

Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

**НОВЫЙ ПОДХОД К АППРОКСИМАЦИИ ДИАГРАММ ХАББЛА
ДЛЯ СТАНДАРТНЫХ СВЕЧ НА КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЯХ**

Выполнил студент:
Кован Алексей Андреевич, 214 гр.
Научный руководитель:
член-корр. РАН,
доктор физ. - мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва
2023

Содержание

1. Введение	3
2. Новый подход	4
3. Проверка на состоятельность в Λ CDM	4
4. Сравнение с разложением в ряд Тейлора по логарифмам в Λ CDM	9
5. Проверка для "Evolving Dark Energy"	10
6. Заключение	11
7. Ссылки	12

Введение

Как известно, на сегодняшний день все геометрические расстояния во вселенной увеличиваются со временем, благодаря чему тела в ней, в среднем, удаляются друг от друга. В результате этого светящиеся объекты во вселенной испытывают красное смещение, называемое космологическим. Измеряя космологическое красное смещение у астрономических объектов с известной светимостью (стандартных свеч), можно строить диаграммы зависимости расстояний до этих объектов от их красных смещений - диаграммы Хаббла. Эти диаграммы содержат в себе информацию о расширении вселенной. Так как диаграммы Хаббла, как правило, содержат множество точек, для более удобного их анализа строят кривую с намного меньшим числом параметров, которая аппроксимирует эту зависимость для стандартных свеч, при этом существенно, что выражение для этой кривой не постулирует никакую космологическую модель, то есть является модельно независимым. После этого, анализируются полученные в ходе аппроксимации параметры кривой и делаются выводы о состоятельности той или иной космологической модели.

Проблема

В [3], [4] для анализа совокупности сверхновых типа Ia, квазаров и γ -всплесков при красных смещениях вплоть до $z = 7$, предлагается использовать разложение фотометрического расстояния в частичную сумму по степеням $\lg(1+z)$ (так называемый полиномиальный логарифм):

$$D_L^{\log pol} = k \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{j=1}^3 a_j \lg^j(1+z) \quad (1)$$

здесь a_1 фиксирован и равен 1 для того, чтобы удовлетворить закону Хаббла при малых z , а k - калибровочный параметр, вырожденный с параметром H_0 , поэтому значение H_0 можно сразу задать, равное $70 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$. Данное логарифмическое разложение лучше сходится при больших красных смещениях по сравнению со стандартным линейным разложением по степеням z . Фотометрическое расстояние в космологии задаётся следующим выражением:

$$D_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (2)$$

где в конкретной космологической модели параметр Хаббла $H(z)$ может быть явно выражен через её космологические параметры и красное смещение.

Разложив формулу (2) для нужной космологической модели по степеням $\lg(1+z)$, можно найти связь между космологическими параметрами модели и параметрами a_i , полученными в ходе аппроксимации диаграммы Хаббла функцией $D_L^{\log pol}$. Однако, как было показано в [1] и в [2] на примере Λ CDM, такой подход становится некорректным при красных смещениях примерно ≥ 2 . Свойство тейлоровского разложения гарантирует верные значения параметров лишь для z в окрестности нуля, вследствие чего с увеличением z , для каких-то значений параметров возникает ошибка в их определении, вызванная самим методом. Цель этой работы - предложить альтернативный модельно независимый метод определения космологических параметров, который позволит получать их верные значения для диаграмм Хаббла во всём диапазоне z .

Новый Подход

Глобально идея нового метода состоит в том, чтобы сравнить полученную в ходе аппроксимации кривую напрямую с функцией (2) и найти такие значения космологических параметров, при которых различие кривой и функции будет минимально равномерно во всём исследуемом диапазоне z . Другими словами необходимо ещё раз аппроксимировать кривую формулой (2) в случае конкретной космологической модели, где новые параметры и будут искомыми космологическими. При этом важно, чтобы эта кривая имела малое расхождение с искомой функцией фотометрического расстояния $D_L(z)$ при минимальном числе параметров.

Для примера рассмотрим простейший полином $\sum_{j=1}^n a_j z^j$. Таким полиномом, как известно, посредством выбора n , можно всегда аппроксимировать любую функцию с наперёд заданной точностью. Дальнейшая же аппроксимация интегральной формулой напрямую не вполне удобна, поэтому домножим этот полином на $k(1+z)c/H_0$ (то есть будем аппроксимировать диаграмму Хаббла полиномом n -ой степени, умощенным на $\alpha(1+z)$: $D_L^{\text{pol}} = k(1+z)c/H_0 \sum_{j=1}^n a_j z^j$) и приравняем к фотометрическому расстоянию (2), так как (2) не является полиномом, запишем для корректности величины a_j как функции z . Поделив левую и правую часть на общий множитель, будем иметь:

$$k \sum_{j=1}^n a_j(z) z^j = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')/H_0}$$

Взяв производную по z от обеих частей равенства, получим уже алгебраическое равенство:

$$k \sum_{j=1}^n \left[j a_j(z) z^{j-1} + z^j \frac{da_j}{dz} \right] = \frac{H_0}{H(z)}$$

Так как в полиноме a_j - константы, можно приближённо записать:

$$k \sum_{j=1}^n j a_j z^{j-1} \approx \frac{H_0}{H(z)}$$

Отсюда видно, что производную данного полинома, делённую на множитель перед интегралом, можно аппроксимировать функцией $H_0/H(z, \text{косм. пар.})$. Также становится ясно, что ошибка данного метода практически полностью определяется только лишь изначальной аппроксимацией диаграммы Хаббла, соответственно, нужно аппроксимировать её такими функциями, которые при том же числе параметров будут для существующих диаграмм давать минимальную ошибку.

Проверка на состоятельность в Λ CDM

Для начала исследуем различные функции с целью найти наилучшую для аппроксимации диаграммы Хаббла. В качестве космологической модели выберем Λ CDM, так как она неплохо описывает современную вселенную в целом, а также довольно проста. Возьмём как и в [3], [4] плоскую Λ CDM, положив в ней $\Omega_{\text{rad}} = \Omega_{\text{curv}} = 0$. Тогда Ω_Λ может быть выражена через Ω_m как $1 - \Omega_m$ и формулу фотометрического расстояния можно записать, как:

$$D_L^{\Lambda\text{CDM}}(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + 1 - \Omega_m}} \quad (3)$$

Вычислим это расстояние для диапазона z от 0 до ~ 5 для различных параметров Ω_m . Из тех функций, что я исследовал, лишь упомянутые выше, как и следовало ожидать, оказались наиболее подходящими для аппроксимации фотометрического расстояния, поэтому аппроксимируем получившиеся кривые функцией из примера выше и суммой (1) 4-й степени, умноженной для удобства на $1+z$:

$$D_L^{\log pol} = k(1+z) \frac{c}{H_0} \sum_{j=1}^4 a_j \lg^j(1+z) \quad (1a)$$

Зафиксируем значение $a_1 = 1$ для функции линейной суммы и $a_1 = \ln(10)$ для логарифмической, чтобы удовлетворить закону Хаббла и не тащить за собой множитель $\ln(10)$ в формуле (1a). Для анализа построим графики относительной ошибки:

$$\Delta(z) = \frac{D_L^{\text{approx}}(z) - D_L^{\Lambda\text{CDM}}(z)}{D_L^{\Lambda\text{CDM}}(z)} \quad (4)$$

Как видно из рис. 1, уже для 4-й степени ошибка в обоих случаях не превышает 1-го процента при красных смещениях больше 0,5 для логарифмической аппроксимации и больше 1 для линейной (это, строго говоря, справедливо только для ΛCDM , однако общее поведение ошибок существенно не изменится и в других моделях, т. к. расстояния в них будут всё равно определяться формулами типа (2), однако для некоторых моделей, возможно, всё же придётся увеличивать количество слагаемых в аппроксимационных формулах). Также видно лучшее поведение логарифмической аппроксимации (1a) при больших z по сравнению с линейной, что говорит о большей целесообразности использования именно этой функции. Рост же относительной ошибки при близких к нулю красных смещениях (вплоть до 6-ти процентов для $\Omega_m = 0,1$) оказывается несущественным для данного метода.

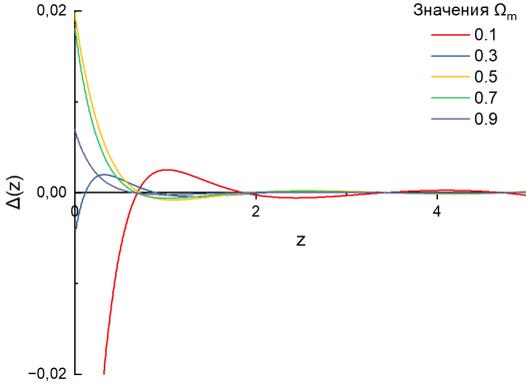


Рис. 1а: Отн. ошибка D_L и $D_L^{\log pol}$

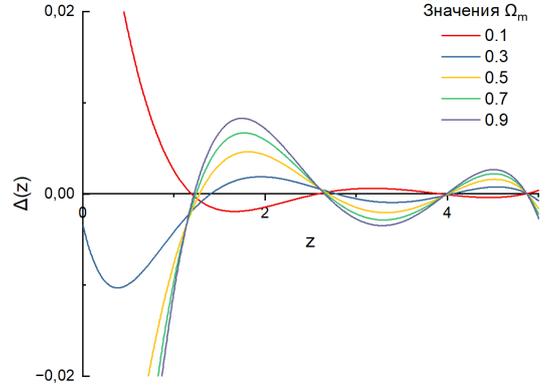


Рис. 1б: Отн. ошибка D_L и D_L^{pol}

С целью проверки состоятельности самого метода в приближенных к реалiam условиях, воспользуемся такой же методикой, как и в [1], [2]: сгенерируем фиктивные данные, которые будут воспроизводить определённую космологическую модель при заданных значениях космологических параметров, после чего попробуем аппроксимировать их формулой (1a) и найти значения параметров, истинное значение которых мы заранее знаем.

Связь расстояния с фотометрическим задаётся формулой:

$$\mu = m + 5 \left[\lg \left(\frac{D_L}{\text{Мпк}} \right) + 5 \right] \quad (5)$$

Параметр m зависит от отклонения H_0 от выбранного значения в $70 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$ и, в силу своей близости к нулю, может быть отброшен.

Генерация приближённых к реальным фиктивных данных - довольно непростая задача, от результата решения которой напрямую зависят погрешности в определении космологических параметров. Например, на рис. 2 представлена «неотчищенная» диаграмма Хаббла сверхновых Ia и квазаров, взятых из астрономических каталогов ([3], [5], [6]). По такой диаграмме будет практически невозможно получить точное значение каких либо космологических параметров в независимости от количества слагаемых в аппроксимационной функции, так как относительные погрешности значений параметров будут очень велики. Поэтому мы проверяем работоспособность метода на более точно воспроизведённой фиктивной диаграмме Хаббла, чтобы получить результаты, по которым будет легче судить о состоятельности метода. Для генерации фиктивных данных, будет вновь использована модель Λ CDM из-за своей универсальности. Условным критерием «точности» (т. е. согласования данных с Λ CDM и, соответственно, условия минимальных погрешностей результатов) этих фиктивных данных будут служить обратно восстановленные космологические параметры H_0 и Ω_m этой модели, полученные после прямой аппроксимации данных интегральной формулой (3). Чем точнее будет их соответствие с заданными при генерации данных, тем меньше погрешности самих данных будут влиять на ошибку их аппроксимации формулой (1a) и, соответственно, получившегося результата. Тем самым получившиеся погрешности будут в большей степени говорить о погрешностях самого метода.

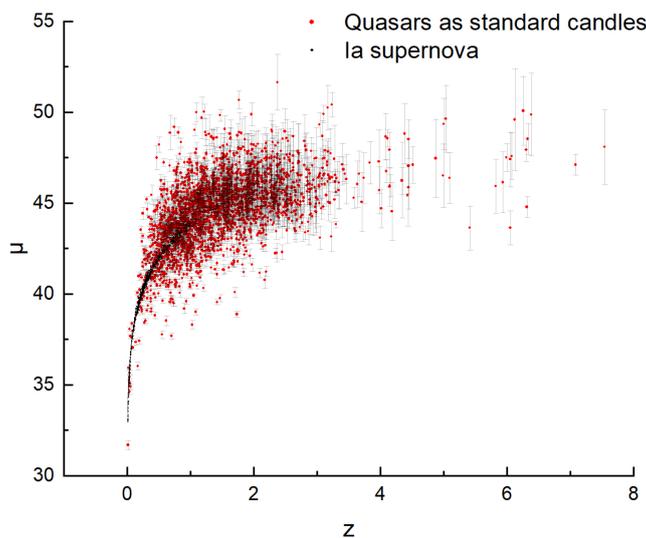


Рис. 2: Диаграмма Хаббла на основе двух астрономических каталогов

Данные будут разделены на два типа - квазары и сверхновые. Квазары будут распределены в промежутке $z \in [0,04; 5,092]$ с шагом 0,004. Количество точек на каждом значении z будет переменным и уменьшаться с увеличением z . Так, при близких к нулю z количество точек будет около 4, а при z около 5, в среднем лишь каждый десятый шаг будет иметь точку. Точки будут сгенерированы случайно по закону нормального распределения с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением $\alpha\mu$. Сверхновые будут распределены в промежутке $z \in [0,003; 1,5]$ с шагом 0,003, количество точек для каждого значения z будет фиксированно и равно 4. Помимо этого отличие сверхновых от квазаров будет заключаться в том, что стандартное отклонение их нормального распределения будет равно $\frac{\alpha}{2}\mu$. Относительную погрешность α подберём так, чтобы восстановленные напрямую формулой (3) параметры имели относительную ошибку не выше 1% (в нашем случае значение α будет равно 0,01). Значение H_0 будет равно $70 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$. В качестве исследуемых значений Ω_m возьмём такие, при аппроксимации которых кривая (1a) вела себя хуже всего (рис. 1a): 0,1 и 0,5.

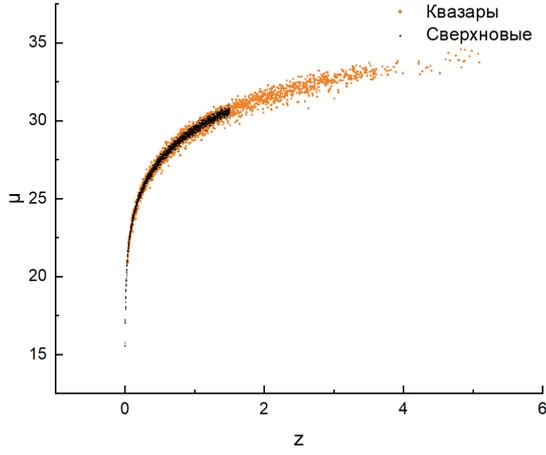


Рис. 3а: Фикт. данные при $\Omega_m = 0,1$

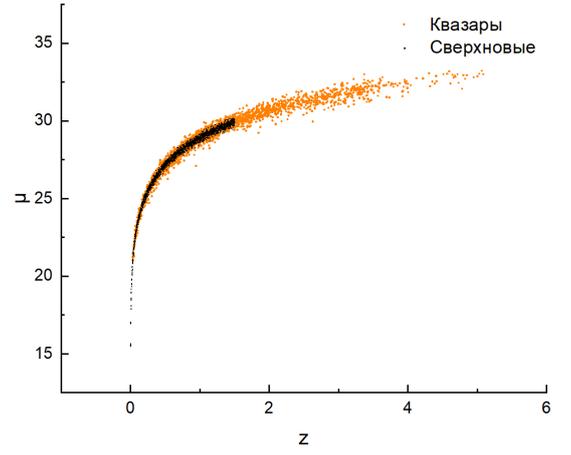


Рис. 3б: Фикт. данные при $\Omega_m = 0,5$

При $\alpha = 0,01$, параметры, полученные аппроксимацией формулой (3), имеют относительные ошибки не выше 1%:

Точные значения	H_0 , км/с/Мпк	Ω_m	отн. ошибка Ω_m
$\Omega_m = 0,1$	$70,29 \pm 0,26$	$0,0993 \pm 0,0011$	0,0075
$\Omega_m = 0,5$	$70,5 \pm 0,4$	$0,495 \pm 0,004$	0,01

Таблица 1: Результат аппроксимации диаграммы Хаббла формулой (2)

Теперь будем аппроксимировать эти же данные формулой (1а) (коэффициент a_1 , как и прежде, равен $\ln(10)$):

	$\Omega_m = 0,1$	$\Omega_m = 0,5$
a_2	$3,85929 \pm 1,47264$	$0,86349 \pm 0,80653$
a_3	$-3,41304 \pm 2,70688$	$-2,70681 \pm 1,71444$
a_4	$0,5046 \pm 1,66718$	$1,34212 \pm 1,11074$
k	$0,93956 \pm 0,07305$	$0,98875 \pm 0,05016$

Таблица 2: Результат аппроксимации диаграммы Хаббла формулой (1а)

Зная коэффициенты и погрешности фита, можно уже сразу получать космологические параметры прямой интегральной формулой, однако, для удобства, можно сократить общий множитель у (1а) и (3) и взять производную по z от обеих формул, в итоге получим:

$$\frac{k}{1+z} \left[\sum_{j=2}^4 \frac{j a_j \ln^{j-1}(1+z)}{\ln^j(10)} + 1 \right] \approx \frac{1}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m}} \quad (6)$$

Далее аппроксимируем левую часть этого равенства правой с параметром Ω_m . Погрешность параметра H_0 можно оценить через коэффициент k . В итоге имеем:

Точные значения	H_0 , км/с/Мпк	Ω_m
$\Omega_m = 0,1$	$70 \pm 5,44$	$0,09892 \pm 0,04674$
$\Omega_m = 0,5$	$70 \pm 3,55$	$0,50378 \pm 0,12972$

Таблица 3: Значения параметров (а)

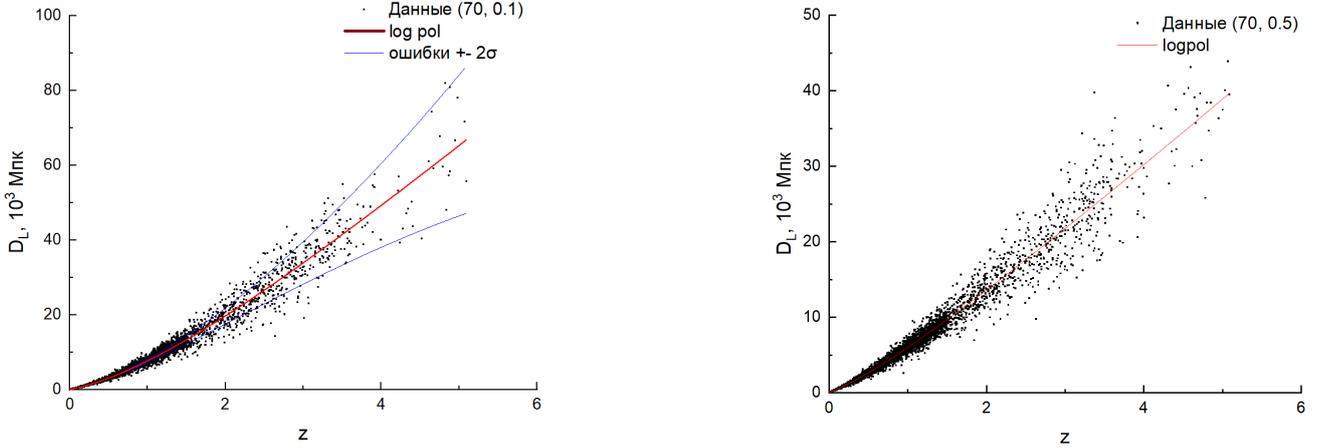


Рис. 4: Графические примеры фитирования данных функцией (1а)

Что в табл. 3, что в табл. 2 такие большие сигмы объясняются тем фактом, что мы фитируем диаграмму Хаббла в большом диапазоне красных смещений, где при высоких z у квазаров очень большие погрешности и самих точек очень мало. Грубо говоря в таких диаграммах для традиционного анализа данных нехватает статистики. Однако можно оценить погрешности результатов и другими методами, помимо аппроксимации. Так например, графическая оценка погрешностей параметров без учёта погрешностей, выдаваемых фитом, даст следующий результат (сами значения параметров, конечно же, остаются неизменными):

Точные значения	Ω_m
$\Omega_m = 0,1$	$0,099 \pm 0,023$
$\Omega_m = 0,5$	$0,50 \pm 0,06$

Таблица 4: Значения параметров (б)

Увеличивая в фиктивных данных количество точек на больших красных смещениях, а также уменьшая разброс этих точек, можно получить более точные результаты. Так, для диаграммы Хаббла с постоянным числом точек и довольно малым стандартным отклонением получают следующие результаты:

Точные значения	Ω_m
$\Omega_m = 0,1$	$0,09976 \pm 0,00523$
$\Omega_m = 0,5$	$0,50173 \pm 0,0065$
$\Omega_m = 0,9$	$0,90105 \pm 0,00228$

Таблица 5: Значения параметров (в)

Здесь уже относительные ошибки значений параметров не превышают и 0,35%. Если же данный метод применять напрямую к функции фотометрического расстояния (т. е., условно, устремить стандартное отклонение точек к нулю), то для худшего значения $\Omega_m = 0,1$ получим 0,09994. Эта ошибка связана уже с самой аппроксимацией (рис. 1) и, конечно, с численными расчётами. Она является примером истинной ошибки самого метода для Λ CDM.

Сравнение с разложением в ряд Тейлора по логарифмам в Λ CDM

Попробуем получить значения параметров в Λ CDM для широкого диапазона z путём, описанным в [1-4] - аппроксимацией той же фиктивной диаграммы формулой (1) и последующем извлечении параметра Ω_m путём разложения формулы (3) в ряд, аналогичный сумме (1).

Коэффициент a_1 по прежнему равен 1, а коэффициенты $a_2 - a_4$ в Λ CDM будут зависеть от Ω_m следующим образом:

$$a_2 = \ln(10) \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\Omega_m \right)$$

$$a_3 = \ln^2(10) \left(\frac{9}{8}\Omega_m^2 - 2\Omega_m + \frac{7}{6} \right)$$

$$a_4 = \ln^3(10) \left(-\frac{135}{64}\Omega_m^3 + \frac{9}{2}\Omega_m^2 - \frac{47}{16}\Omega_m + \frac{5}{8} \right)$$

Значения параметров после аппроксимации:

	$\Omega_m = 0,1$
a_2	$3,66355 \pm 1,48175$
a_3	$4,97088 \pm 1,84783$
a_4	$4,04169 \pm 2,30394$

Таблица 6: Результат аппроксимации диаграммы Хаббла формулой (1)

Откуда получим $\Omega_m = 0,121331$. Относительная ошибка данного значения составляет 21%, в то время как ошибка результата для тех же данных, полученного предложенным выше способом - чуть более 1%.

Проверка для "Evolving Dark Energy"

Рассмотрим в качестве примера космологическую модель нестационарной тёмной энергии, где зависимость её плотности от масштабного фактора нестационарна (в отличие от Λ CDM) и описывается следующим уравнением состояния:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega_0+\omega_1)} e^{3\omega_1(a-1)} \quad (7)$$

Формула (2) в таком случае принимает вид:

$$D_L^{\text{ev. DE}}(z) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + (1-\Omega_m)(1+z')^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp[-3\omega_1 z'/(1+z')]}} \quad (8)$$

Здесь уже, не считая H_0 , три независимых космологических параметра: Ω_m , ω_0 и ω_1 . Сгенерируем аналогичные фиктивные данные, единственное отличие которых будет в мат. ожидании на основе (8), значения параметров зададим, например: $\Omega_m = 0,3$; $\omega_0 = 0,7$; $\omega_1 = 0,15$; (H_0 по прежнему равно $70 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}$), и, как и в прошлый раз, сначала восстановим параметры напрямую формулой (8). Немного уточнив диапазоны параметров, получим:

Ω_m	$0,26489 \pm 0,1896$
ω_0	$0,68392 \pm 1,02876$
ω_1	$0,12 \pm 1,47108$

Таблица 7: Результат аппроксимации формулой (8)

Здесь расхождения и большие погрешности связаны опять же с недостаточным количеством фиктивных данных и их большой ошибкой на полном диапазоне z , значение стандартного отклонения данных, полученное выше для Λ CDM, для данной модели (с моими значениями параметров) оказывается слишком большим. Так как это не является ключевым вопросом данной работы, вместо того, чтобы подбирать другие фиктивные данные, положим новые значения параметров, равные тем, что представлены в табл. 7 и будем ожидать в конечном результате совпадение восстановленных параметров с новыми, а не с изначально заданными при генерации данных.

После аппроксимации функцией (1a):

a_2	$-3,35793 \pm 0,25377$
a_3	$2,34605 \pm 0,63983$
a_4	$-0,58282 \pm 0,45588$
k	$1,00496 \pm 0,02116$

Таблица 8: Результат аппроксимации формулой (1a)

Итоговые значения параметров:

Ω_m	$0,2891 \pm 0,1615$
ω_0	$0,68943 \pm 0,14148$
ω_1	$0,12 \pm 0,19435$

Таблица 9: Значения параметров (Γ)

Как видно, получилось довольно точно воспроизвести результаты табл. 7. Следует заметить, что для большей корректности, а также для более точных результатов нужно было бы сначала исследовать относительную ошибку $D_L^{ev.DE}(z)$ и $D_L^{log\,pol}(z)$ также, как это было сделано для Λ CDM, после чего выбрать достаточное для данной модели количество слагаемых в (1a), а не ограничиваться первыми четырьмя.

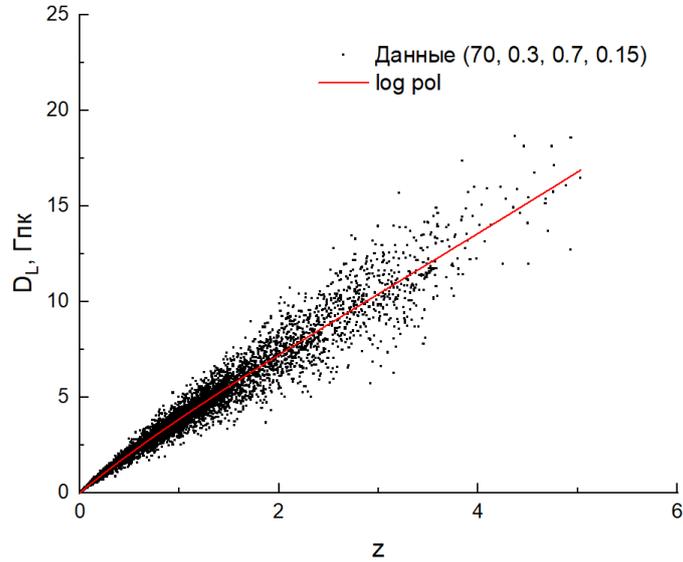


Рис. 4: Фитирование данных новой модели

Заключение

В данной работе был предложен и исследован альтернативный способ космографического анализа, не зависящий ни от космологической модели, ни от диапазона исследуемых красных смещений, а также проведено сравнение с используемым в [3], [4] разложением, которое, как и утверждалось в [1], [2], оказалось неприменимым для широкого диапазона красных смещений. В результате можно сказать, что новый метод применим для любого диапазона z и позволяет довольно точно находить значения космологических параметров, зная только лишь параметры аппроксимационной кривой.

ССЫЛКИ

- [1] A. Banerjee, E. O Colgain, M. Sasaki, M. M. Sheikh-Jabbari and T. Yang, “On cosmography in the cosmic dark ages: are we still in the dark?”
- [2] T. Yang, A. Banerjee and E. O Colgain, “On cosmography and at Λ CDM tensions at high redshift”
- [3] G. Risaliti and E. Lusso, “Cosmological constraints from the Hubble diagram of quasars at high redshifts”
- [4] E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti, M. Paolillo, S. Bisogni, E. Nardini and L. Amati, “Tension with the at Λ CDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts”
- [5] D. M. Scolnic, D. O. Jones, A. Rest, Y. C. Pan, R. Chornock, R. J. Foley, M. E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. G. Riess, S. Rodney, E. Berger, D. J. Brout, P. J. Challis, M. Drout, D. Finkbeiner, R. Lunnan, R. P. Kirshner, N. E. Sanders, E. Schlafly, S. Smartt, C. W. Stubbs, J. Tonry, W. M. Wood-Vasey, M. Foley, J. Hand, E. Johnson, W. S. Burgett, K. C. Chambers, P. W. Draper, K. W. Hodapp, N. Kaiser, R. P. Kudritzki, E. A. Magnier, N. Metcalfe, F. Bresolin, E. Gall, R. Kotak, M. McCrum and K. W. Smith, “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample”
- [6] E. Lusso, G. Risaliti, E. Nardini, G. Bargiacchi, M. Benetti, S. Bisogni, S. Capozziello, F. Civano, L. Eggleston, M. Elvis, G. Fabbiano, R. Gilli, A. Marconi, M. Paolillo, E. Piedipalumbo, F. Salvestrini, M. Signorini and C. Vignali, “Quasars as standard candles III. Validation of a new sample for cosmological studies”