

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени  
М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

**ГАЛАКТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В  
НЕСТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЯХ ГРАВИТАЦИИ**

Выполнил студент  
212 группы  
Секретов Михаил Константинович

Научный руководитель:  
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук  
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва  
2023

# Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>MOND</b>   | <b>3</b>  |
| 2.1      | Основные положения . . . . .  | 3         |
| 2.2      | Выбор интерполирующей функции . . . . .   | 5         |
| 2.3      | Применение MOND к расчёту кривых вращения галактик .  | 5         |
| 2.4      | Объяснение закона Талли-Фишера . . . . .  | 7         |
| <b>3</b> | <b>SIV</b>  | <b>8</b>  |
| 3.1      | Масштабная инвариантность . . . . .   | 8         |
| 3.2      | Геометрия Вейля . . . . .   | 8         |
| 3.3      | Масштабно-инвариантное уравнение поля. Уравнение движения и его нерелятивистский предел . . . . . | 10        |
| 3.3.1    | Уравнение гравитационного поля в вакууме . . . . .  | 10        |
| 3.3.2    | Уравнение движения . . . . .  | 11        |
| 3.3.3    | Приближение слабого поля . . . . .  | 12        |
| 3.4      | Задача 2-х тел . . . . .  | 13        |
| 3.4.1    | Применение к реальным кривым вращения . . . . .   | 16        |
| 3.5      | Центростремительное ускорение в уравнениях SIV . . . . .  | 18        |
| 3.5.1    | Сравнение с экспериментальными данными и MOND   | 21        |
| <b>4</b> | <b>Итоги и выводы</b>   | <b>23</b> |

## Введение

Работа главным образом посвящена изучению проблемы кривых вращения галактик. Суть проблемы состоит в том, что если на звезды в удалённых частях галактики действует исключительно гравитационная сила, то, в соответствии с классической (Ньютоновской) теорией, скорость должна уменьшаться по мере удаления от центральной области как  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , где  $r$  - расстояние. Однако наблюдения показывают, что скорость не уменьшается, а остаётся постоянной на очень больших расстояниях. На рисунке показана типичная наблюдаемая картина, а также кривая, которую предсказывает классическая теория.

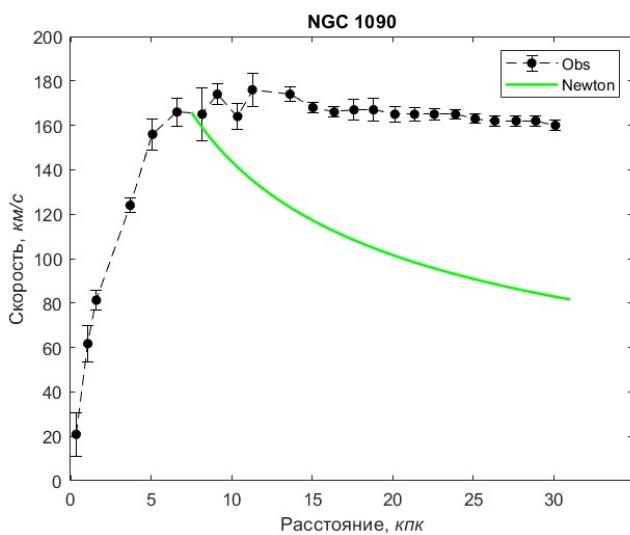


Рис. 1: Кривая вращения для галактики NGC 1090. Зелёным цветом показана кривая, соответствующая классической (Ньютоновской) теории

В настоящее время общепринятым подходом к решению проблемы является введение дополнительной, не взаимодействующей электромагнитно, скрытой массы, так называемой *тёмной материи*. Но существуют и другие точки зрения, основанные на том, что гравитационное взаимодействие на таких больших масштабах и в столь слабых полях плохо изучено и может отличаться от предсказаний классической теории. Рассматриваются альтернативные теории гравитации, предсказывающие наблюдаемое поведение кривых вращения. В работе предлагается рассмотреть две из них - MOND (Modified Newtonian dynamics, Модифицированная Ньютонаовская динамика) и SIV (Scale-Invariant Vacuum theory, теория Масштабно-инвариантного вакуума).

# MOND

## Основные положения

Теория Модифицированной Ньютоновской динамики утверждает, что причина аномального поведения кривой вращения заключается в изменении законов стандартной динамики при низких ускорениях. Существует несколько интерпретаций теории. Так, согласно одной из них, видоизменяется второй закон Ньютона (но такие модификации нарушают закон сохранения импульса). В данной работе рассматривается интерпретация, согласно которой модификация касается именно гравитационного ускорения. Перечислим основные принципы теории [1] (положения общие и могут быть применены к обеим интерпретациям):

1. Динамика характеризуется единственной *граничной константой ускорения*  $a_0$ .
2. Системы с ускорениями  $\gg a_0$  подчиняются стандартным законам динамики (Ньютоновский предел).
3. Законы, описывающие системы с ускорениями, значительно меньшими  $a_0$ , сильно отличаются от стандартной динамики (глубокий предел MOND), причём динамика MOND является инвариантной к пространственно-временному масштабу.

Одно из главных предположений MOND заключается в том, что между наблюдаемым ускорением  $g$  (которое, например, можно определить из кривой вращения по формуле  $g = \frac{v^2}{R}$ ) и Ньютоновским (барионным) ускорением  $g_N$  имеется связь:  $g \approx f(g_N)$ . Более того, MOND диктует ограничения на функцию  $f$ : поскольку  $a_0$  является единственной постоянной ускорения в теории,  $f$  должна иметь (из соображений размерности) следующий вид:

$$g \approx g_N \nu \left( \frac{g_N}{a_0} \right) \quad (1)$$

где

$$g_N = \frac{GM}{r^2} \quad (2)$$

Функция  $\nu$  должна иметь два соответствующих предела:

- Ньютоновский предел:  $\nu(y) \rightarrow 1$ , при  $y \gg 1$ , т.е. при  $g_N \gg a_0$   
 $g \rightarrow g_N$

- Глубокий предел MOND:  $\nu(y) \rightarrow y^{-1/2}$ , при  $y \ll 1$ , т.е. при  $g_N \ll a_0$   
 $g \rightarrow \sqrt{g_N a_0}$

Последний предел был получен из требования масштабной инвариантности. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Под пространственно-временной масштабной инвариантностью понимается неизменность уравнений относительно следующего преобразования:

$$x \rightarrow \lambda x, y \rightarrow \lambda y, z \rightarrow \lambda z, t \rightarrow \lambda t \quad (3)$$

т.е. все расстояния и промежутки времени изменяются в одинаковое число раз. Применим масштабное преобразование к ур. (1):

$$g' = \frac{g}{\lambda} = \frac{GM}{\lambda^2 r^2} \nu \left( \frac{GM}{\lambda^2 r^2 a_0} \right) = \frac{g_N}{\lambda^2} \nu \left( \frac{g_N}{\lambda^2 a_0} \right) \quad (4)$$

Используя вид функции  $\nu$  в глубоком пределе получаем:

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{g_N}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 a_0}{g_N}} = \frac{g_N}{\lambda} \sqrt{\frac{a_0}{g_N}} \quad (5)$$

Домножив на  $\lambda$  последнее уравнение, получим исходное уравнение (в выбранном пределе  $\nu$ ), т.е. уравнение обладает масштабной инвариантностью.

Рассмотрим другую особенность глубокого предела. Для этого подставим предельное значения гравитационного ускорения в классическое уравнение движения материальной точки по окружности:

$$F_{grav} = mg_N \sqrt{\frac{a_0}{g_N}} = ma = \frac{mv^2}{r} \quad (6)$$

Сокращая на  $m$  получаем:

$$\sqrt{a_0 g_N} = \sqrt{\frac{G M a_0}{r^2}} = \frac{v^2}{r} \quad (7)$$

Окончательно, выражая круговую скорость:

$$v = \sqrt[4]{G M a_0} \quad (8)$$

Таким образом, в глубоком пределе круговая скорость (например, орбитальная скорость звезд при вращении вокруг центра галактики) является постоянной и не зависит от расстояния до центра вращения. Полученный результат может объяснить аномальное поведение кривых вращения на больших расстояниях от центра.

## Выбор интерполирующей функции

Пока были рассмотрены лишь пределы функции  $\nu$ , но не был указан её конкретный вид. При исследовании кривых вращения было обнаружено, что экспериментальные данные хорошо описывает функция [1]:

$$\nu(y) = (1 - e^{-\sqrt{y}})^{-1} \quad (9)$$

Однако авторы теории призывают не придавать особого значения именно этой функции, объясняя это тем, что её вид никак не следует из постулатов, на которых построена MOND. Они также отмечают, что экспериментальным данным могут подходить и другие функции, имеющие ассимптотику, которую требует MOND и мало отличающиеся от функции (9) в области низких ускорений. Например:

$$\nu(y) = [1 + (1 + 4y^{-1})^{1/2}]/2 \quad (10)$$

Также широко используемая функция, которая даёт практически неразличимую кривую [2]:

$$\mu(x) = \frac{x}{1 + x} \quad (11)$$

Последнее было записано для несколько другой формы соотношения (1), а именно  $g \mu\left(\frac{g}{a_0}\right) = g_N$ . В дальнейшем, для определённости, будем использовать функцию (9). Тогда ур. (1) принимает вид:

$$g = \frac{g_N}{1 - e^{-\sqrt{g_N/a_0}}} \quad (12)$$

Численное значение параметра  $a_0$ :

$$a_0 = 1.20 \cdot 10^{-10} \text{ м/с}^2$$

Заметим, что

$$a_0 \sim c H_0 \quad (13)$$

где  $c$  - скорость света, а  $H_0$  - постоянная Хаббла.

## Применение MOND к расчёту кривых вращения галактик

Выбрав конкретную функцию  $\nu$ , мы получили выражение для гравитационного ускорения (ур. (12)). Тогда круговая скорость движения материальной точки (звезды) по окружности (орбите) может быть найдена по формуле:

$$v = \sqrt{gr} \quad (14)$$

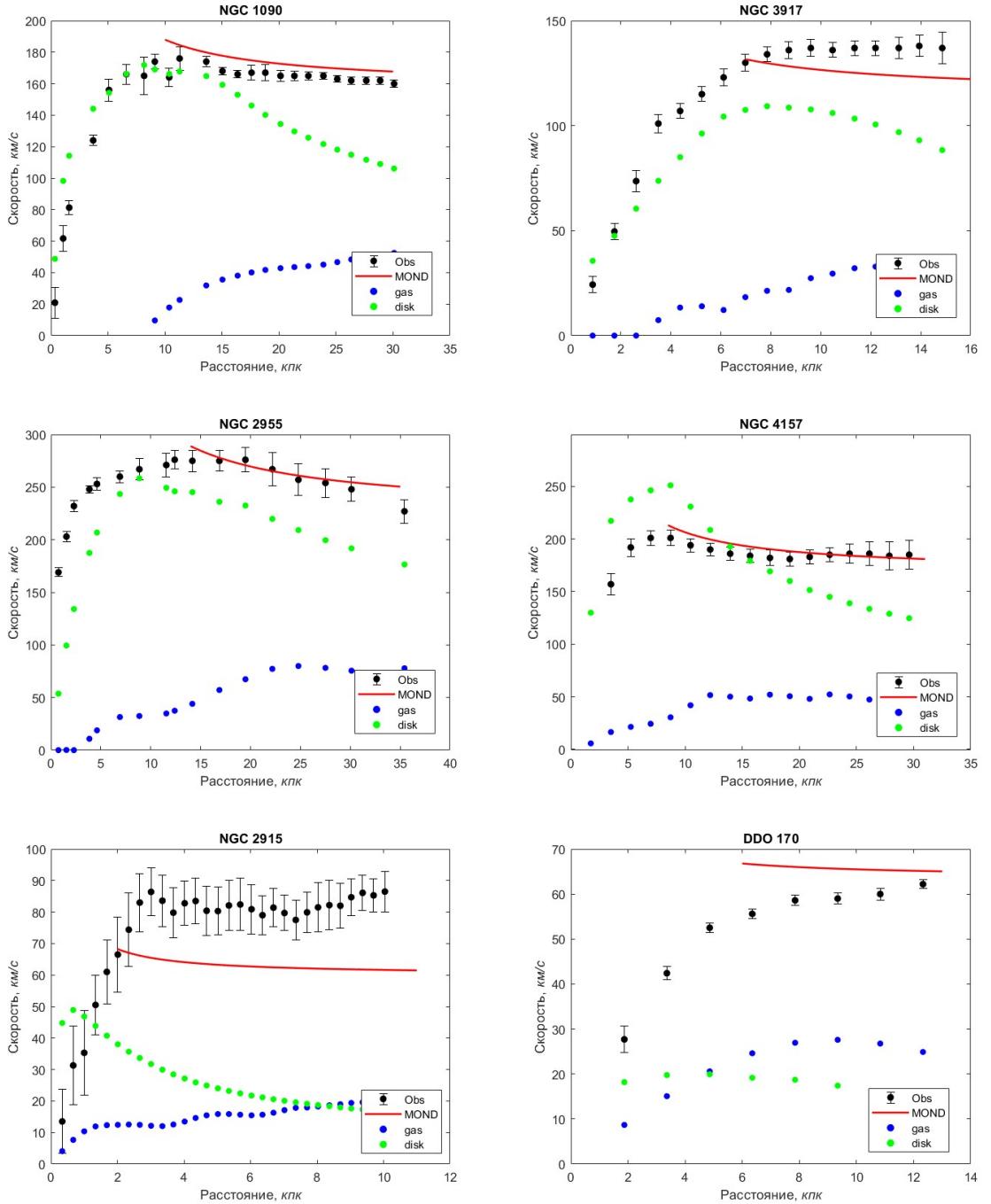


Рис. 2: Кривые вращения галактик. Красным цветом показана кривая скорости по теории MOND, рассчитанная по формуле (14). Также представлены профили для газовой и дисковой составляющих.

Таблица 1. Параметры галактик

| Галактика | $\log(M)$ , масс Солнца | Расстояние, Мпк | Угловой размер       |
|-----------|-------------------------|-----------------|----------------------|
| NGC 1090  | 10.68                   | 37.0            | $3.9' \times 1.8'$   |
| NGC 3917  | 10.13                   | 18.0            | $5.00' \times 1.1'$  |
| NGC 2955  | 11.30                   | 97.9            | $1.50' \times 0.7'$  |
| NGC 4157  | 10.80                   | 18.0            | $6.70' \times 1.2'$  |
| NGC 2915  | 9.00                    | 4.06            | $1.90' \times 0.9'$  |
| NGC 2841  | 11.03                   | 14.1            | $8.10' \times 3.5'$  |
| DDO 170   | 9.10                    | 15.4            | $1.15' \times 0.35'$ |

В Таблице 1 приведены параметры некоторых галактик, а на Рис. 2 представлены наблюдаемые кривые вращения и построена кривая, соответствующая теории MOND. Кривые вращения, массы и расстояния взяты из базы данных SPARC (Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves) [3]. Видно, что для большинства галактик даже такой простой расчёт, не учитывающий множество других факторов, даёт близкие к наблюдаемым значения скоростей. Сильное несоответствие наблюдается для галактики NGC 2915. Стоит отметить: считается, что в этой галактике имеется очень большое количество тёмной материи. Но также предметом исследования является и определение точной барионной массы (в галактике могут быть скрытые молекулярные и звездные компоненты) [4]

## Объяснение закона Талли-Фишера

Барионное соотношение Талли-Фишера - это эмпирически открытая зависимость полной барионной массы (т.е. суммы звездной и газовой составляющих) спиральной галактики и максимальной круговой скорости [5]:

$$M \propto v^x \quad (15)$$

Параметр  $x$  лежит в диапазоне  $\sim 3.5 \div 4$ .

Этот закон получает очень простое объяснение в рамках теории MOND. Вспомним выражение для скорости в глубоком пределе (ур. (8)):

$$GMa_0 = v^4 \quad (16)$$

$G$  и  $a_0$  - фундаментальные физические константы, соответственно отношение будет одинаковым для всех галактик, а значение скорости в глубоком пределе как раз соответствует максимальной скорости вращения. Таким образом, мы получаем соотношение Талли-Фишера с  $x = 4$ .

## SIV

### Масштабная инвариантность

Масштабная инвариантность проявляется во многих фундаментальных уравнениях физики. Например, уравнения Максвелла в отсутствии токов и зарядов масштабно-инвариантны, уравнения Общей теории относительности при отсутствии космологической постоянной  $\Lambda_E$  также обладают этим свойством. Общей масштабной инвариантности препятствует наличие материи, которая определяет масштабы массы, длины и времени. На квантовом уровне вакуум не является масштабно-инвариантным, из-за того, что некоторые единицы массы, длины и времени могут быть определены на основе постоянной Планка. Но для макроскопических и астрономических масштабов можно принять в качестве гипотезы масштабную инвариантность пустого пространства. Итак, по предположению, уравнения, лежащие в основе новой теории, помимо ковариантности, используемой в ОТО, должны быть инвариантны к следующему преобразованию [6]:

$$ds' = \lambda(t)ds \quad (17)$$

$\lambda(t)$  - масштабный фактор, зависящий от времени (в отличии от теории MOND) и не зависящий от пространственных координат, в силу однородности и изотропности,  $ds'^2 = g'_{\mu\nu}dx'^{\mu}dx'^{\nu}$  - элемент длины пространства-времени в ОТО,  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$  - элемент длины более общего пространства, в котором присутствует масштабная инвариантность. Новое требование подразумевает переход от Римановой геометрии к новой, допускающей масштабную инвариантность.

### Геометрия Вейля

Основой, обеспечивающей масштабную инвариантность, может послужить геометрия Вейля. В ней, помимо метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ , присутствуют величины, обеспечивающие масштабную инвариантность. Рассмотрим вектор длины  $\ell$ , закреплённый в точке  $P$  с координатами  $x^{\mu}$ . Теперь переместим его в точку  $P'$  с координатами  $x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ . Его длина изменится на:

$$\delta\ell = \ell \kappa_{\mu} \delta x^{\mu} \quad (18)$$

$\kappa_{\mu}$  - коэффициенты метрической связи. В геометрии Вейля они являются фундаментальными величинами наравне с метрическим тензором. Пусть над длиной производят масштабное преобразование:

$$\ell' = \lambda(x) \ell \quad (19)$$

В данном случае  $\lambda$  может зависеть от всех координат. В силу масштабной инвариантности длина перенесённого вектора в первом порядке малости преобразуется как:

$$\ell' + \delta\ell' = (\ell + \delta\ell) \lambda(x + \delta x) = (\ell + \delta\ell) \lambda(x) + \ell \frac{\partial \lambda}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \quad (20)$$

Обозначим:  $\lambda_{,\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial x^\nu}$ ,  $\Phi = \ln \lambda$ , тогда  $\Phi_{,\nu} = \frac{\lambda_{,\nu}}{\lambda}$ . С учётом переобозначений получаем:

$$\delta\ell' = \lambda \delta\ell + \ell \lambda_{,\nu} \delta x^\mu = \lambda \ell \kappa_\nu \delta x^\nu + \ell \lambda_{,\nu} \delta x^\nu = \lambda \ell (\kappa_\nu + \Phi_{,\nu}) \delta x^\nu = \ell' \kappa'_\nu \delta x^\nu \quad (21)$$

где было введено обозначение  $\kappa'_\nu = \kappa_\nu + \Phi_{,\nu} = \kappa_\nu + \partial_\nu \ln \lambda$ . Таким образом, мы получили закон преобразования для коэффициентов метрической связи.

Если вектор перемещается параллельно вдоль замкнутого контура, то общее изменение длины будет:

$$\Delta\ell = (\partial_\nu \kappa_\mu - \partial_\mu \kappa_\nu) \sigma^{\mu\nu} \quad (22)$$

$\sigma^{\mu\nu}$  - бесконечно малый элемент поверхности, ограниченной контуром. Заметим, что в получившейся геометрии изменение длины вектора зависит от рассматриваемого пути, таким образом длины оказываются неинтегрируемыми. Проблему можно решить, если рассмотреть так называемую *интегрируемую геометрию Вейля*. Как было отмечено выше,  $ds'$  - это элемент длины в ОТО, т.е в Римановом пространстве. В нём  $\kappa'_\nu = 0$ . Из закона преобразования для коэффициентов метрической связи получаем:

$$\kappa_\nu = -\Phi_{,\nu} = -\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x^\nu} \quad (23)$$

Т.е. коэффициенты метрической связи просто являются градиентом скалярного поля  $\Phi$ , а из равенства смешанных производных получаем, что ур. (22) обращается в нуль, т.е перемещение вектора по замкнутому контуру не изменит его длину, что эквивалентно тому, что изменение длины не зависит от пройденного пути.

В общем случае в геометрии Вейля скаляры, векторы и тензоры преобразуются как:

$$T_\mu^{\nu} = \lambda^n T_\mu^\nu \quad (24)$$

и называются соответственно ко-скалярами, ко-векторами и ко-тензорами порядка  $n$ . Другой проблемой оказывается то, что обычная ковариантная производная не является масштабно-инвариантной. Чтобы преодолеть это, были разработаны новые производные, сохраняющие масштабную ковариацию. Например, производные для  $A_\mu$  - ко-вектора степени  $n$ :

$$A_{\mu*}{}_\nu = \partial_\nu A_\mu - {}^* \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha - n \kappa_\nu A_\mu \quad (25)$$

$$A_{*}{}^\mu_\nu = \partial_\nu A_\mu + {}^* \Gamma_{\nu\alpha}^\mu A^\alpha - n \kappa_\nu A^\mu \quad (26)$$

$${}^* \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g_{\mu\nu} \kappa^\alpha - g_\mu^\alpha \kappa_\nu - g_\nu^\alpha \kappa_\mu \quad (27)$$

${}^* \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  - модифицированные символы Кристоффеля,  $A_{\mu*}{}_\nu$  и  $A_{*}{}^\mu_\nu$  - масштабно-ковариантные производные.

В новой геометрии также тензор Римана  $R_{\mu\lambda\rho}^\nu$ , тензор Риччи  $R_\mu^\nu$  и скалярная кривизна  $R$  имеют свои масштабно-ковариантные аналоги:

$$R_\mu^\nu = R_{\mu}{}^\nu - \kappa_\mu{}^\nu - \kappa_{;\mu}^\nu - g_\mu^\nu \kappa_{;\alpha}^\alpha - 2 \kappa_\mu \kappa^\nu + 2 g_\mu^\nu \kappa^\alpha \kappa_\alpha \quad (28)$$

$$R = R' - 6 \kappa_{;\alpha}^\alpha + 6 \kappa^\alpha \kappa_\alpha \quad (29)$$

; обозначает обычную ковариантную производную, штрихованные величины - величины из ОТО.

## Масштабно-инвариантное уравнение поля. Уравнение движения и его нерелятивистский предел

### Уравнение гравитационного поля в вакууме

Используя новые выражения для тензора Риччи и скалярной кривизны, можно записать новое уравнение гравитационного поля. Отметим, что его также можно получить из принципа наименьшего действия.

$$R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R' - \kappa_{\mu;\nu} - \kappa_{\nu;\mu} - 2 \kappa_\mu \kappa_\nu + 2 g_{\mu\nu} \kappa_{;\alpha}^\alpha - g_{\mu\nu} \kappa^\alpha \kappa_\alpha = -8 \pi G T_{\mu\nu} - \lambda^2 \Lambda_E g_{\mu\nu} \quad (30)$$

В пустом пространстве для компонент 1,2,3 (дают одинаковый результат) и компоненты 0 получаем:

$$2 \frac{\dot{\kappa}_0}{c} - \kappa_0^2 = -\lambda^2 \Lambda_E \quad (31)$$

$$3 \kappa_0^2 = \lambda^2 \Lambda_E \quad (32)$$

Сложив (31) и (32) получаем уравнение:

$$\frac{\dot{\kappa}_0}{c} = -\kappa_0^2 \quad (33)$$

Его решение:

$$\kappa_0 = \frac{1}{c t} \quad (34)$$

С другой стороны из ур. (23):

$$\kappa_0 = -\frac{\dot{\lambda}}{c\lambda} \quad (35)$$

Учитывая ур. (31) и (32) получаем:

$$3 \frac{\dot{\lambda}^2}{c^2 \lambda^2} = \lambda^2 \Lambda_E \quad (36)$$

$$2 \frac{\ddot{\lambda}}{c^2 \lambda^2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{c^2 \lambda^2} = \lambda^2 \Lambda_E \quad (37)$$

Таким образом мы получаем фундаментальное соотношение между  $\lambda$  и  $\Lambda_E$ . Если  $\Lambda_E = 0$ , то масштабный фактор будет постоянным, и уравнения будут аналогичны ОТО. Из первого уравнения получаем решение для  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{A}{t} \quad (38)$$

Из ур.(36) получаем:

$$A = \sqrt{\frac{3}{\Lambda_E}} \quad (39)$$

Приняв  $\lambda = 1$  в данный момент времени  $t_0$  ур. (38) можно записать в виде:

$$\lambda = \frac{t_0}{t} \quad (40)$$

### Уравнение движения

Перейдём к выводу уравнения движения. Сделаем это, используя уравнение свободного движения в теории относительности. В каждой точке пространства-времени существует локальная инерциальная система отсчёта  $x'^\alpha$ , в которой

$$\frac{d^2 x'^\alpha}{ds'^2} = 0 \quad (41)$$

Развернём выражение в новой геометрии:

$$\frac{d}{ds'} \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds'} \right) = \frac{d}{\lambda ds} \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{\lambda ds} \right) = 0 \quad (42)$$

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \kappa_\nu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (43)$$

Используем модифицированные коэффициенты афинной связности (27), которые в этом уравнении равны:

$${}^*\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} \quad (44)$$

Подставляем:

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \left( \Gamma_{\mu\nu}^\rho + g_{\mu\nu} \kappa^\rho - g_\mu^\rho \kappa_\nu - g_\nu^\rho \kappa_\mu \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \kappa_\nu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (45)$$

Приводя подобные и переобозначая через 4-скорость  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ , получаем окончательное выражение:

$$\frac{du^\rho}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho u^\mu u^\nu - \kappa_\mu u^\mu u^\rho + \kappa^\rho = 0 \quad (46)$$

### Приближение слабого поля

Теперь наша задача получить нерелятивистский предел ( $v \ll c$ ). Используем метрику, слабо отличающуюся от метрики Минковского:

$$g_{ii} = -1, i = 1, 2, 3 \quad g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (47)$$

Единственным ненулевым символом Кристоффеля является:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (1 + (2\Phi/c^2))}{\partial x^i} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (48)$$

Также справедливо:  $ds \approx cdt$ ,  $u^i \approx \frac{v^i}{c} = \frac{dx^i}{cdt}$  и  $u^0 \approx 1$ . Единственная ненулевая компонента коэффициентов метрической связь  $\kappa_\nu$  - это  $\kappa_0$ . С учётом приближений уравнение (46) переходит в:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dv^i}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \kappa_0 \frac{v^i}{c} = 0 \quad (49)$$

Вспомним уравнение (34) и введём обозначение:

$$\kappa(t) \equiv c \kappa_0 = \frac{1}{t} \quad (50)$$

Уравнение примет вид:

$$\frac{dv^i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \kappa(t) v^i = 0 \quad (51)$$

Внесём конкретику относительно потенциала  $\Phi$ . Если бы в ОТО мы рассматривали центральную точку массы  $M'$  с сферически симметричным потенциалом  $\Phi' = -\frac{GM'}{r'}$ , то в масштабно-инвариантной системе мы имели бы  $r' = \lambda r$  для расстояния и  $\rho = \lambda^2 \rho'$  для плотности (объяснение последнего равенства можно найти в источниках [6]). Тогда:

$$\frac{M}{r^3} = \frac{M'}{r'^3} \lambda^2 \quad (52)$$

Из ур. (52) получаем соотношение для массы:

$$M' = \lambda M \quad (53)$$

При этом потенциал получается таким же:

$$\Phi' = -\frac{GM'}{r'} = -\frac{GM}{r} = \Phi \quad (54)$$

Соответственно, мы можем записать ур. (51) с потенциалом, имеющим такой же вид, как в классической теории (в декартовых координатах):

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{x^i}{r} + \kappa(t) \frac{dx^i}{dt} \quad (55)$$

Или в векторном виде:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \kappa(t) \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (56)$$

Мы получили аналог уравнения Ньютона для движения в центрально-симметричном гравитационном поле. Отличие состоит в дополнительном слагаемом в правой части с функцией  $\kappa(t)$ . Таким образом, частица испытывает дополнительное ускорение, связанное с непостоянством масштабного фактора.

## Задача 2-х тел

Используя полученное нерелятивистское уравнение движения, попробуем решить классическую задачу 2-х тел [7]. В декартовых координатах  $\vec{r} = (x^1 \ x^2 \ x^3)^T$ . Посмотрим, как ведёт себя аналог углового момента  $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$  в масштабно-инвариантной теории. Для этого вычислим следующую производную:

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \kappa(t) \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d\kappa}{dt} \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) + \kappa(t) \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (57)$$

Из ур. (50) получаем производную для  $\kappa$ :

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\frac{1}{t^2} = -\kappa^2(t) \quad (58)$$

Распишем покомпонентно слагаемые из правой части ур. (57):

$$-\kappa^2(t) \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^3 = -\kappa^2(t) \left( x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} \right) \quad (59)$$

$$\kappa(t) \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^3 = \kappa(t) \left( \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^2}{dt} + x^1 \frac{d^2x^2}{dt^2} - \frac{dx^2}{dt} \frac{dx^1}{dt} - x^2 \frac{d^2x^1}{dt^2} \right) \quad (60)$$

Путём циклической перестановки получаем аналогичные выражения для остальных компонент. В последнем выражении первое и третье слагаемое сокращаются, а для второго и четвёртого из ур. (55):

$$x^1 \frac{d^2x^2}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{x^1 x^2}{r} + \kappa(t) x^1 \frac{dx^2}{dt} \quad (61)$$

$$x^2 \frac{d^2x^1}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{x^1 x^2}{r} + \kappa(t) x^2 \frac{dx^1}{dt} \quad (62)$$

Запишем полное выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \kappa(t) \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^3 &= -\kappa^2(t) \left( x^1 \frac{dx^2}{dt} - x^2 \frac{dx^1}{dt} \right) + \\ \kappa(t) \left( -\frac{GM}{r^2} \frac{x^1 x^2}{r} + \kappa(t) x^1 \frac{dx^2}{dt} \right) - \kappa(t) \left( -\frac{GM}{r^2} \frac{x^1 x^2}{r} + \kappa(t) x^2 \frac{dx^1}{dt} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, аналог углового момента *сохраняется*, т.е. величина  $\vec{r} \times \kappa(t) \frac{d\vec{r}}{dt}$  является интегралом движения. Т.к вектор  $\kappa(t) \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$  всегда ортогонален орбитальному движению, то движение *плоское*, как и в классическом случае. Перейдём в полярные координаты и запишем:

$$\kappa(t) r^2 \dot{\vartheta} = L = \text{const} \quad (63)$$

Уравнение (56) переписывается в виде:

$$\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 = -\frac{GM}{r^2} + \kappa(t) \dot{r} \quad (64)$$

$$r \ddot{\vartheta} + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} = \kappa(t) r \dot{\vartheta} \quad (65)$$

Выразим угловую скорость через  $L$  и подставим в ур. (64):

$$\ddot{r} - \left( \frac{L}{\kappa(t)} \right)^2 \frac{1}{r^3} + \frac{GM}{r^2} - \kappa(t) \dot{r} = 0 \quad (66)$$

Чтобы получить уравнение траектории, преобразуем производные по времени в производные по углу:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}} = \frac{\dot{r}}{L} \kappa(t) r^2 \quad (67)$$

Из ур. (67):

$$\dot{r} = \frac{L (dr/d\vartheta)}{\kappa(t) r^2} \quad (68)$$

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{\kappa^2(t) r^4} \left( \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - 2 \frac{(dr/d\vartheta)^2}{r} \right) - \frac{\dot{\kappa}(t) L (dr/d\vartheta)}{\kappa^2(t) r^2} \quad (69)$$

Подставим в ур. (66):

$$\frac{L^2}{\kappa^2(t) r^4} \left( \frac{d^2 r}{d\vartheta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 \right) - \left( \frac{L}{\kappa(t)} \right)^2 \frac{1}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (70)$$

Выполним замену  $\rho = 1/r$

$$\frac{d^2 \rho}{d\vartheta^2} + \rho = \frac{GM \kappa^2(t)}{L^2} \quad (71)$$

Полученное уравнение почти аналогично классическому, за исключением функции  $\kappa(t)$ . Его решение:  $\rho = 1/r_0 + C \cos(\vartheta)$  или

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos(\vartheta)} \quad (72)$$

где

$$r_0 = \frac{L^2}{GM \kappa^2(t)} \quad (73)$$

Параметр  $r_0$  - радиус круговой орбиты (в случае  $e = 0$ ). Важно, что его значение *не постоянно*. Вспомнив соотношение для массы  $M' = \lambda M$ , получаем, что  $r$  растёт пропорционально времени:

$$r_0(t) = \frac{L^2}{GM'} t^2 \lambda = \frac{L^2}{GM'} t_0 t \propto t \quad (74)$$

$t_0$  - момент времени, в который принято  $\lambda = 1$ . Эксцентризитет задаётся формулой:

$$e = C \frac{L^2}{GM \kappa^2(t)} \quad (75)$$

Эксцентризитет, будучи безразмерной величиной, является инвариантом. Таким образом, орбита - это конические сечения (эллипс, окружность, парабола, гипербола) как и в классическом случае, но с растущим во времени орбитальным радиусом  $r_0$ .

Рассмотрим эллиптическую орбиту и запишем для большой полуоси  $a$ :

$$a = \frac{r_0}{1 - e^2} \quad (76)$$

Большая полуось также линейно растёт с течением времени:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} - 2 \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{1}{t} \quad (77)$$

Особенно интересно поведение круговой скорости  $v$ :

$$v = r_0 \dot{\vartheta} = \frac{L}{\kappa(t) r_0} = \text{const} \quad (78)$$

Последние замечания особенно важны для объяснения поведения кривых вращения в рамках теории SIV.

### Применение к реальным кривым вращения

При решении задачи двух тел мы обнаружили, что в SIV проявляется эффект векового увеличения орбит. При этом скорости от времени *не зависят*. Рассмотрим некий начальный момент времени  $t_0$ , когда упомянутые эффекты проявились не так сильно. Распределение скоростей в эту раннюю эпоху выглядело как в классической теории:

$$v(t_0, r) = v_0 \sqrt{\frac{r_0(t_0)}{r(t_0)}} \quad (79)$$

где  $r_0$  - некое условное расстояние, начиная с которого применима такая зависимость скорости от расстояния (т.е. начинается спад как  $\frac{1}{r}$ ), а  $v_0$  - скорость на этом расстоянии. Со временем орбитальный радиус растёт, и распределение скоростей переходит в:

$$v(t, r) = v_0 \sqrt{\frac{\lambda(t) r_0(t_0)}{\lambda(t) r(t_0)}} = v_0 \sqrt{\frac{r_0(t)}{r(t)}} \quad (80)$$

где  $r(t) > r_0(t)$ . Мы видим, что область, где скорость равна  $v_0$  растёт с течением времени, а спад начинается всё дальше и становится более пологим, но сохраняющим зависимость  $\propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ . Полученный результат может объяснить, почему мы наблюдаем столь большие скорости на таких далёких расстояниях. Используя формулу (80) можно построить примерный вид кривых вращения в прошлом и настоящем. Попробуем применить это на практике.

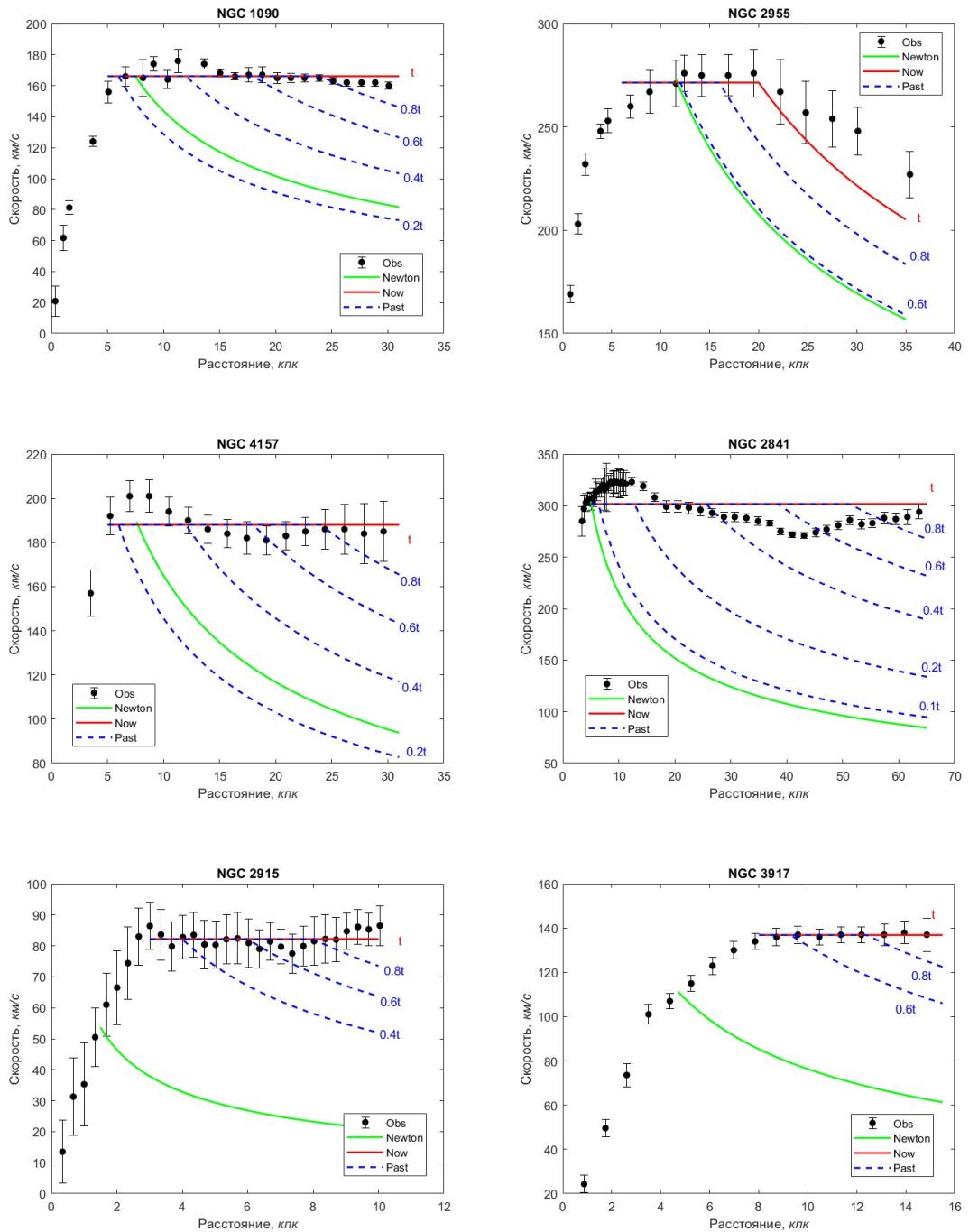


Рис. 3: Кривые вращения галактик в разные эпохи. Красным цветом показана кривая скорости в нынешнюю эпоху, синим пунктиром показаны кривые в прошлом. Зелёным цветом показана кривая, соответствующая классической (Ньютоновской) теории.

На Рис. 3 представлены наблюдаемые кривые вращения, а также кривые, соответствующие различным эпохам, построенные в соответствии с формулой (80). Также построена кривая, соответствующая классической теории. Конечно, для более корректного построения графиков необходимо знать длину "плато", для этого необходимо измерить кривую вращения на дальних расстояниях. В оригинальной статье *Dynamical Effects of the Scale Invariance of the Empty Space: The Fall of Dark Matter?*, Andre Maeder, AJ 2017 подобные кривые были построены для Млечного пути, кривая вращения которого измерена на больших расстояниях, где отчетливо виден спад. Из рассмотренных здесь, такое наблюдается только для NGC 2955. Тем не менее, для галактик NGC 1090, NGC 4157 и NGC 2841 получился неплохой результат: классическая кривая соответствует довольно ранней эпохе:  $\approx 0.25t$  для NGC 1090 и NGC 4157 и  $\approx 0.08t$  для NGC 2841 ( $t$  - настоящее время), т.е. 10-13 млрд. лет назад - как раз тогда начали формироваться галактики. В упомянутой статье для Млечного пути получилось  $\approx 0.1t$ . Для галактики NGC 2955 Ньютона кривая соответствует эпохе  $\approx 0.6t$ . Но для NGC 2915 и NGC 3917 классическая кривая проходит слишком низко, поэтому отнести её к какой-то эпохе не получается. В случае NGC 2915 проблема может быть также, как и при расчёте по теории MOND, связана со скрытой барионной массой. Для NGC кривая вращения измерена на не очень больших расстояниях (по сравнению с размером галактики), поэтому для более корректного анализа, хотелось бы знать кривую на более дальних расстояниях.

## Центростремительное ускорение в уравнениях SIV

Соотношение центростремительного ускорения (Radial acceleration relation, RAR) - это отношение между наблюдаемым нормальным ускорением  $g_{obs} = \frac{v^2}{r}$  и модулем гравитационного ускорения  $g_b = \frac{GM}{r^2}$ . В классической теории (Ньютона) они совпадают, т.е.  $g_{obs} = g_b = g_N$ . В уже рассмотренной теории MOND это отношение, по сути, выражается формулой (1), т.е. функцией  $\nu$ . Посмотрим, как выглядит это соотношение в теории SIV.

Итак, согласно ур. (56) на тело действует дополнительное ускорение в направлении движения. Разложим ускорение  $\vec{g}$  на нормальную  $a_n$  и тангенсальную  $a_\tau$  составляющие:

$$\vec{g} = a_n \vec{e}_n + a_\tau \vec{e}_\tau = \frac{v^2}{r} \vec{e}_n + \frac{v}{t} \vec{e}_\tau \quad (81)$$

где  $\vec{e}_n$  и  $\vec{e}_\tau$  - соответствующие направления. С точки зрения классической теории полное ускорение было бы равно:

$$\vec{g} = g_N \vec{e}_r + g_x \vec{e}_x = \frac{GM}{r^2} \vec{e}_r + g_x \vec{e}_x \approx \frac{G(M + M_x)}{r^2} \vec{e}_r \quad (82)$$

$\vec{e}_r$  - единичный вектор, направленный к гравитирующему центру, а  $g_x$  и  $\vec{e}_x$  показывают фиктивное возможное движение в соответствующем направлении. В рамках теории тёмной материи,  $M_x$  является просто дополнительным вкладом от тёмной материи, и ожидается, что направления  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_x$  совпадут.

Введём отношение:

$$x \equiv \frac{a_\tau}{g_b} = \frac{a_\tau}{g_N} \quad (83)$$

И перепишем выражение для модуля ускорения  $g^2 = a_n^2 + a_\tau^2$ , где учтём  $g_{obs} \approx a_n$ , в следующем виде:

$$x^2 = \left( \frac{g}{g_N} \right)^2 - \left( \frac{a_n}{g_N} \right)^2 = \frac{(g - a_n)(g + a_n)}{g_N^2} \approx \frac{2a_\tau g_{obs}}{g_N^2} \quad (84)$$

С учётом того, что движение в спиральных галактиках преимущественно круговое и радиальная составляющая много больше, можно считать, что  $g_{obs}$  является основной составляющей, поэтому полное ускорение также направлено приблизительно к центру вращения. Запишем  $g_{obs} \approx g = g_N + \Delta g$ , где  $\Delta g$  - прибавка к классическому выражению для ускорения, возникающая из-за дополнительного слагаемого. По смыслу  $x$  - это разница полного ускорения и  $g_N$  отнесённая к  $g_N$ . С учётом выше написанного:

$$x \approx \frac{\Delta g}{g_N} \quad (85)$$

Тогда ур. (84) переписывается в следующем виде (где учтено  $g_{obs} \approx g$ ):

$$\frac{g}{g_N} = 1 + k \left( \frac{g^{1/2}}{g_N} \right) \quad (86)$$

где введено обозначение  $k^2 = 2a_\tau$ . Отметим, что ур. (86) также может быть получено из связи функции  $\kappa$  и постоянной Хаббла  $H$ :

$$x = \frac{\kappa v^2 r}{GM} = \frac{H_0}{\xi} \frac{v^2 r}{GM} = \frac{H_0}{\xi} \frac{(r g_{obs})^{1/2}}{g_{bar}} \propto \frac{(r g_{obs})^{1/2}}{g_{bar}} \quad (87)$$

где  $\xi = \frac{H(t)}{\kappa(t)}$  - отношение постоянной Хаббла и функции  $\kappa$ . Далее, если рассмотреть две системы отсчёта и поделить выражения (87), записан-

ные в разных системах отсчёта друг на друга (чтобы сократить зависимость от  $r$ ), можно получить ур. (86), но с коэффициентом  $k$ :

$$k = \left( \frac{g - g_N}{\sqrt{g}} \right)_1 \quad (88)$$

где цифра (1) означает одну из рассматриваемых систем отсчёта. Таким образом, получаются две абсолютно разные интерпретации коэффициента  $k$ , одна из которых связана с сравнением двух систем отсчёта, а другая нет.

Уравнение (86) является квадратным относительно  $g$ :

$$g^2 - (2g_N + k^2)g + g_N^2 = 0 \quad (89)$$

С двумя решениями:

$$g = g_N + \frac{k^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4g_N k^2 + k^4} \quad (90)$$

Физическим является только решение с " + ", т.к. обычно  $g$  оказывается больше  $g_N$ .

У полученного выражения есть три важных предела:

- $g \rightarrow g_N$ , при  $g_N \gg k^2$  - классический предел в сильных полях (например массивное притягивающее тело или очень плотная среда)
- $g \rightarrow g_N + \sqrt{g_N k^2}$ , при  $g_N$  больше  $k^2 \sim$  на 2 порядка - промежуточное значение
- $g \rightarrow k^2$ , при  $g_N \rightarrow 0$  - некое фоновое ускорение, которое есть даже при отсутствии гравитационного взаимодействия.

Произведём некоторые оценки для величины фонового ускорения. Во-первых, при  $g_N \rightarrow 0$

$$k^2 \rightarrow \min[g_N] = \min \left[ \frac{GM}{r^2} \right] = \min \left[ \frac{4\pi}{3} G \bar{\rho} r \right] \quad (91)$$

Среднюю плотность вещества можно оценить как  $\bar{\rho} = \Omega_m \rho_c$ , где критическая плотность  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ , тогда получается оценка  $k^2 \sim H_0^2 r$ .  $r$  будет разумно оценить как некую долю  $f$  от величины  $\frac{c}{H_0}$ . Итого, получаем:

$$k^2 \sim \frac{1}{2} f \Omega_m c H_0 \quad (92)$$

С другой стороны  $k^2$  также можно оценить как

$$k^2 \sim a_\tau = \frac{v}{t} = \frac{H_0 R_{lim}}{t_0} = \frac{H_0 c t_0}{t_0} = H_0 c \quad (93)$$

- верхняя оценка через крупномасштабные космологические постоянные ( $t_0$  - возраст Вселенной) Похожие оценки также были справедливы для граничной постоянной  $a_0$  из MOND (соотношение (13)), но всё-таки,  $k^2$  несколько меньше из-за параметра  $f$ , который обязательно меньше единицы. Свой вклад в уменьшение  $k^2$  также вносит наличие материи через коэффициент  $\Omega_m$ .

### Сравнение с экспериментальными данными и MOND

В статье *Scale-Invariant Dynamics of Galaxies, MOND, Dark Matter, and the Dwarf Spheroidals, Andre Maeder and Vesselin G. Gueorguiev, MNRAS 2019* [6] формулу (90) использовали для аппроксимации RAR (т.е зависимости наблюдаемого центростремительного ускорения от гравитационного Ньютона), полученной из кривых вращения для 240 галактик. В результате получилось следующее значение  $k^2$ :

$$k^2 = 10^{-10.85} \text{ м/с}^2 = 1.41 \cdot 10^{-11} \text{ м/с}^2$$

Заметим, что порядок величины совпадает с произведёнными оценками. Если взять  $H_0 = 70$  км/с,  $\Omega_m = 0.20$  или  $0.30$ , то для  $f$  получим  $\approx 0.21$  или  $0.14$  соответственно.

Рассмотрим зависимость центростремительного ускорения от расстояния на примере нескольких галактик. Наблюдаемое значение определяется из кривой вращения по формуле:

$$g_{obs} = \frac{v^2}{r} \quad (94)$$

а погрешность для него:

$$\sigma_{g_{obs}} = \frac{2v \sigma_v}{r} \quad (95)$$

Эти значения будем сравнивать с теоретическими кривыми, соответствующими классической теории, теории MOND и SIV. Кривая MOND рассчитывается по формуле (12), SIV по формуле (90) с приведённым выше значением параметра  $k^2$ .

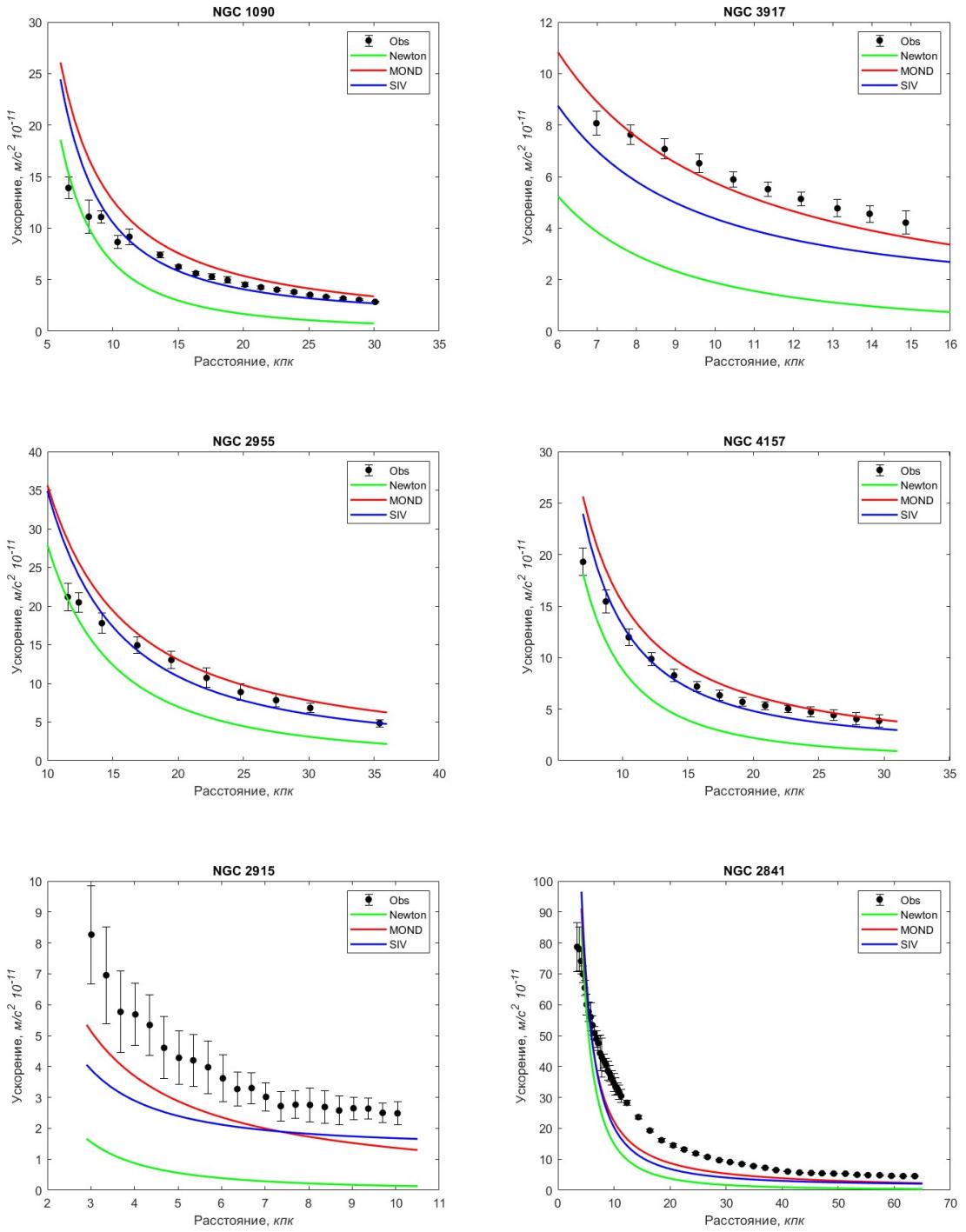


Рис. 4: Зависимость центростремительного ускорения от расстояния для некоторых галактик. Зелёным цветом показана кривая, соответствующая классической (Ньютоновской теории), красным - MOND, синим - SIV.

На Рис. 4 представлены рассчитанные экспериментальные и теоретические зависимости. Для галактик NGC 1090, NGC 4157 и NGC 2955 данные лучше аппроксимирует кривая SIV, для NGC 3917 лучше кривая MOND. Для галактик NGC 2915 (как и прежде) и NGC 2841 наблюдается отклонение от всех кривых.

## Итоги и выводы

Применив рассмотренные теории к расчёту кривых вращений галактик, можно сделать вывод, что они действительно способны объяснить их аномальное поведение без введения тёмной материи. Очевидно, что данная тема заслуживает дальнейшего изучения. Перечислим возможные направления:

- Дальнейшая теоретическая разработка MOND. К сожалению, из постулатов MOND можно получить лишь асимптотику для аппроксимирующей функции, но её конкретный вид пока не известен. Остаётся подбирать подходящую под эксперимент функцию, надеясь, что в будущем её вид будет обоснован теоретически. В настоящее время существует несколько вариантов развития теории [8], но консенсуса пока нет.
- Измерение кривых вращения на больших расстояниях поможет в проверке гипотезы о расширении галактик, возникающей в теории SIV. Пока лишь для немногих галактик кривые вращения измерены на таких больших расстояниях.
- Поиск связи теорий между собой и с классической физикой. Очевидно, что между MOND и SIV прослеживается некая связь. В обеих теориях присутствует масштабная инвариантность в качестве одного из основных постулатов, также получаются схожие асимптотики для центростремительного ускорения, а параметры  $a_0$  и  $k^2$  связаны с космологическими постоянными. В недавней статье *MOND as a peculiar case of the SIV theory* [9] эта связь была исследована более подробно, в частности асимптотика MOND была получена как предел теории SIV для систем с динамическим масштабом времени до нескольких сотен миллионов лет (т.е. где  $\lambda$  можно считать константой), а также была найдена связь между  $a_0$  и  $\Omega_m$ .
- Учёт более сложных факторов при расчёте может объяснить наблюдаемое несоответствие для некоторых галактик.

- Теория SIV имеет своё приложение не только в объяснении поведения кривых вращения галактик, но и в космологии, например при объяснении ускоренного расширения Вселенной [10] или динамики галактических скоплений [7]. Соответственно, необходимо проверять данные теории и на других явлениях, с объяснением которых стандартная физика пока не справляется.

## Список литературы

- [1] Mordehai Milgrom. MOND impact on and of the recently updated mass-discrepancy-acceleration relation, 2016.
- [2] G. Gentile, B. Famaey, and W. J. G. de Blok. THINGS about MOND. *Astronomy Astrophysics*, 527:A76, jan 2011.
- [3] Federico Lelli, Stacy S. McGaugh, and James M. Schombert. SPARC: MASS MODELS FOR 175 DISK GALAXIES WITH SPITZER PHOTOMETRY AND ACCURATE ROTATION CURVES. *The Astronomical Journal*, 152(6):157, nov 2016.
- [4] A. C. Quillen. Ngc 2915 – a galaxy with a dark or faded massive disk?, 1998.
- [5] Stacy S. McGaugh. THE BARYONIC TULLY- FISHER RELATION OF GAS-RICH GALAXIES AS a TEST OF  $\Lambda$ CDM AND MOND. *The Astronomical Journal*, 143(2):40, jan 2012.
- [6] Andre Maeder and Vesselin G Gueorguiev. Scale-invariant dynamics of galaxies, MOND, dark matter, and the dwarf spheroidals. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 492(2):2698–2708, dec 2019.
- [7] Andre Maeder. Dynamical effects of the scale invariance of the empty space: The fall of dark matter? *The Astrophysical Journal*, 2017.
- [8] Mordehai Milgrom. MOND vs. dark matter in light of historical parallels. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 71:170–195, aug 2020.
- [9] Andre Maeder. MOND as a peculiar case of the SIV theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 520(1):1447–1455, jan 2023.
- [10] Andre Maeder and Vesselin G Gueorguiev. The scale-invariant vacuum SIV theory: A possible origin of dark matter and dark energy, 2020.