda(T)\ a^3 = \rho_{\Lambda,\,0}\ a_0^3 \quad (4.18)$$

$$\rho_\Lambda(T) = \rho_{\Lambda,\,0}\ \frac{g_*(T)}{g_{*,0}}\ \frac{T^3}{T_0^3} \quad (4.19)$$

Введем критическую плотность энергии вещества во Вселенной ρ_c:

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G}H_0^2 \quad (4.20)$$

$$\frac{\rho_\Lambda(T)}{\rho_c} = \frac{\rho_{\Lambda,\,0}}{\rho_c}\ \frac{g_*(T)}{g_{*,0}}\ \frac{T^3}{T_0^3} = \Omega_\Lambda\ \frac{g_*(T)}{g_{*,0}}\ \frac{T^3}{T_0^3} \quad (4.21)$$

$$\rho_\Lambda(T) = \Omega_\Lambda \frac{3H_0^2}{8\pi G}\ \frac{g_*(T)}{g_{*,0}}\ \frac{T^3}{T_0^3} \quad (4.22)$$

Подставим в выражение для плотности стерильных нейтрино (темной материи) (4.22) полученное уравнение спектра (4.14):

$$\rho_\Lambda(T) = 4\pi g_s\ C(\alpha)T^4\ \sin^2 2\theta_\alpha \int\limits_0^{y_{max}} y^3 \left[\ \int\limits_T^{\infty} \frac{T'^2 y}{\sqrt{g_*(T')}\left(e^{y - \frac{\mu_\alpha}{T'}} + 1\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\left(1 - \frac{11\sqrt{2}}{12\,T_0}\ G_F T'^4\ \frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha + \sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2}\,\mathrm{d}T'\right] \mathrm{d}y = [\ g_s = 2\ ] =$$

$$= 8\pi C(\alpha)\, T^4 \sin^2 2\theta_\alpha \int\limits_0^{y_{max}} y^4 \left[\int\limits_T^{\infty} \frac{T'^2}{\sqrt{g_*(T')}\left(e^{y - \frac{\mu_\alpha}{T'}} + 1\right)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\left(1 - \frac{11\sqrt{2}}{12\, T_0}\, G_F T'^4\, \frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha + \sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2} \mathrm{d}T' \right] \mathrm{d}y \tag{4.23}$$

Откуда окончательно:

$$\sin^2 2\theta_\alpha = \frac{\rho_\Lambda(T)}{8\pi\, T^4 C(\alpha)} \left[\int\limits_0^{y_{max}} y^4 \left[\int\limits_T^{\infty} \frac{T'^2}{\sqrt{g_*(T')}\left(e^{y - \frac{\mu_\alpha}{T'}} + 1\right)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{1}{\left(1 - \frac{11\sqrt{2}}{12\, T_0}\, G_F T'^4\, \frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha + \sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2} \mathrm{d}T' \right] \mathrm{d}y \right]^{-1} = \frac{g_*(T)}{g_{*,0}}\, \frac{3\, H_0^2\, \Omega_\Lambda}{16\pi^2 T\, G\, T_0^3\, C(\alpha)} \times$$

$$\left[\int\limits_0^{y_{max}} y^3 \int\limits_T^{\infty} \frac{T'^2\, \mathrm{d}T'}{\sqrt{g_*(T')}\left(e^{y - \frac{\mu_\alpha}{T'}} + 1\right)\left(1 - \frac{11\sqrt{2}}{12\, T_0}\, G_F T'^4\, \frac{y}{m_s^2}\left[2\mu_\alpha + \sum\limits_{\beta\neq\alpha}\mu_\beta\right]\right)^2} \mathrm{d}y \right]^{-1} \tag{4.24}$$

В полученном уравнении переменные величины – $\sin^2 2\theta_\alpha, m_s, y, T$. При построении зависимости используется следующий алгоритм: фиксируется m_s, затем фиксируется T и для него численно вычисляется двойной интеграл - сначала при фиксированном значении T (подынтегральная T' является переменной интегрирования), а затем по переменной y берется второй интеграл и обрезается значением y_{max} при стремлении подынтегрального выражения к нулю, процедура повторяется для всего интересующего нас диапазона температур и получается набор значений $\sin^2 2\theta_\alpha$ соответствующих заданному m_s.

Остальные величины или известны, или выражаются через указанные выше неизвестные: $T_0 = 2.7255$ К - средняя температура Вселенной в текущий момент времени, $g_{*,0} = g_\gamma = 2$ - эффективное число степеней свободы (при температуре T_0 ультрарелятивистскими свободными частицами являются только фотоны), $\Omega_\Lambda = 0.26$ - относительная плотность темной материи (заданная при температуре T_0), $H_0 = 70\ \frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпк}}$ - усредненная постоянная Хаббла на текущий момент (здесь взято усредненное значение с целью избежать обсуждений вопроса Хаббловского кризиса), $G_F = 1.1663787 \cdot 10^{-11}$ МэВ$^{-2}$ - константа Ферми, $G = 6.6743 \cdot 10^{11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot c^2}$ - гравитационная постоянная.

К функциям относятся: $g_*(T)$ - некоторая аппроксимация функции полученной с помощью решеточных вычислений из [2, 3], $\mu_\nu(T) = 0,01\ T$ - усредненное значение хим. потенциалов активных нейтрино.

Глава 5

Заключение

Полученное выше уравнение для спектра стерильных нейтрино было выведено из большого числа приближений и жестких ограничений, из-за чего имеет достаточно узкое применение, например, оно хорошо подходит для описания процессов протекающих в низкотемпературной лептонной плазме. К ним относятся процессы протекающие после КХД-перехода и до остывания ультрарелятивистских электронов. Поскольку данная модель требует дальнейших исследований и отказа от части искусственно наложенных ограничений, таких как ограничение на диапазон температур при подсчете темпа взаимодействия нейтрино с плазмой или ограничение на число осциллирующих типов активных нейтрино, моделирование полученных результатов не проводилось.

Все вносимые в дальнейшем поправки будут касаться величины получаемой из процесса осцилляций, а не термодинамики - вероятности осцилляций активных нейтрино в стерильное нейтрино.

В дальнейших расчетах и при последующем численном моделировании будет рассмотрена гораздо более широкая с точки зрения применимости и температур модель $3 + 1$ с учетом смешивания 3 типов активных нейтрино одновременно с одним стерильным, которая аналогично данной работе будет учитывать все 3 типа лептонных асимметрий.

В рамках этой модели будут также учтены взаимодействия нейтрино с адронами плазмы в КХД переход, что даст возможность говорить о полном температурном спектре в данной задаче.

Литература

[1] Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва*, Изд. стереотип. - М.: ЛЕНАНД, 2023. - 616 с.

[2] Mikko Laine, and York Schroder, *Quark mass thresholds in QCD thermodynamics*, BI-TP 2006/07, https://arxiv.org/pdf/hep-ph/0603048

[3] Tejaswi Venumadhav, Francis-Yan Cyr-Racine, Kevork N. Abazajian and Christopher M. Hirata, *Sterile neutrino dark matter: A tale of weak interactions in the strong coupling epoch*, UCI-TR-2015-12, INT-PUB-15-032, http://arxiv.org/pdf/1507.06655, **sterile-dm** code, https://github.com/ntveem/sterile-dm/tree/master/src;

[4] Scott Dodelson, and Lawrence M. Widrow, *Sterile Neutrinos as Dark Matter*, 22 Mar 1993, https://arxiv.org/abs/hep-ph/9303287v1;