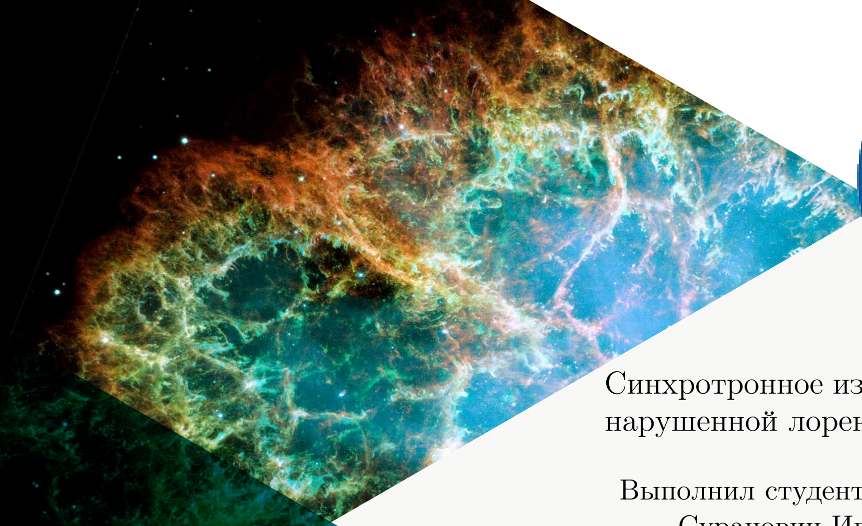

Синхротронное излучение в теориях с нарушенной лоренц-инвариантностью

Выполнил студент 2 курса 213 группы
Суранович Игорь Васильевич

Научный руководитель
к.ф.-м.н. н.с. ОТФ ИЯИ РАН Сатунин
Пётр Сергеевич

Введение

Лоренц-инвариантность - это свойство систем математических уравнений, описывающих физические законы, а также физических величин сохранять свой вид при применении преобразований Лоренца. Лоренцевы преобразования являются аналогом галилеевых преобразований от одной инерциальной системы к другой в четырехмерном пространстве-времени.

Не вступая в противоречие с современными ограничениями, мы можем допустить нарушение симметрии теории относительно преобразований Лоренца лишь на самых высоких энергиях, близких к массе Планка. В качестве объекта наблюдения мы будем рассматривать синхротронное излучение сверхвысоких энергий, дошедшее из Крабовидной туманности.

Синхротронное излучение - это излучение электромагнитных волн релятивистскими заряженными частицами, движущимися по криволинейной траектории, то есть имеющими составляющую ускорения, перпендикулярную скорости; впервые оно наблюдалось в электронных синхротронах в 1948 году.

Теоретическое введение

Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при движении по окружности с сохранением Лоренц-инвариантности

Исследование излучения релятивистских заряженных частиц начнем с определения потенциалов Лиенара-Вихерта. Потенциалы Лиенара-Вихерта - это точное решение уравнений Максвелла для точечного поля одной частицы, записанное в калибровке Лоренца.

$$\Phi(\vec{x}, t) = \left[\frac{e}{(1 - \vec{\beta}\vec{n})R}\right]_{ret}, \tag{1}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \left[\frac{e\beta}{1 - \vec{\beta}\vec{n})R}\right]_{ret}, \tag{2}$$

где квадратные скобки с индексом "ret"означают, что величины в скобках следует брать в момент времени $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ (запаздывающее (retarded) время).

Наши задачи

В настоящей работе рассматриваются современные концепции нарушения лоренц-инвариантности, изучаемого на примере синхротронного излучения, прибывающего из Крабовидной туманности в созвездии Тельца. Критически анализируется, в первую очередь, одна из наиболее ранних и цитируемых статей по предмету [3], авторы которой признаются одними из авторитетнейших специалистов по теме, а также другие связанные статьи. Задачи в работе:

- Изучение и обзор принятой теории синхротронного излучения в классическом ультрарелятивистском случае
- Вывод необходимых формул
- Получение их неклассических аналогов, предложенных авторами статьи
- Анализ и описание изменений, обзор используемых методов
- Анализ и критика выводов статьи

Теоретическое введение

Спектр излучения релятивистской заряженной частицы при движении по окружности с сохранением Лоренц-инвариантности

Исследование излучения релятивистских заряженных частиц начнем с определения потенциалов Лиенара-Вихерта. Потенциалы Лиенара-Вихерта - это точное решение уравнений Максвелла для точечного поля одной частицы, записанное в калибровке Лоренца.

$$\Phi(\vec{x},t) = \left[\frac{e}{(1-\vec{\beta}\vec{n})R}\right]_{ret}, \tag{3}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \left[\frac{e\beta}{1-\vec{\beta}\vec{n})R}\right]_{ret}, \tag{4}$$

где квадратные скобки с индексом "ret"означают, что величины в скобках следует брать в момент времени $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ (запаздывающее (retarded) время).

Теоретическое введение

При этом, как следует из решений волновых уравнений для них в случае переменных во времени полей с помощью функции Грина, потенциалы также могут быть представлены как

$$A_\mu(\vec{x}, t) = e \int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t'')} \delta \left[t' + \frac{R(t')}{c} - t \right] dt', \tag{5}$$

, откуда электрическое поле можно представить в виде:

$$E(x, t) = e[\frac{(n-\beta)(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}]_{ret} + \frac{e}{c}[\frac{n}{\kappa^3 R} \times \left\{ (n - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right\}]_{ret}, \tag{6}$$

, а магнитное поле связано с напряженностью электрического поля простым соотношением

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}. \tag{7}$$

Теоретическое введение

Энергия, излучаемая зарядом, движущимся с релятивистской скоростью, распределена по широкому диапазону частот. Для точного расчёта ширины частотного спектра воспользуемся теоремой Парсеваля из теории интегралов Фурье. Соотношение для мощности излучения в единицу телесного угла имеет общий вид

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \left|\vec{A}(t)\right|^2, \tag{8}$$

Полная энергия, излучаемая в единицу телесного угла, определяется интегрированием этого по времени

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\vec{A}(t)\right|^2 dt. \tag{9}$$

Теоретическое введение

С помощью преобразования Фурье можно выразить этот результат в виде интеграла по частотам. Введем Фурье-амплитуду $\vec{A}(\omega)$ функции $\vec{A}(t)$

$$\vec{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(t) e^{i\omega t} dt \tag{10}$$

и обратное преобразование

$$\vec{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\omega) e^{-i\omega t} dt \tag{11}$$

Тогда формулу (9) можно переписать в виде

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \vec{A}^{*}(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t}. \tag{12}$$

Теоретическое введение

Получим в итоге

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left\{t' + \frac{Rt'}{c}\right\}} \frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{\kappa^2} dt', \tag{13}$$

а затем

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left\{t' + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}(t')}{c}\right\}} \frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{\kappa^2} dt' \tag{14}$$

и

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\right]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} e^{i\omega\left\{t' + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}(t')}{c}\right\}} dt' \right|^2 \tag{15}$$

Теоретическое введение

Интегрирование по частям приводит к следующему выражению для спектральной интенсивности:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} n \times (n \times \beta) e^{i\omega\{t - [n \cdot r(t)/c]\}} dt\right|^2 \tag{16}$$

Для определения частотного и углового распределения энергии необходимо вычислить этот интеграл. Преобразовав с учетом малости углов θ и близости рассматриваемого времени к $t = 0$, разложив на ортогональные составляющие, получим:

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|-\vec{e}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \vec{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega)\right|^2, \tag{17}$$

где амплитуды определяются соотношениями:

Теоретическое введение

$$A_{||}(\omega) \approx \frac{c}{\varrho}\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot exp\left\{i\frac{\omega}{2}[(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)t+\frac{c^2t^3}{3\varrho^2}]\right\}dt \tag{18}$$

$$A_{\perp}(\omega) \approx \theta\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{i\frac{\omega}{2}[(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)t+\frac{c^2t^3}{3\varrho^2}]\right\}dt \tag{19}$$

Произведя замену переменной $x = ct/\rho[(1/\gamma^2)+\theta^2]^{-\frac{1}{2}}$ и вводя параметр

$$\xi = \frac{\omega\varrho}{3c}(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{20}$$

можно преобразовать интегральные представления для $A_{||}(\omega)$ и $A_{\perp}(\omega)$ к виду

$$A_{||}(\omega) = \frac{c}{\varrho}(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot exp\left\{i\frac{3}{2}(\xi)(x+\frac{1}{3}x^3)\right\}dx \tag{21}$$

$$A_{\perp}(\omega) = \theta(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{i\frac{3}{2}(\xi)(x+\frac{1}{3}x^3)\right\}dx \tag{22}$$

Теоретическое введение

Интегралы и выражаются через функции Эйри, или модифицированные функции Бесселя:

$$\int_0^{\infty} x \cdot sin[\frac{3}{2}(\xi)(x+\frac{1}{3}x^3)]dx = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{\frac{2}{3}}(\xi) \tag{23}$$

$$\int_0^{\infty} cos[\frac{3}{2}(\xi)(x+\frac{1}{3}x^3)]dx = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{\frac{1}{3}}(\xi) \tag{24}$$

В результате энергия, излученная в единицу телесного угла в единичном интервале частот, оказывается равной

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}(\frac{\omega\varrho}{c^2})(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2)^2[K^2_{\frac{2}{3}}(\xi) + \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2)+\theta^2}K^2_{\frac{1}{3}}(\xi)] \tag{25}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует излучению, поляризованному в плоскости орбиты, второе – излучению, поляризованному перпендикулярно этой плоскости.

Теоретическое введение

Интегрируем выражение по всем частотам и найдём угловое распределение энергии

$$\int_0^\infty \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega = \frac{7}{16} \frac{e^2}{\varrho} \frac{1}{[(1/\gamma^2) + \theta^2]^{\frac{5}{2}}} [1 + \frac{5}{7} \frac{\theta^2}{(1/\gamma^2) + \theta^2}] \quad (26)$$

Как следует из свойств модифицированных функций Бесселя, интенсивность излучения пренебрежимо мала при $\xi \gg 1$. Это соответствует случаю больших углов; чем выше частота, тем меньше критический угол, вне пределов которого интенсивность излучения пренебрежимо мала. Таким образом, излучение сосредоточено в основном вблизи плоскости движения, причём область заметного излучения тем меньше, чем выше отношение частоты к величине c/ϱ. Однако если частота ω становится очень большой, то параметр ξ будет большим для всех углов.

Теоретическое введение

Следовательно, на таких частотах полная излученная энергия пренебрежимо мала. Критическая частота ω_c, при превышении которой излучение в любом направлении становится пренебрежимо малым, может быть определена из условия $\xi = \frac{1}{2}$ и $\theta = 0$. Это приводит к соотношению Критическая частота ω_c, при превышении которой излучение в любом направлении становится пренебрежимо малым, может быть определена из условия $\xi = \frac{1}{2}$ и $\theta = 0$. Это приводит к соотношению

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3 \left(\frac{c}{\varrho}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \frac{c}{\varrho}, \tag{27}$$

которое и является определяющей лоренц-инвариантной формулой в рассматриваемой статье и в нашей работе. Здесь и заканчивается рассмотрение классической электродинамической теории, откуда мы переходим к гипотетическим построениям для нарушений лоренц-инвариантности.

Практическая часть

Вывод необходимых формул для описания излучения релятивистской заряженной частицы при движении по окружности с нарушением Лоренц-инвариантности

Преобразуем сначала последнюю формулу таким образом, чтобы получить исходную лоренц-инвариантную формулу критической частоты излучения. Мгновенный радиус кривизны:

$$\varrho = \frac{v^2}{\dot{v}_\perp} \approx \frac{c^2}{\dot{v}_\perp}, \tag{28}$$

где $\dot{v}_\perp$ - поперечная составляющая ускорения.релятивистский второй закон Ньютона с учетом ультрарелятивизма:

$$evB \approx ecB = m\dot{v}_\perp \gamma, \tag{29}$$

где B - перпендикулярная скорости частицы составляющая магнитного поля, откуда

Практическая часть

$$\dot{v}_\perp = \frac{ecB}{m\gamma} \tag{32}$$

и

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{c}{\varrho}\right) = \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{eB}{m\gamma}\right) = \frac{3}{2}\frac{eB\gamma^2}{m}. \tag{33}$$

Теперь найдем зависимые от перехода к условиям нарушения инвариантности элементы. Угол открытия направленного вперед паттерна излучения θ пропорционален γ^{-1}. Тогда можем переписать

$$\frac{3}{2}\gamma^3\frac{c}{\varrho} = \frac{3}{2}\frac{\gamma^2 c}{\varrho\theta}, \tag{34}$$

где, воспользовавшись определением γ, получим

Практическая часть

$$\frac{3}{2}\frac{c}{\varrho\theta}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{3}{2}\frac{c^3}{\varrho\theta(c-v)(c+v)}, \tag{35}$$

откуда в ультрарелятивистском пределе

$$\frac{3}{2}\frac{c^3}{\varrho\theta(c-v)(c+v)} \approx \frac{3}{2}\frac{c^3}{\varrho\theta(c-v)2c} = \frac{3}{4}\frac{c^2}{\varrho\theta(c-v)}. \tag{36}$$

c, строго говоря, тоже не будет являться константой в случае нарушения инвариантности. Однако поскольку энергии, переносимые фотонами из Крабовидной туманности, совершенно несравнимы с энергиями релятивистских электронов, на практике мы можем пренебречь влиянием изменившихся дисперсионных соотношений для безмассовых частиц по сравнению с массовыми, тогда

$$\omega_c = \frac{3}{4}\frac{1}{\varrho\theta(c-v)} = \frac{3}{4}\frac{1}{R(E)\delta(E)}\frac{1}{c(\omega_c)-v(E)}, \tag{37}$$

Практическая часть

где последняя форма соответствует полученной в [3]. Наконец, выведем конечную формулу для критической частоты в лоренц-неинвариантном случае. Как уже было упомянуто, угол θ пропорционален γ^{-1}, коэффициент же следует выбирать так, чтобы в лоренц-инвариантном случае формула переходила в уже известную. Повторим, что изменение электромагнитного поля при нарушении инвариантности слишком незначительно при сравнении порядков энергий, поэтому $\delta(E)$ по-прежнему можно считать пропорциональным $\gamma^{-1}(E)$. Далее для поиска чувствительных к нарушению величин нам потребуется ввести гипотетические дисперсионные соотношения для неинвариантного случая. В статье используются следующие:

$$\omega^2(k) = k^2 + \xi \frac{k^3}{M}, \tag{38}$$

$$E^2(p) = m^2 + p^2 + \eta \frac{p^3}{M}, \tag{39}$$

Практическая часть

Итак, радиус $R(E)$ при заданной энергии определяется уравнением движения электрона в магнитном поле. Чтобы определить степень влияния неинвариантности на эту величину, используем дисперсионное соотношение в качестве функции Гамильтона. Тогда запишем вместо импульса $\vec{p} - e\vec{A}$, где $\vec{A}$ - векторный потенциал магнитного поля. Получим уравнение движения

$$\vec{A}\left[1 + \frac{3\eta E}{2M}\right]\left(\frac{e}{E}\right)\vec{v} \times \vec{B}, \tag{40}$$

где учтен только наименьший порядок η и ультрарелятивизм в $E \gg m$. Однако, поскольку $E \ll m$, нарушение инвариантности вносит очень малые изменения в уравнение вращения, и с хорошей точностью радиус можно считать связанным с магнитным полем и энергией электрона стандартной ультрарелятивистской формулой $R(E) = \frac{E}{eB}$.

Практическая часть

Поскольку в ультрарелятивистском случае

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{(c-v)(c+v)} \approx \frac{c^2}{(c-v)2c} = \frac{c}{2(c-v)}, \tag{41}$$

последний множитель может быть записан в системе счисления, где инвариантная скорость света равна 1, как $2\gamma^2(E)$. Таким образом, получим конечную формулу для критической частоты:

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{eB\gamma^3(E)}{E} = \frac{3}{2}\frac{eB}{m}\frac{m\gamma(E)}{E}\gamma^2(E), \tag{42}$$

где последняя форма соответствует представленной в статье.

Практическая часть

Далее авторами предлагается вывести разницу $c(\omega)$ и $v(E)$ из дисперсионных соотношений, с предложенным ответом без учета высших порядков:

$$c(\omega) - v(E) = \xi\frac{\omega}{M} + \frac{M^2}{2E^2} - \eta\frac{E}{M}, \tag{43}$$

что с учетом пренебрежения ξ дает:

$$\gamma(E) \approx \left(\frac{m^2}{E^2} - 2\eta\frac{E}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Затем, поскольку эта формула ограничена сверху, предлагается, подставив ее в конечную формулу, найти максимум критической частоты, равный в статье

$$\omega_c^{max} = 0,34\frac{eB}{m}\left(-\frac{\eta m}{M}\right)^{-\frac{2}{3}}, \tag{45}$$

на основе которого авторами и определяются ограничения на условия существования нарушений лоренц-инвариантности.

Проблемы

Ключевая проблема: неопределенность выбора групповой или фазовой скорости в ходе вывода ключевой формулы. В одной части статьи $\gamma = \frac{E}{m}$, что верно только для фазовой скорости: релятивистский импульс $p = \gamma m v$, по предположению $m = \frac{E}{\gamma}$, тогда $\frac{p}{\gamma v} = \frac{E}{\gamma}$, отсюда $v = \frac{E}{p}$, что, в соответствии с $E = \hbar\omega$ и $p = \hbar k$ дает $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$. В других же частях как в явном виде, так и при введении $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ используется групповая скорость $v_{gr} = \frac{dE}{dp}$. В лоренц-инвариантном случае в вакууме две скорости всегда равны. Однако, оказывается, только этому случаю и будет соответствовать их неразличимость. Действительно,

Проблемы

$$\frac{dE}{dp} = \frac{E}{p} \tag{46}$$

$$Ede = pdp \tag{47}$$

$$\frac{1}{2}d(E^2) = \frac{1}{2}d(p^2) \tag{48}$$

$$d(E^2 - p^2) = 0, \tag{49}$$

откуда следует, что дисперсионное соотношение для электрона может выглядеть лишь как $E^2 = p^2 + C$, где C - произвольная постоянная, что соответствует лоренц-инвариантному соотношению $E^2 = m^2 + p^2$, в отличие от модифицированного соотношения. Таким образом, несмотря на то, что позже авторами статьи вводится модифицированный гамма-фактор, при выводе самой ключевой формулы используются по очереди противоречащие друг другу определения скоростей, что может повлиять как на саму формулу, так и на последствия ее применения, то есть непосредственные выводы статьи.

Кроме того, само соотношение для лоренц-неинвариантного гамма-фактора ставится под вопрос весьма неясным выводом разности групповых скоростей, которое не следует из дифференцирования дисперсионных соотношений в соответствии с определением групповой скорости. Возможно, для вывода применялись какие-то неуказанные в статье методы, либо же, чего нельзя исключать, вновь ошибочно применялась эквивалентность между групповой и фазовой скоростями.

Более того, в предложенном в [1] выводе ключевой формулы, на который опирается статья, заключение о том, что при заданной величине приложенной силы излучение при поперечном ускорении в γ^2 раз превышает излучение для случая продольного ускорения исходит из ряда преобразований, основанных на лоренц-инвариантном обобщении формулы Лармора. В связи с этим, строго говоря, также возникает вопрос о применимости полученных заключений к ситуации с нарушением инвариантности. В завершение, нами был проведен небольшой литературный обзор, по итогам которого было обнаружено, что статья [3] уже критиковалась за используемые методы и полученные результаты, в частности, в [4], где, однако, большее внимание было уделено более глубоким онтологическим вопросам.

Заключение

В ходе изучения принятой теории синхротронного излучения и ее лоренц-неинвариантных альтернатив, а также критического анализа статьи были обнаружены некоторые серьезные недочеты или проблемы в методологии авторов статьи, из которых ключевые были связаны с нетождественностью фазовой и групповой скоростей ультрарелятивистских объектов при нарушениях лоренц-инвариантности. Однако, поскольку статья достаточно лаконична и опускает множество интересующих нас моментов, однозначного заключения о справедливости или несправедливости ее выводов сделать нельзя. В дальнейшем нами планируется продолжить ее исследование и, уже с учетом всех данных, использованных авторами статьи, попытаться однозначно получить результат и объяснить его.

- Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М., Мир, 1965.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. — 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 536 с. - ISBN 5-9221-0056-4 (Т. II).
- Jacobson, T., Liberati S. & Mattingly, D. A strong astrophysical constraint on the violation of special relativity by quantum gravity, [arXiv:astro-ph/0212190].
- G. Amelino-Camelia, Improved limit on quantum-spacetime modifications of Lorentz symmetry from observations of gamma-ray blazars, [arXiv:gr-qc/0212002].
- Jacobson, T., Liberati S. & Mattingly, D. Comments on "Improved limit on quantum-spacetime modifications of Lorentz symmetry from observations of gamma-ray blazars", [arXiv:gr-qc/0303001].