Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

КУРСОВАЯ РАБОТА

на тему

«СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ТЕОРИЯХ С НАРУШЕННОЙ ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬЮ»

Выполнил студент 2 курса 213 группы
Суранович Игорь Васильевич

Научный руководитель
к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН Сатунин Пётр Сергеевич

Москва, 2022

Оглавление

Введение

Лоренц-инвариантность - это свойство систем математических уравнений, описывающих физические законы, а также физических величин сохранять свой вид при применении преобразований Лоренца. Преобразование Лоренца с математической точки зрения - обобщение понятия ортогонального преобразования (т.е. сохраняющего скалярное произведение векторов) с евклидовых пространств на псевдоевклидовы (важнейшим из которых является пространство Минковского - геометрическая интерпретация пространства-времени СТО). Таким образом, лоренцевы преобразования являются аналогом галилеевых преобразований от одной инерциальной системы к другой в четырехмерном пространстве-времени.

Лоренц-инвариантность - фундаментальное свойство физических процессов, проверенное с высокой точностью в наземных и астрофизических экспериментах. Не вступая в противоречие с современными ограничениями, мы можем допустить нарушение симметрии теории относительно преобразований Лоренца лишь на самых высоких энергиях, близких к массе Планка. Такое гипотетическое нарушение невозможно обнаружить или опровергнуть в наземных экспериментах. В качестве объекта наблюдения мы будем рассматривать синхротронное излучение сверхвысоких энергий, дошедшее из Крабовидной туманности.

Синхротронное излучение - это излучение электромагнитных волн релятивистскими заряженными частицами, движущимися по криволинейной траектории, то есть имеющими составляющую ускорения, перпендикулярную скорости; впервые оно наблюдалось в электронных синхротронах в 1948 году.

Мотивация

Проблема детального рассмотрения возможности нарушения лоренц-инвариантности при высоких энергиях начала подниматься серьезно лишь к началу XXI века. Это объяснялось как объективными причинами, такими как недоступность самих "высоких энергий"для исследования, к примеру, в 1960-х годах, и весьма точное совпадение данных по меньшим энергиям с имеющимися (очевидно, инвариантными) моделями, что, по большому счету, относило любые рассуждения о лоренц-неинвариантных моделях к схоластическим изыскам, так и довольно субъективными, вроде той мысли, что лоренц-инвариантность как естественная "преемница"казавшейся незыблемой несколько веков инвариантности относительно галилеевских преобразований должна принадлежать к числу тех фундаментальных симметрий физики, которые выполняются точно и при всех условиях, которые сегодняшняя наука может представить и качественно описать; соответственно, любая ее ревизия должна предполагать масштабную перекройку основ физики (подобно квантовой теории в свое время), а из революционности такой теории автоматически следовало бы повышенное недоверие к ней со стороны научного сообщества в отсутствие значимых причин отказываться от установившихся, проверенных временем парадигм. Все это объясняет, почему лишь к концу XX века, с развитием теорий струн, петлевой квантовой гравитации, некоммутативных теорий поля, космологии бран, а также иных теорий квантовой гравитации, вдобавок к значительно увеличившимся энергиям, доступным для наблюдения, лоренц-неинвариантные модели стали предметом пристального рассмотрения физиков. Таким образом, лоренц-неинвариантность - это весьма молодая область перспективной физики, которая, как и любая другая, вынуждена частично опираться на старые, а значит, в чем-то заведомо неприменимые модели, делать смелые предположения и в чем-то оставаться расплывчатой либо доверяться авторитетам в силу малоизученности того или иного вопроса. Из этого неизбежно следуют разного рода ее "детские болезни", которые очень важно своевременно выявлять и корректировать, чтобы двигаться вперед.

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются современные концепции нарушения лоренц-инвариантности, изучаемого на примере синхротронного излучения, прибывающего из Крабовидной туманности в созвездии Тельца. Критически анализируется, в первую очередь, одна из наиболее ранних и цитируемых статей по предмету [3], авторы которой признаются одними из авторитетнейших специалистов по теме, а также другие связанные статьи, в том числе критические. С этой целью проводится изучение и обзор принятой теории синхротронного излучения в классическом ультрарелятивистском случае, предполагающем сохранение лоренц-инвариантности, вывод необходимых формул, а затем получение их неклассических аналогов, предложенных авторами статьи, анализ и описание изменений, обзор используемых методов и, на основе последнего, попытка определить корректность, анализ и критика выводов статьи, а также некоторых производных статей (в том числе полемических) и критических замечаний в них.

Теоретическое введение

Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при движении по окружности с сохранением Лоренц-инвариантности

Исследование излучения релятивистских заряженных частиц начнем с определения потенциалов Лиенара-Вихерта. Потенциалы Лиенара-Вихерта - это точное решение уравнений Максвелла для точечного поля одной частицы, записанное в калибровке Лоренца (условие $div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$), наиболее подходящей для описания динамических случаев, в отличие от кулоновской калибровки, применяемой в нерелятивистских магнитостатических задачах. Они могут быть представлены следующим образом:

$$\Phi(\vec{x},t) = \left[\frac{e}{(1-\vec{\beta}\vec{n})R}\right]_{ret}, \tag{1}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \left[\frac{e\beta}{1-\vec{\beta}\vec{n})R}\right]_{ret}, \tag{2}$$

где Φ - скалярный потенциал, $\vec{A}$ - векторный, e - значение точечного заряда, $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, $\vec{n}$ - единичный вектор из точки нахождения заряда в точку наблюдения, R - расстояние между этими точками, а квадратные скобки с индексом "ret"означают, что величины в скобках следует брать в момент времени $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ (запаздывающее (retarded) время). При этом, как следует из решений волновых уравнений для них в случае переменных во времени полей с помощью функции Грина, потенциалы также могут быть представлены как

$$A_\mu(\vec{x},t) = e\int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t'')}\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]dt', \tag{3}$$

где $\beta_\mu = (\vec{\beta}, i)$. Тогда электрическое и магнитное поля можно представить в виде:

$$\vec{E}(x,t) = e\int\left[\frac{\vec{n}}{R^2}\delta(t' + \frac{R}{c} - t) + \frac{1}{cR}(\vec{\beta} - \vec{n})\delta'(t' + \frac{R}{c} - t)\right]dt' \tag{4}$$

$$\vec{B}(x,t) = e\int(\vec{\beta} - \vec{n})\left\{-\frac{\delta[t' + \frac{R}{c} - t]}{R^2} + \frac{1}{cR}\delta'(t' + \frac{R}{c} - t)\right\}dt' \tag{5}$$

Получаем

$$\vec{E}(x,t) = e\left[\frac{\vec{n}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\vec{n}}{c\kappa}\frac{d}{dt'}(\frac{1}{\kappa R}) - \frac{\vec{\beta}}{\kappa^2 R^2} - \frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\beta}{\kappa R}\right)\right]_{ret}, \tag{6}$$

$$\vec{B}(x,t) = e\left[\frac{\vec{\beta}\times\vec{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}(\frac{\vec{\beta}\times\vec{n}}{\kappa R})\right]_{ret}, \tag{7}$$

где $\kappa = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}$. Из найденных соотношений видно, что магнитное поле связано с напряженностью электрического поля простым соотношением

$$\vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}, \tag{8}$$

где обе части равенства берутся с учетом запаздывания. Переписав оставшиеся производные, окончательно представим электрическое поле в виде

$$E(x,t) = e[\frac{(n-\beta)(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}]_{ret} + \frac{e}{c}[\frac{n}{\kappa^3 R}\times\left\{(n-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right\}]_{ret}, \tag{9}$$

а магнитное поле определяется по (8).

Энергия, излучаемая зарядом, движущимся с релятивистской скоростью, распределена по широкому диапазону частот. Для точного расчёта ширины частотного спектра воспользуемся теоремой Парсеваля из теории интегралов Фурье. Соотношение для мощности излучения в единицу телесного угла имеет общий вид

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \left|\vec{A}(t)\right|^2, \tag{10}$$

где

$$\vec{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left[R\vec{E}\right]_{ret}, \tag{11}$$

а $\vec{E}$ - напряженность электрического поля (9). Здесь мгновенная мощность рассматривается в зависимости от времени в лабораторной системе отсчета, так как желательно знать частотный спектр с точки зрения наблюдателя. Для определенности будем считать, что ускорение отлично от нуля в течение некоторого конечного интервала времени или по крайней мере убывает для отдаленных прошлых и будущих моментов, так что полная излученная энергия конечна. Предположим также, что точка наблюдения настолько удалена от заряда, что область, проходимая зарядом, в течение интервала, когда он ускоряется, видна из нее под малым телесным углом. Полная энергия, излучаемая в единицу телесного угла, определяется интегрированием (10) по времени

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\vec{A}(t)\right|^2 dt. \tag{12}$$

С помощью преобразования Фурье можно выразить этот результат в виде интеграла по частотам. Введем Фурье-амплитуду $\vec{A}(\omega)$ функции $\vec{A}(t)$

$$\vec{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}(t)e^{i\omega t}dt \tag{13}$$

и обратное преобразование

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t} dt \tag{14}$$

Тогда формулу (12) можно переписать в виде

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{A}^{*}(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) e^{i(\omega'-\omega)t}. \tag{15}$$

Изменим порядок интегрирования по времени и по частоте. Легко убедиться, что интеграл по времени является Фурье-представлением δ-функции $\delta(\omega' - \omega)$. Поэтому выражение для энергии, излучаемой в единицу телесного угла, может быть преобразовано к виду

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\vec{A}(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{16}$$

Равенство выражений (12) и (16), справедливое при выполнении некоторых общих математических ограничений, накладываемых на функцию, представляет собой частный случай теоремы Парсеваля. Так как знак частоты не имеет физического смысла, обычно проводят интегрирование лишь по положительным частотам. При этом соотношение

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{0}^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega. \tag{17}$$

определяет величину $\frac{dI(\omega)}{d\Omega}$, равную энергии, излучаемой в единицу телесного угла в единичном интервале частот:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2\left|\vec{A}(\omega)\right|^2 + \left|\vec{A}(-\omega)\right|^2 \tag{18}$$

Если величина $\vec{A}(t)$ действительная, то, согласно (14), $\vec{A}(-\omega) = \vec{A}^{*}(\omega)$, так что

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2\left|\vec{A}(\omega)\right|^2. \tag{19}$$

Полученное соотношение устанавливает количественную связь между изменением излучаемой энергии во времени и её частотным спектром. Воспользовавшись формулой (9) для электрического поля ускоренного заряда, можно получить общее выражение для энергии, излученной в единицу телесного угла в единичном интервале частот, в виде интеграла вдоль траектории частицы. Для этого нужно найти Фурье-амплитуду (13) функции $\vec{A}(t)$, определяемой выражением (11). Согласно (9),

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{\kappa^3}\right]_{ret} dt \tag{20}$$

Заменяя переменную t на t', получаем

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left\{t' + \frac{Rt'}{c}\right\}} \frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{\kappa^2} dt'. \tag{21}$$

Поскольку предполагается, что точка наблюдения достаточно удалена от области пространства, в которой ускоренно движется частица, единичный вектор $\vec{n}$ можно считать постоянным во времени. Кроме того, $R(t)$ можно приближенно представить в виде $R(t') \approx x - \vec{n} \cdot \vec{r}(t')$, где x - расстояние точки наблюдения от начала отсчета, а $\vec{r}(t')$ определяет положение частицы относительно точки начала отсчета. При этом выражение (21) с точностью до общего фазового множителя принимает вид

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left\{t' + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}(t')}{c}\right\}} \frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{\kappa^2} dt' \tag{22}$$

Соответствующее выражение для энергии (19), излучаемой в единичном интервале частот в единицу телесного угла, имеет вид

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} e^{i\omega\left\{t' + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}(t')}{c}\right\}} dt' \right|^2 \tag{23}$$

Обозначим t' как t для удобства записи. При заданном законе движения известна зависимость $\vec{r}(t)$ и могут быть найдены $\vec{\beta}(t)$ и $\dot{\vec{\beta}}(t)$, а следовательно, интеграл может быть вычислен как функция от ω и направления $\vec{n}$. Выражение (23) обладает тем преимуществом, что интегрирование в нем совершается лишь по интервалу времени, на котором ускорение отлично от нуля, однако в ряде случаев можно получить более простое выражение для спектральной интенсивности излучения, выполняя в (22) интегрирование по частям. Как легко показать, векторная часть, то есть множитель при экспоненте в подынтегральном выражении в (22), представляет собой полный дифференциал.

$$\frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{\kappa^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{\beta})}{\kappa}\right]. \tag{24}$$

Поэтому интегрирование по частям приводит к следующему выражению для спектральной интенсивности:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} n \times (n \times \beta) e^{i\omega\{t - [n \cdot r(t)/c]\}} dt\right|^2 \tag{25}$$

Для определения частотного и углового распределения энергии необходимо вычислить этот интеграл. Так как длительность импульса излучения $\Delta t' \sim \frac{\varrho}{c\gamma}$ очень мала, необходимо знать скорость $\vec{(}\beta)$ и положение $\vec{(}r)(t)$ частицы лишь на малой дуги траектории, на которой касательная направлена приблизительно в точку наблюдения. Отрезок траектории и мгновенный радиус кривизны лежат в плоскости xy. Так как интеграл берётся вдоль траектории, можно без потери общности рассмотрения считать, что единичный вектор $\vec{n}$ расположен в плоскости xz и образует угол θ с осью x. Интенсивность излучения имеет заметную величину лишь для очень малых θ. Начало отсчёта времени выбрано так, чтобы при $t = 0$ частица находилась в начале координат.

Преобразовав с учетом малости углов θ и близости рассматриваемого времени к $t = 0$, разложив на ортогональные составляющие, получим:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\Big| -\vec{e}_{\parallel}A_{\parallel}(\omega) + \vec{e}_{\perp}A_{\perp}(\omega)\Big|^2, \tag{26}$$

где амплитуды определяются соотношениями:

$$A_{\parallel}(\omega) \approx \frac{c}{\varrho}\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot exp\left\{ i\frac{\omega}{2}[(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2)t + \frac{c^2t^3}{3\varrho^2}]\right\} dt \tag{27}$$

$$A_{\perp}(\omega) \approx \theta\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{ i\frac{\omega}{2}[(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2)t + \frac{c^2t^3}{3\varrho^2}]\right\} dt \tag{28}$$

Произведя замену переменной $x = ct/\rho[(1/\gamma^2) + \theta^2]^{-\frac{1}{2}}$ и вводя параметр

$$\xi = \frac{\omega\varrho}{3c}(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{29}$$

можно преобразовать интегральные представления для $A_{\parallel}(\omega)$ и $A_{\perp}(\omega)$ к виду

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{\varrho}(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2)\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot exp\left\{ i\frac{3}{2}(\xi)(x + \frac{1}{3}x^3)\right\} dx \tag{30}$$

$$A_{\perp}(\omega) = \theta(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2)\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{ i\frac{3}{2}(\xi)(x + \frac{1}{3}x^3)\right\} dx \tag{31}$$

Интегралы (30) и (31) выражаются через функции Эйри, или модифицированные функции Бесселя:

$$\int_0^{\infty} x \cdot sin[\frac{3}{2}(\xi)(x + \frac{1}{3}x^3)]dx = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{\frac{2}{3}(\xi)} \tag{32}$$

$$\int_0^{\infty} cos[\frac{3}{2}(\xi)(x + \frac{1}{3}x^3)]dx = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{\frac{1}{3}(\xi)} \tag{33}$$

В результате энергия, излученная в единицу телесного угла в единичном интервале частот, оказывается равной

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}(\frac{\omega\varrho}{c^2})(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2)^2[K^2_{\frac{2}{3}}(\xi) + \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2}K^2_{\frac{1}{3}}(\xi)] \tag{34}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует излучению, поляризованному в плоскости орбиты, второе – излучению, поляризованному перпендикулярно этой плоскости.

Проанализируем теперь этот довольно сложный результат. Прежде всего интегрируем выражение по всем частотам и найдём угловое распределение энергии

$$\int_0^{\infty}\frac{dI(\omega)}{d\Omega}d\omega = \frac{7}{16}\frac{e^2}{\varrho}\frac{1}{[(1/\gamma^2) + \theta^2]^{\frac{5}{2}}}[1 + \frac{5}{7}\frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2}] \tag{35}$$

Это выражение описывает все характерные свойства излучения движущихся зарядов. Также как и в (11), первое слагаемое в (12) соответствует поляризации, параллельной орбитальной плоскости а второе перпендикулярной поляризации. Проинтегрировав по всем углам, мы найдём, что энергия излучения с поляризацией, параллельной орбитальной плоскости, в 7 раз превосходит энергию излучения с перпендикулярной поляризацией. Таким образом, излучение релятивистски движущегося заряда в основном, хотя и не полностью, поляризованно в плоскости движения. Для нерелятивистского движения, как можно показать, излучение полностью поляризовано в плоскости движения.

Как следует из свойств модифицированных функций Бесселя, интенсивность излучения пренебрежимо мала при $\xi \gg 1$. Согласно (6), это соответствует случаю больших углов; чем выше частота, тем меньше критический угол, вне пределов которого интенсивность излучения пренебрежимо мала. Таким образом, излучение сосредоточено в основном вблизи плоскости движения, как видно из (12), причём область заметного излучения тем меньше, чем выше отношение частоты к величине c/ϱ. Однако если частота ω становится очень большой, то параметр ξ будет, очевидно, большим для *всех* углов. Следовательно, на таких частотах полная излученная энергия пренебрежимо мала. Критическая частота ω_c, при превышении которой излучение в любом направлении становится пренебрежимо малым, может быть определена из условия $\xi = \frac{1}{2}$ и $\theta = 0$. Это приводит к соотношению

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3 \left(\frac{c}{\varrho}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \frac{c}{\varrho}, \tag{36}$$

которое и является определяющей лоренц-инвариантной формулой в рассматриваемой статье и в нашей работе. Здесь и заканчивается рассмотрение классической электродинамической теории, откуда мы переходим к гипотетическим построениям для нарушений лоренц-инвариантности.

Практическая часть

Вывод необходимых формул для описания излучения релятивистской заряженной частицы при движении по окружности с нарушением Лоренц-инвариантности

Преобразуем сначала (36) таким образом, чтобы получить исходную лоренц-инвариантную формулу критической частоты излучения для движения электронов, ускоренных в магнитном поле, используемую в [3] для анализа, а именно

$$\omega_c^{LI} = \frac{3}{2}\frac{eB\gamma^2}{m}. \tag{37}$$

Мгновенный радиус кривизны при произвольном ультрарелятивистском движении определяется как

$$\varrho = \frac{v^2}{\dot{v}_\perp} \approx \frac{c^2}{\dot{v}_\perp}, \tag{38}$$

где $\dot{v}_\perp$ - поперечная составляющая ускорения. В магнитном поле для заряженной частицы причиной появления этой составляющей является магнитная составляющая силы Лоренца. Запишем релятивистский второй закон Ньютона с учетом ультрарелятивизма:

$$evB \approx ecB = m\dot{v}_\perp\gamma, \tag{39}$$

где B - перпендикулярная скорости частицы составляющая магнитного поля, откуда

$$\dot{v}_\perp = \frac{ecB}{m\gamma} \tag{40}$$

и

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{c}{\varrho}\right) = \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{eB}{m\gamma}\right) = \frac{3}{2}\frac{eB\gamma^2}{m}, \tag{41}$$

что в точности соответствует (37).

Теперь приведем (36) в более удобную форму для обнаружения зависимых от перехода к условиям нарушения инвариантности элементов. Как уже было замечено, угол открытия направленного вперед паттерна излучения θ пропорционален γ^{-1}. Тогда можем переписать

$$\frac{3}{2}\gamma^3\frac{c}{\varrho} = \frac{3}{2}\frac{\gamma^2 c}{\varrho\theta}, \tag{42}$$

где, воспользовавшись определением γ, получим

$$\frac{3}{2}\frac{c}{\varrho\theta}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{3}{2}\frac{c^3}{\varrho\theta(c-v)(c+v)}, \tag{43}$$

откуда в ультрарелятивистском пределе

$$\frac{3}{2}\frac{c^3}{\varrho\theta(c-v)(c+v)} \approx \frac{3}{2}\frac{c^3}{\varrho\theta(c-v)2c} = \frac{3}{4}\frac{c^2}{\varrho\theta(c-v)}. \tag{44}$$

Забегая немного вперед, c, строго говоря, тоже не будет являться константой в случае нарушения инвариантности. Однако поскольку энергии, переносимые фотонами из Крабовидной туманности, обычно составляют порядка 10 кЭв, совершенно несравнимы с энергиями релятивистских электронов (в соответствии с релятивистской формулой $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ энергией порядка 10^{20} кЭв уже обладает электрон со скоростью $0,9c$), на практике мы можем пренебречь влиянием изменившихся дисперсионных соотношений для безмассовых частиц по сравнению с массовыми, а значит, по крайней мере, в числителе дроби оставить значение c инвариантным, а перейдя в систему единиц, где инвариантная скорость света соответствует 1, получим

$$\omega_c = \frac{3}{4}\frac{1}{\varrho\theta(c-v)} = \frac{3}{4}\frac{1}{R(E)\delta(E)}\frac{1}{c(\omega_c)-v(E)}, \tag{45}$$

где последняя форма соответствует полученной в [3].

Наконец, выведем из (45) конечную формулу для критической частоты в лоренц-неинвариантном случае. Как уже было упомянуто, угол θ пропорционален γ^{-1}, коэффициент же следует выбирать так, чтобы в лоренц-инвариантном случае формула переходила в (37). Повторим, что изменение электромагнитного поля при нарушении инвариантности слишком незначительно при сравнении порядков энергий, поэтому $\delta(E)$ по-прежнему можно считать пропорциональным $\gamma^{-1}(E)$. Далее для поиска чувствительных к нарушению величин нам потребуется ввести гипотетические дисперсионные соотношения для неинвариантного случая. В статье используются следующие:

$$\omega^2(k) = k^2 + \xi\frac{k^3}{M}, \tag{46}$$

$$E^2(p) = m^2 + p^2 + \eta\frac{p^3}{M}, \tag{47}$$

где ω и k - частота и волновое число фотона, E и p - энергия и импульс электрона, ξ и η - неизвестные коэффициенты, а M - в явном виде исключенный эмпирически порядок энергий - 10^19 ГэВ. Представленные соотношения адекватны для поставленной цели, поскольку, очевидно, возможные нарушения с большими порядками импульса будут на таких энергиях ничтожны, а с меньшими практически исключены имеющимися экспериментальными данными. Итак, радиус $R(E)$ при заданной энергии определяется уравнением движения электрона в магнитном поле. Чтобы определить степень влияния неинвариантности на эту величину, используем дисперсионное соотношение в качестве функции Гамильтона. Тогда запишем вместо импульса $\vec{p}-e\vec{A}$, где $\vec{A}$ - векторный потенциал магнитного поля. Получим уравнение движения

$$\vec{A}\left[1+\frac{3\eta E}{2M}\right]\left(\frac{e}{E}\right)\vec{v}\times\vec{B}, \tag{48}$$

где учтен только наименьший порядок η и ультрарелятивизм в $E \gg m$. Однако, поскольку $E \ll m$, нарушение инвариантности вносит очень малые изменения в уравнение вращения, и с хорошей точностью радиус можно считать связанным с магнитным полем и энергией электрона стандартной ультрарелятивистской формулой $R(E)=\frac{E}{eB}$. В который раз обратимся к тому факту, что энергия фотонов мала по сравнению с энергией электронов, тогда параметром ξ можно пренебречь при расчете разности скоростей фотонов и электронов. Тогда, поскольку в ультрарелятивистском случае

$$\gamma^2=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{c^2}{c^2-v^2}=\frac{c^2}{(c-v)(c+v)}\approx\frac{c^2}{(c-v)2c}=\frac{c}{2(c-v)}, \tag{49}$$

последний множитель (45) может быть записан в системе счисления, где инвариантная скорость света равна 1, как $2\gamma^2(E)$. Таким образом, получим конечную формулу для критической частоты:

$$\omega_c=\frac{3}{2}\frac{eB\gamma^3(E)}{E}=\frac{3}{2}\frac{eB}{m}\frac{m\gamma(E)}{E}\gamma^2(E), \tag{50}$$

где последняя форма соответствует представленной в статье. Далее авторами предлагается вывести разницу $c(\omega)$ и $v(E)$ из дисперсионных соотношений (46) и (47), с предложенным ответом без учета высших порядков:

$$c(\omega)-v(E)=\xi\frac{\omega}{M}+\frac{M^2}{2E^2}-\eta\frac{E}{M}, \tag{51}$$

что с учетом пренебрежения ξ дает, используя (49):

$$\gamma(E)\approx\left(\frac{m^2}{E^2}-2\eta\frac{E}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{52}$$

Затем, поскольку эта формула ограничена сверху, предлагается, подставив ее в (50), найти максимум критической частоты, равный в статье

$$\omega_c^{max}=0,34\frac{eB}{m}\left(-\frac{\eta m}{M}\right)^{-\frac{2}{3}}, \tag{53}$$

на основе которого авторами и определяются ограничения на условия существования нарушений лоренц-инвариантности.

Проблемы

Предложенный вывод таит в себе несколько способных оказаться весьма серьезными проблем. Ключевой из них, на наш взгляд, можно назвать неопределенность выбора групповой или фазовой скорости в ходе вывода ключевой формулы.

Действительно, в одной части статьи гамма-фактор определяется как $\gamma = \frac{E}{m}$, что, разумеется, верно только для фазовой скорости: релятивистский импульс $p = \gamma m v$, по нашему предположению $m = \frac{E}{\gamma}$, тогда $\frac{p}{\gamma v} = \frac{E}{\gamma}$, отсюда $v = \frac{E}{p}$, что, в соответствии с $E = \hbar\omega$ и $p = \hbar k$ дает нам определение фазовой скорости $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$. В других же частях как в явном виде, так и при введении классического определения гамма-фактора $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ используется групповая скорость $v_{gr} = \frac{dE}{dp}$. Традиционно при описании процессов, происходящих в вакууме, вопрос различения двух скоростей никогда не ставится, поскольку в лоренц-инвариантном случае они всегда равны. Однако, оказывается, как весьма просто доказать, только такому случаю и будет соответствовать их неразличимость. Действительно,

$$\frac{dE}{dp} = \frac{E}{p} \tag{54}$$

$$Ede = pdp \tag{55}$$

$$\frac{1}{2}d(E^2) = \frac{1}{2}d(p^2) \tag{56}$$

$$d(E^2 - p^2) = 0, \tag{57}$$

откуда следует, что дисперсионное соотношение для электрона может выглядеть лишь как $E^2 = p^2 + C$, где C - произвольная постоянная, что, очевидно, соответствует лоренц-инвариантному соотношению $E^2 = m^2 + p^2$, в отличие от модифицированного соотношения (47). Таким образом, несмотря на то, что позже авторами статьи вводится модифицированный гамма-фактор (52), при выводе самой ключевой формулы (50) используются по очереди противоречащие друг другу определения скоростей, что может повлиять как на саму формулу, так и на последствия ее применения, то есть непосредственные выводы статьи.

Кроме того, само соотношение (52) ставится под вопрос весьма неясным выводом (51), которое не следует из дифференцирования дисперсионных соотношений (46) и (47) в соответствии с определением групповой скорости. Возможно, для вывода применялись какие-то неуказанные в статье методы, либо же, чего нельзя исключать, вновь ошибочно применялась эквивалентность между групповой и фазовой скоростями.

Более того, в предложенном в [1] выводе ключевой формулы (36), на который опирается статья, заключение о том, что при заданной величине приложенной силы излучение при поперечном ускорении в γ^2 раз превышает излучение для случая продольного ускорения, откуда следует, в том числе, вывод о применимости приближения, в котором излучение заряженной ультрарелятивистской частицы в каждый момент времени совпадает с излучением заряда, движущегося по дуге окружности с мгновенным радиусом кривизны, определяемым формулой (38), исходит из ряда преобразований, основанных на лоренц-инвариантном обобщении формулы Лармора. В связи с этим, строго говоря, также возникает вопрос о применимости полученных заключений к ситуации с нарушением инвариантности. Однако, поскольку эти заключения во многом эмпирически подтверждены и могут считаться достоверными независимо от приведенного вывода, это можно считать второстепенной из возможных проблем статьи. В завершение, нами был проведен небольшой литературный обзор, по итогам которого было обнаружено, что статья [3] уже критиковалась за используемые методы и полученные результаты, в частности, в [4], где, однако, большее внимание было уделено более глубоким онтологическим вопросам, будь то корректность определения групповой скорости частицы как $v = \frac{dE}{dp}$ или возможность нарушения закона сохранения энергии. Тем не менее, в свете наших вышеупомянутых открытий эти замечания тоже предстают по-новому. В полемике с автором [4] авторы оригинальной статьи пишут критический комментарий [5], однако, как нам показалось, представленные в нем заявления, в свою очередь, были еще более спекулятивны, поэтому в настоящую курсовую работу они, за малыми исключениями, не вошли.

Заключение

В работе были рассмотрены современные концепции нарушения лоренц-инвариантности, изучаемого на примере синхротронного излучения, прибывающего из Крабовидной туманности в созвездии Тельца. Была критически анализирована статья [3], а также в формате малого литературного обзора связанные с ней статьи. Была изучена принятая теории синхротронного излучения в классическом ультрарелятивистском случае, предполагающем сохранение лоренц-инвариантности, выведены необходимые формулы, а затем получены их неклассические аналогов, предложенные авторами статьи, проведены анализ и описание изменений, обзор используемых методов и, на основе последнего, попытка определить корректность, анализ и критика выводов статьи, а также производных статей. В ходе вышеперечисленного были обнаружены некоторые серьезные недочеты или проблемы в методологии авторов статьи, из которых ключевые были связаны с нетождественностью фазовой и групповой скоростей ультрарелятивистских объектов при нарушениях лоренц-инвариантности. Однако, поскольку статья достаточно лаконична и опускает множество интересующих нас моментов, однозначного заключения о справедливости или несправедливости ее выводов сделать нельзя. В дальнейшем нами планируется продолжить ее исследование и, уже с учетом всех данных, использованных авторами статьи, в том числе экспериментальных, попытаться однозначно получить результат, аналогичный представленному или отличающийся от него и объяснить его.

Литература

[1] Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М., Мир, 1965.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. — 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 536 с. - ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II).

[3] Jacobson, T., Liberati S. & Mattingly, D. A strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity, [arXiv:astro-ph/0212190].

[4] G. Amelino-Camelia, Improved limit on quantum-spacetime modifications of Lorentz symmetry from observations of gamma-ray blazars, [arXiv:gr-qc/0212002].

[5] Jacobson, T., Liberati S. & Mattingly, D. Comments on “Improved limit on quantum-spacetime modifications of Lorentz symmetry from observations of gamma-ray blazars”, [arXiv:gr-qc/0303001].