

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВЫЕ СИГНАЛЫ ОТ СЛИЯНИЯ  
ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ЗВЁЗДНЫХ МАСС»**

Выполнил студент  
443 группы  
Либанов А.М.

---

подпись студента

Научный руководитель:  
д-р физ.-мат. наук Троицкий С.В.

---

подпись научного руководителя

Допущена к защите  
Зав.кафедрой \_\_\_\_\_  
подпись зав. кафедрой

Москва  
2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
I ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	5
II ПАРАМЕТРЫ Q-ШАРОВ	7
III РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Q-ШАРОВ ПО ЗАРЯДАМ	11
IV ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПОТЕНЦИАЛА	13
V СЛИЯНИЕ Q-ШАРОВ	15
VI АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ	18
VII ВЫВОД И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ	23
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	25

## ВВЕДЕНИЕ

Гравитационно-волновые сигналы от слияния массивных компактных объектов были предсказаны А.Эйнштейном с помощью Общей Теории Относительности задолго до их экспериментального обнаружения. С развитием гравитационно-волновой астрономии интерес к данному феномену только возрастал. Четырнадцатого сентября 2015 года в 9:50:45 по всемирному координатному времени с помощью LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) и VIRGO был задетектирован гравитационный сигнал, за что была вручена Нобелевская премия по физике. Гравитационный сигнал был порожден вращением и слиянием двух черных дыр, находящихся на расстоянии  $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$ , где  $z$  — красное смещение, с массами  $36^{+5}_{-4} M_{\odot}$  и  $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$ , где  $M_{\odot}$  — масса Солнца. Результатом слияния стала черная дыра с массой  $62^{+4}_{-4} M_{\odot}$ , а энергия, излученная гравитационными волнами была равна  $3^{+0.5}_{-0.5} M_{\odot}$ . Это событие стало первым экспериментальным подтверждением существования гравитационных волн и согласовывалось с предсказаниями Общей Теории Относительности с точностью 90% [1].

Из Общей Теории Относительности следует, что гравитационные волны могут излучаться в ходе слияния массивных компактных объектов. На роль таких объектов, как правило, претендуют нейтронные звезды или черные дыры. Тем не менее с получением все новых и новых сигналов, начали возникать и противоречивые данные.

Четырнадцатого августа 2019 года в 21:10:39 по всемирному координатному времени было задетектировано с помощью LIGO и VIRGO событие GW190814. GW190814 — гравитационно-волновой сигнал, полученный от слияния двух компактных объектов массой  $22.3 - 24.3 M_{\odot}$  и  $2.50 - 2.67 M_{\odot}$  соответственно. Это событие указывает на то, что меньший объект находится на границе масс между легкой черной дырой и массивной нейтронной звездой [2]. Примечательно, что от данного события не был получен электромагнитный сигнал. О природе второго объекта до сих пор идут споры. Если событие представляло собой слияние черной дыры и нейтронной звезды, то будут наложены сильные ограничения на радиус нейтронной звезды, в то время как в случае слияния двух черных дыр уравнение состояния нейтронной звезды будет удовлетворено. Однако существуют модели, которые предполагают, что малый объект — экзотический: гравастар, кварковая звезда или бозонная звезда [3].

Пятого января 2020 года в 16:24:26 по всемирному координатному времени и 15 января 2020 года в 4:23:10 по всемирному координатному времени с помощью LIGO и VIRGO были получены сигналы GW200105 и GW200115 соответственно. Событие GW200105 произошло в ходе вращения и слияния двойной системы, массы объектов в которой  $8.9^{+1.2}_{-1.5} M_{\odot}$  и  $1.9^{+0.3}_{-0.2} M_{\odot}$ , а событие GW200115 произошло в ходе вращения и слияния двойной системы, массы объектов в которой  $5.7^{+1.8}_{-2.1} M_{\odot}$  и  $1.5^{+0.7}_{-0.3} M_{\odot}$ . Массы меньших объектов сильно отличаются от массы второго компонента системы, от которой получен сигнал

GW190814. Более того, данные сигналы снова не сопровождались электромагнитным сигналом. Гипотетически, данные объекты могут быть звездами из темной материи [4].

Стоит заметить, что данные, получаемые LIGO и VIRGO достаточно точны, так как лежат в 90% доверительном интервале, а также LIGO и VIRGO различают объекты в первую очередь по их массам. Таким образом, возникает проблема объяснения некоторых событий, так как некоторые объекты в системах, порождающих гравитационно-волновые сигналы, лежат в «пропасти» значений для масс черных дыр или нарушают уравнение состояния нейтронных звезд. С другой стороны, в космологии до сих пор существует проблема темной материи, так как существует достаточное количество кандидатов, которые на сегодняшний день не нашли экспериментального подтверждения [5].

В данной работе предлагается рассмотреть возможное решение этих проблем. В качестве компонентов двойных систем будет рассматриваться модель Q-шаров темной материи. С одной стороны, с помощью данной модели можно попытаться объяснить необычные гравитационно-волновые сигналы, полученные LIGO и VIRGO, не изменяя при этом уравнения состояния нейтронных звезд. С другой стороны, Q-шары могут быть кандидатами на роль темной материи. Таким образом, в работе будут рассмотрены параметры Q-шаров, их масса и радиус, механизм формирования космологических Q-шаров, механизм увеличения их массы за счет взаимодействия с другими космологическими Q-шарами. Цель же работы — постараться дать ответ на основной вопрос: могут ли Q-шары в выбранной модели, о которой подробнее будет написано ниже, объяснить необычные гравитационно-волновые сигналы, полученные LIGO и VIRGO, и могут ли такие Q-шары существовать?

## I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Q-шар — нетопологический солитон. Существуют множество различных моделей, допускающих существование Q-шаров [6]. В данной работе будет рассмотрена одна из наиболее простых моделей Q-шаров — теория Фридберга-Ли-Сирлина, представленная лагранжианом (1) [7], [8]. В данной теории вводятся два скалярных поля, одно из которых действительное, а другое комплексное, а причиной существования и стабильности Q-шара является наличие у него заряда. В теории Фридберга-Ли-Сирлина предполагается, что частицы поля  $\chi$  приобретают массу в ходе взаимодействия с некоторым дополнительным скалярным полем  $\varphi$  [9],

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - U(\varphi) + (\partial_\mu\chi)^*\partial_\mu\chi - h^2\varphi^2\chi^*\chi, \\ U(\varphi) &= \lambda(\varphi^2 - v^2)^2,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\chi$  — комплексное скалярное поле, соответствующее частицам  $X$ ,  $h$ ,  $\lambda$ ,  $v$  — некоторые константы [7].

В работе предполагается, что стационарная плоская Вселенная равномерно заполнена частицами полей  $\varphi$  и  $\chi$ , и космологические Q-шары рождаются в результате фазового перехода I-го рода, который происходит из-за остывания Вселенной до некоторой температуры  $T_c$ . В ходе фазового перехода образуются пузырьки новой фазы ( $\varphi = \varphi_c$ ), которые, в свою очередь, сливаются. Таким образом, в некотором объеме остается один пузырек старой фазы ( $\varphi = 0$ ), который собирает в себя частицы поля  $\chi$  в предположении достаточной массивности частиц поля  $\chi$ , и который является будущим космологическим Q-шаром (см. рис. 1).

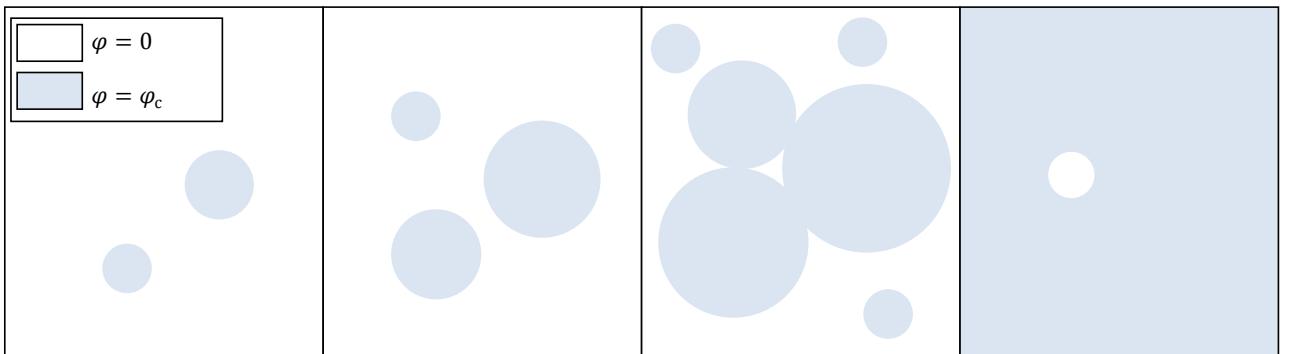


Рис. 1: Схематичное изображение фазового перехода I-го рода в ранней Вселенной. Белая область — область старой фазы ( $\varphi = 0$ ), голубая область — область новой фазы ( $\varphi = \varphi_c$ ) [9]. Как видно из рисунка, в некоторый момент времени в выделенном объеме останется одна область старой фазы, которая, для простоты, в рамках данной работы будет считаться сферической.

Данная модель не запрещает появление пузырьков новой фазы в оставшихся пузырях старой фазы, поэтому предполагается, что космологический Q-шар образуется тогда и только тогда, когда в пузырьке старой фазы не образуется пузырек новой фазы [10].

Таким образом, в качестве дипломной работы предлагается найти:

- радиус и массу Q-шара;
- распределение космологических Q-шаров по их зарядам;
- оценку параметра  $v$ ;
- оценку массы космологического Q-шара;
- оценку необходимого для существования Q-шара звездной массы количества космологических Q-шаров исходя из оценки массы космологического Q-шара;
- время, за которое космологический Q-шар становится Q-шаром звездной массы.

## II. ПАРАМЕТРЫ Q-ШАРОВ

В данном разделе представлен вывод основных параметров Q-шара: его радиуса и массы. Для этого рассмотрим теорию Фридберга-Ли-Сирлина, представленную лагранжианом (1). Так, массы полей  $\varphi$  и  $\chi$  в вакууме имеют вид,

$$m_\varphi = \lambda v, \quad (2)$$

$$m_\chi = hv. \quad (3)$$

Данная теория обладает  $U(1)$ -симметрией,

$$\chi \rightarrow e^{i\alpha} \chi \Leftrightarrow \mathcal{L} = \text{inv},$$

и, следовательно, существует сохраняющийся заряд  $Q$ . Состояние с наименьшей энергией с достаточно большим  $Q$  — сферический Q-шар с условиями,

$$\begin{cases} \varphi = 0, & x < R, \\ \varphi = v, & x > R, \end{cases}$$

где  $R$  — радиус Q-шара или, другими словами, потенциальной ямы, в которой находится поле  $\chi$ . В приближении достаточно большого  $Q$ , радиус  $R$  и энергия  $E$  Q-шара будут определяться балансом энергии безмассового поля  $\chi$ , находящегося в потенциальной яме, и потенциальной энергии массивного поля  $\varphi$  внутри. Тогда энергия принимает вид,

$$E(R) = \frac{\pi Q}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 U_0, \quad (4)$$

где

$$U_0 = U(0) - U(v) = \lambda v^4.$$

В действительности, в (4) еще должна быть поправка на переходную зону, где поле  $\varphi$  меняет свое значение с 0 на  $v$ , но она очень мала, и, как следствие, ей можно пренебречь.

Путем дифференцирования (4) по  $R$  и приравнивания производной к нулю, что является условием минимума энергии, получается выражение для радиуса Q-шара,

$$R_Q = \left( \frac{Q}{4U_0} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

Теперь, если подставить (5) в (4), можно получить выражение для массы Q-шара,

$$m_Q = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} U_0^{1/4} Q^{3/4}, \quad (6)$$

считая, что масса Q-шара соответствует минимальной энергии Q-шара [8], [9], [7].

Стоит заметить, что существует условие стабильности Q-шара, которое дает ограничение на минимальный заряд,

$$Q_{min} = \frac{m_Q}{m_\chi} \quad (7)$$

Далее найдем космологическое ограничение на заряд Q-шара сверху. Пусть темная материя представлена частицами поля  $\chi$ , причем существует асимметрия,

$$\frac{n_\chi - n_{\bar{\chi}}}{s} = \frac{n_Q Q}{s} = \eta_\chi, \quad (8)$$

где  $n_\chi$  — концентрация частиц поля  $\chi$ ,  $n_{\bar{\chi}}$  — концентрация античастиц поля  $\chi$ ,  $n_Q$  — концентрация Q-шаров во Вселенной,  $s$  — плотность энтропии, а  $\eta_\chi \leq 1$  — параметр, отвечающий за асимметрию частиц поля  $\chi$ . Данный параметр определяется динамикой на более ранних стадиях во взаимодействиях с другими полями, но в реалиях данной задачи будем считать его свободным.

Найдем скорость зарождения пузырьков. Пусть  $T_c$  — температура, при которой эффективный потенциал имеет два вырожденных минимума в  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_c$ , эта же температура соответствует фазовому переходу I-го рода в ранней Вселенной. При температурах, которые ниже этой, новая фаза  $\varphi = \varphi_c$  имеет более низкую плотность энергии [9],

$$V_{eff}(\varphi_c) - V_{eff}(0) = -\rho < 0. \quad (9)$$

Флуктуации температуры приводят к появлению пузырьков новой фазы. Запишем выражение для свободной энергии одного пузырька радиуса  $R$  в приближении тонких стенок,

$$F(R) = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho + 4\pi R^2 \Sigma, \quad (10)$$

где  $\Sigma$  — плотность свободной энергии поверхности. Экстремум (10) дает свободную энергию критического пузырька,

$$F_c = \frac{16\pi}{3} \frac{\Sigma^3}{\rho^2}. \quad (11)$$

Таким образом, скорость зарождения пузырьков дается следующим выражением [9],

$$\Gamma = \kappa T_c^4 e^{-\frac{F_c(T)}{T_c}}, \quad (12)$$

где  $\kappa$  — фактор порядка единицы. Пусть

$$\tau = \frac{T_c - T}{T_c}.$$

Тогда,

$$\Gamma = \kappa T_c^4 e^{-\frac{A}{\tau^2}}, \quad (13)$$

где  $A \sim 1$ .

Оценим объем, из которого частицы поля  $\chi$  собираются в один космологический Q-шар. Будем считать, что фазовый переход происходит достаточно быстро, поэтому пренебрежем космологическим расширением, и будем считать, что космологический Q-шар образуется до появления пузырька новой фазы в пузырьке старой.

Запишем выражение для доли объема старой фазы в момент времени  $t$  [11],

$$x(t) = \exp[-\Delta(t)], \quad (14)$$

где

$$\Delta(t) = \int_{t_c}^t V(t, t') \Gamma(t') dt', \quad (15)$$

$V(t, t') = \frac{4\pi}{3}[u(t' - t)]^3$  — объем в момент времени  $t$ , из которого рождается пузырек новой фазы в момент времени  $t'$ ,  $u$  — скорость стенок пузырька. Воспользуемся известными соотношениями,

$$H = \frac{T^2}{M_{Pl}^*},$$

$$M_{Pl} = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}},$$

здесь и далее  $g_* \sim 100$  — эффективное число степеней свободы при температуре фазового перехода. В предположении о быстром фазовом переходе ( $\tau \ll 1$ ) интеграл (15) насыщается на верхнем пределе и приблизительно равен,

$$\Delta \sim \kappa u^3 \left( \frac{M_{Pl}^*}{T_c} \right)^4 \frac{\tau^{12}}{A^4} e^{-\frac{A}{\tau^2}}. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим пузырьки новой фазы и оценим типичный размер пузырька в середине перехода. В момент времени  $t$  средний объем пузырька равен,

$$\frac{4\pi}{3} R^3(t) = N^{-1}(t) \int_{t_c}^t V(t, t') \Gamma(t') x(t') dt', \quad (17)$$

где  $N(t) = \int_{t_c}^t \Gamma(t') x(t') dt'$  — плотность числа пузырьков. Тогда, аналогично (15),

$$\frac{4\pi}{3} R_\star^3 = 2\pi \left( \frac{u \tau_\star^3 M_{Pl}^*}{T_c^2 A} \right)^3, \quad (18)$$

$$\tau_\star = A^{1/2} L^{-1/2},$$

где  $L \sim 100$ . Тогда искомый объем,

$$V_\star = \xi \left( \frac{u A^{1/2} M_{pl}^*}{T_c^2 L^{3/2}} \right)^3, \quad (19)$$

где  $\xi \sim 1$  — параметр, отвечающий за неточности.

Теперь найдем максимально возможный заряд космологического Q-шара  $Q_\star$  исходя из того, что плотность космологических Q-шаров после фазового перехода [9],

$$\frac{n_Q}{s} = \frac{45}{2\pi^2 g_*} \frac{1}{T_c^3 V_\star}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (8) с учетом (19), получаем максимально возможный заряд космологических Q-шаров,

$$Q_\star = \eta_\chi \xi \frac{2\pi^2 g_*}{45} \left( \frac{u A^{1/2} M_{pl}^*}{L^{3/2} T_c} \right)^3. \quad (21)$$

В дальнейшем для оценок будем считать, что фазовый переход происходит в ранней Вселенной, и его температура  $T_c$  довольно высокая. В таком случае, в будущих оценках будем полагать, что  $T_c \sim v$  [10].

Таким образом, заряд космологического Q-шара лежит в пределах,

$$Q_{min} < Q < Q_\star, \quad (22)$$

где  $Q_{min}$  определяется (7), а  $Q_\star$  (21).

### III. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Q-ШАРОВ ПО ЗАРЯДАМ

В предыдущем разделе негласно предполагалось, что все космологические Q-шары рождаются с зарядом  $Q_*$ . Теперь же найдем распределение таких Q-шаров по их зарядам с учетом (22). Для этого найдем вероятность рождения космологического Q-шара с зарядом больше некоторого  $\bar{Q}$ . Запишем вероятность появления пузырька новой фазы в пузырьке старой фазы объема  $V$ . Очевидно, данная вероятность будет пропорциональна объему рассматриваемой области и характерному времени схлопывания пузырька, так как чем больше время и объем, тем больше шанс образования в области пузырька новой фазы [12],

$$F_b = V\Gamma \frac{R}{u}. \quad (23)$$

Так как в работе предполагается, что космологический Q-шар рождается из пузырька старой фазы до того, как в нем появится пузырек новой, то можно привести следующую оценку,

$$V_*\Gamma \frac{R_*}{u} \sim 1. \quad (24)$$

Данная оценка имеет место быть, так как при достижении максимального объема рассматриваемой области старой фазы, вероятность появления в ней пузырька новой фазы стремится к единице.

Теперь найдем вероятность рождения Q-шара с зарядом больше  $\bar{Q}$ . Из определения вероятности,

$$F = 1 - F_b. \quad (25)$$

Это выражение можно поделить на (24),

$$F = 1 - \frac{V\Gamma R/u}{V_*\Gamma R_*/u}. \quad (26)$$

Будем считать, что частицы поля  $\chi$  распределены по Вселенной равномерно, тогда  $Q \sim V$ , и, следовательно, (26) примет вид,

$$F = 1 - \left( \frac{Q}{Q_*} \right)^{4/3} = \int \frac{dP}{dQ} dQ, \quad (27)$$

где  $dP/dQ$  — вероятность рождения Q-шара в интервале от  $Q$  до  $Q + dQ$ . Найдем эту вероятность. Для этого рассмотрим вероятность рождения Q-шара с зарядом больше  $\bar{Q}$  и с зарядом  $\bar{Q} + dQ$  и найдем их разность,

$$F(\bar{Q} + dQ) - F(\bar{Q}) = \int_{\bar{Q}+dQ}^{Q_*} \frac{dP}{dQ} dQ - \int_{\bar{Q}}^{Q_*} \frac{dP}{dQ} dQ.$$

Следовательно, распределение космологических Q-шаров по их зарядам примет вид,

$$\frac{dP}{dQ} = -\frac{F(\bar{Q} + dQ) - F(\bar{Q})}{dQ} = -\frac{dF}{dQ}. \quad (28)$$

Таким образом,

$$n(Q) \sim \alpha \int_{Q_{min}}^Q \frac{dP}{dQ} dQ, \quad (29)$$

где  $\alpha$  определяется из условия нормировки,

$$\alpha \int_{Q_{min}}^{Q_*} Q \frac{dP}{dQ} dQ = Q_*,$$

и равна  $7/4$ . Здесь и далее считается, что  $Q_{min} \ll Q_*$ . Теперь получаем окончательное выражение для распределения (29),

$$n(Q) \sim \frac{7}{4} \left( \frac{Q}{Q_*} \right)^{4/3}. \quad (30)$$

#### IV. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ПОТЕНЦИАЛА

В данном разделе будет оценен параметр лагранжиана (1)  $v$ . Как уже обсуждалось выше, Q-шары представляют собой темную материю, и поэтому необходимо удовлетворить некоторым условиям.

Во-первых, среднее сечение взаимодействия скоплений темной материи не должно превышать  $1 \text{ см}^2/\text{г}$  [12],

$$\langle\bar{\sigma}\rangle_b = \bar{\sigma}_* \int_0^1 \frac{x^{-1/4}x^{3/4}(1-x)}{x^{3/4}(1-x)} dx \approx 1.3\bar{\sigma}_* \lesssim 1 \text{ см}^2/\text{г}, \quad (31)$$

где  $x = Q/Q_*$ ,  $\bar{\sigma}_* = \bar{\sigma}(Q_*)$ . Найдем приведенное сечение  $\bar{\sigma}(Q)$ ,

$$\bar{\sigma}(Q) = \frac{\pi R_Q^2}{m_Q} = \frac{3}{8\sqrt{2}} v^{-3} Q^{-1/4}, \quad (32)$$

здесь введены новые обозначения,

$$U_0 = v^4,$$

$$m_\chi = kv,$$

$$k = h/\lambda^{1/4}.$$

Тогда из (31) с учетом (21) и (32) получаем нижний предел для  $v$ ,

$$v_{min} \gtrsim \frac{1.07 \cdot 10^{-7} u^{2/3}}{\eta_\chi^{1/9}} \text{ ГэВ}. \quad (33)$$

Во-вторых, современная плотность энергии Q-шаров не должна превышать современную плотность темной материи. Найдем плотность энергии Q-шаров с помощью (6) и (30),

$$\rho = \int_0^{Q_*} m_Q dn(Q) \sim Q^{25/12}. \quad (34)$$

Данная функция имеет максимум на верхнем пределе интегрирования  $Q_*$ , поэтому для грубой оценки будем считать, что в темной материи доминируют космологические Q-шары с данным зарядом.

С другой стороны существует связь плотности энергии Q-шаров с сечением, приведенная в [12]. С помощью данного соотношения можно найти верхнее ограничение на  $v$ ,

$$\rho_{DM} \gtrsim \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} v \cdot Q_*^{-1/4} \eta_\chi s_0, \quad (35)$$

где  $\rho_{DM} = 10^{-6}$  ГэВ/см<sup>3</sup> — современная плотность темной материи,  $s_0 = 3 \cdot 10^3$  см<sup>-3</sup> — современная плотность энтропии. Таким образом, верхнее ограничение на  $v$  принимает вид,

$$v_{max} \lesssim \frac{5.57 \cdot u^{3/7}}{\eta_\chi^{3/7}} \text{ ГэВ.} \quad (36)$$

График зависимости максимального и минимального значений  $v$  от асимметрии представлен на рисунке 2. В некоторых работах [9], [10] предлагается оцени-

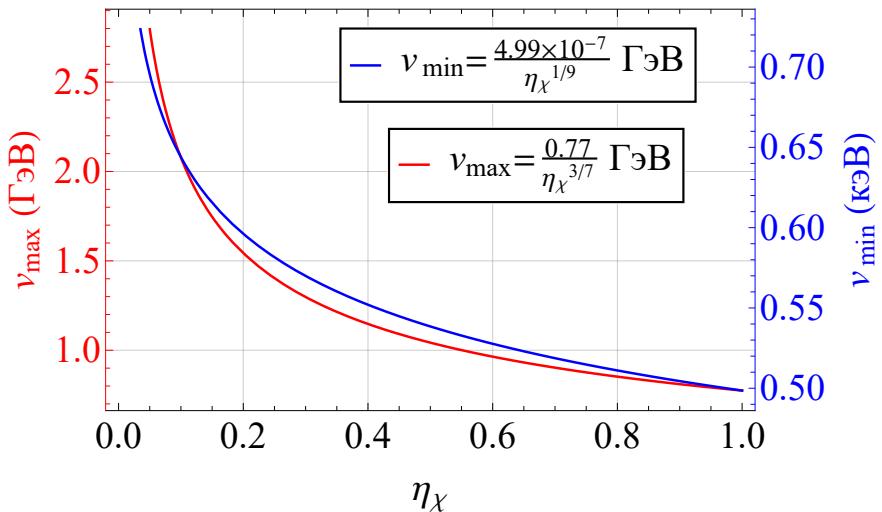


Рис. 2: График зависимости космологических ограничений на параметр  $v$  лагранжиана (1) от величины асимметрии частиц поля  $\chi$   $\eta_\chi$  в случае скорости космологических Q-шаров  $u = 0.01$ .  $v_{min}$  — нижнее ограничение и представлено в кэВ (синяя кривая),  $v_{max}$  — верхнее ограничение и представлено в ГэВ (красная линия). Стоит заметить, что функции  $v_{min}(\eta_\chi)$  и  $v_{max}(\eta_\chi)$  претерпевают резкий рост в окрестности нуля.

вать асимметрию частиц поля  $\chi$  как кварковую асимметрию  $3\Delta_B \approx 2.7 \cdot 10^{-10}$ , а скорость космологических Q-шаров как  $u \sim 0.01$ . В случае такой оценки  $v$  принимает значения,

$$5.70 \text{ кэВ} \lesssim v \lesssim 9.33 \text{ ТэВ.} \quad (37)$$

Теперь, соответственно, в рамках данной оценки можно найти ограничения на массу космологических Q-шаров,

$$1.22 \cdot 10^{-5} \text{ г} \lesssim m_* \lesssim 4.03 \cdot 10^3 \text{ кг.} \quad (38)$$

## V. СЛИЯНИЕ Q-ШАРОВ

Из (38) следует, что космологические Q-шары не могут претендовать на роль экзотических объектов звездной массы, поэтому рассмотрим их взаимодействие.

Пусть только один выделенный космологический Q-шар взаимодействуют с остальными, и пусть вероятность слияния будет 0.5 (соответственно, с вероятностью 0.5 Q-шары будут упруго рассеиваться друг на друге) [13], [14].

Пусть за время  $t$  выделенный космологический Q-шар поглощает заряд,

$$Q(t) = (1 + N_*(t))Q_*, \quad (39)$$

где  $N_*(t)$  — количество поглощенных космологических Q-шаров в момент времени  $t$ . Заметим, что  $N_*(t)$  должно удовлетворять следующим условиям,

$$\begin{cases} N_*(0) = 0, \\ N_*(t_0) = N_0, \end{cases} \quad (40)$$

где  $t_0$  — время, за которое выделенный космологический Q-шар приобретает массу порядка нескольких масс Солнца, а  $N_0$  — количество поглощенных космологических Q-шаров в момент времени  $t_0$ .

Найдем массу и радиус Q-шара в момент времени  $t$  из (6) и (5) с учетом (39),

$$m_Q(t) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}v((1 + N_*(t)) \cdot Q_*)^{3/4}, \quad (41)$$

$$R_Q(t) = \left( \frac{(1 + N_*(t)) \cdot Q_*}{4} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{v}. \quad (42)$$

Найдем из (41) и (40) необходимое количество космологических Q-шаров с зарядом (21) для образования Q-шара с массой порядка  $\mu \gtrsim 1$  масс Солнца.

$$M_Q = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}v(1 + N_0Q_*)^{3/4} \sim \mu M_\odot,$$

$$N_0 \approx \frac{0.21 \cdot L^{9/2}(\mu M_\odot)^{4/3}v^{5/3}}{A^{3/2}\eta_\chi g_* M_{pl}^* u^3 \xi} \approx \frac{2.13 \cdot 10^6 (\mu M_\odot)^{4/3} v^{5/3}}{\eta_\chi M_{pl}^* u^3}. \quad (43)$$

Теперь рассмотрим область объема  $V_0$ , которая содержит в себе  $2N_0 + 1$  космологических Q-шара, считая Вселенную плоской и нерасширяющейся. Пусть выделенный космологический Q-шар поглотит за время  $\Delta t$  заряд  $\Delta Q$ . Очевидно, что чем больше концентрация  $n$  космологических Q-шаров в заданной области и чем больше геометрическое сечение взаимодействия  $\sigma$ , тем больший заряд поглотит выделенный Q-шар,

$$\Delta Q = \Delta t \sigma n u, \quad (44)$$

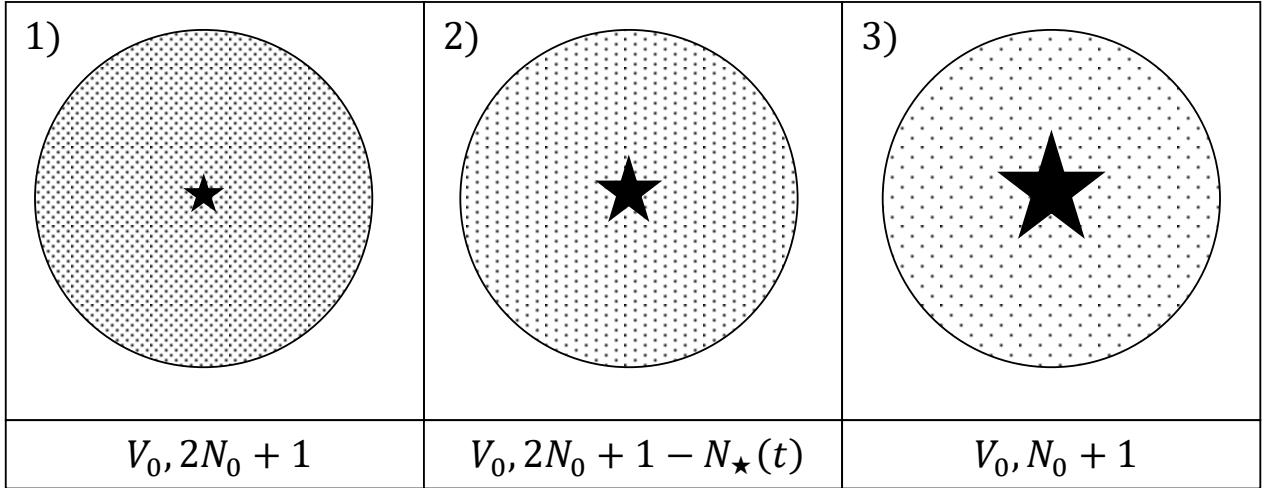


Рис. 3: Схема эволюции области  $V_0$ . Звезда — выделенный космологический Q-шар, точки — остальные космологические Q-шары. Первый этап — момент времени сразу же после фазового перехода. Второй этап — момент времени  $t$ , выделенный космологический Q-шар начинает приобретать большую массу за счет поглощения окружающих космологических Q-шаров. Третий этап — выделенный космологический Q-шар приобретает массу порядка  $\mu M_\odot$ .

где  $u$  — скорость космологического Q-шара, равная скорости стенок при схлопывании, и

$$\sigma = \frac{\pi R_Q^2(t)}{2}, \quad (45)$$

с учетом вероятности абсолютно неупругого взаимодействия 0.5.

Найдем концентрацию космологических Q-шаров в момент времени  $t$  в заданной области,

$$n(t) = \frac{2N_0 + 1 - N_\star(t)}{V_0}. \quad (46)$$

Объем  $V_0$  можно выразить через объем  $V_\star$ ,

$$V_0 \approx (2N_0 + 1)V_\star.$$

Тогда (46) примет вид,

$$n(t) = \frac{2N_0 + 1 - N_\star(t)}{(2N_0 + 1)V_\star}. \quad (47)$$

Объединим (32), (42), (44) и (47) и сделаем предельный переход

$$\Delta Q \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Таким образом, получаем задачу Коши,

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dot{N}_\star Q_\star = \frac{\pi u}{2v^2} \left( \frac{(1+N_\star)Q_\star}{4} \right)^{1/2} \cdot \frac{2N_0 + 1 - N_\star}{(2N_0 + 1)V_\star}, \\ t > 0, \\ N_\star(0) = 0. \end{cases} \quad (48)$$

Данное уравнение решается в квадратурах,

$$\zeta \frac{2 \tanh^{-1} \left( \frac{\sqrt{N_\star + 1}}{\sqrt{\theta + 1}} \right)}{\sqrt{\theta + 1}} = t + const, \quad (49)$$

$$\zeta = \frac{4u\theta v^2 V_\star Q_\star^{1/2}}{\pi},$$

$$\theta = 2N_0 + 1.$$

Подставим (19), (21) и (43),

$$\zeta \approx \frac{0.84 A^{3/2} u (\eta_\chi M_{pl}^{*3} u^3 + 4.25 \cdot 10^6 (\mu M_\odot)^{4/3} v^{5/3}) \xi \sqrt{\frac{A^{3/2} \eta_\chi g_* M_{pl}^{*3} u^3 \xi}{L^{9/2} v^3}}}{L^{9/2} v^4} \approx$$

$$\approx \frac{2.67 \cdot 10^{-13} \cdot u \sqrt{\frac{\eta_\chi M_{pl}^{*3} u^3}{v^3}} (\eta_\chi M_{pl}^{*3} u^3 + 4.25 \cdot 10^6 (\mu M_\odot)^{4/3} v^{5/3})}{v^4}, \quad (50)$$

$$\theta \approx \frac{4.26 \cdot 10^6 (\mu M_\odot)^{4/3} v^{5/3}}{\eta_\chi M_{pl}^{*3} u^3} + 1. \quad (51)$$

Решение (48) принимает вид,

$$N_\star(t) = -1 + (\theta + 1) \cdot \left[ \tanh \left( \frac{\sqrt{\theta + 1} \cdot const + \sqrt{\theta + 1} \cdot t}{2\zeta} \right) \right]^2. \quad (52)$$

Найдем *const* из начального условия (48),

$$0 = -1 + (\theta + 1) \cdot \left[ \tanh \left( \frac{\sqrt{\theta + 1} \cdot const}{2\zeta} \right) \right]^2 \Rightarrow$$

$$const = \pm \frac{2\zeta \tanh^{-1} \left( \sqrt{\frac{1}{1+\theta}} \right)}{\sqrt{1+\theta}}, \quad (53)$$

где  $\zeta$  и  $\theta$  определяются (50) и (51). Знак (53) определяет условие  $N_\star(t) > 0$  для любых  $t$ , поэтому дальше будем использовать значение с плюсом. Таким образом, окончательное решение (48) принимает вид (52) с (53) взятой с плюсом.

## VI. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Проанализируем решение (52). Заметим, что  $N_*$  на самом деле является функцией многих параметров,

$$N_* = N_*(v, u, \eta_\chi, \mu, t).$$

Так как  $v$  ограничена (33) и (36), то можно задать следующую область параметров,

$$N_*(v_{min}, u, \eta_\chi, t) \lesssim N_*(v, u, \eta_\chi, t) \lesssim N_*(v_{max}, u, \eta_\chi, t), \quad (54)$$

здесь и далее для определенности  $\mu = 10$ , что соответствует конечной массе Q-шара 10 масс Солнца. Параметры  $u$ ,  $\eta_\chi$  и  $t$  ограничены,

$$\begin{cases} 0 \lesssim u \lesssim 1, \\ 0 \lesssim \eta_\chi \lesssim 1, \\ 0 \lesssim t \lesssim 14 \text{ млрд. лет.} \end{cases} \quad (55)$$

Из модельных предположений следует, что максимально возможная масса Q-шара соответствует верхнему ограничению для  $t$ . Тогда рассмотрим, как ведут себя границы области (54) в зависимости от  $u$  и  $\eta_\chi$  при  $t = 14$  млрд. лет. Как видно из рисунка 4 нижняя граница  $N_*(v_{min}, u, \eta_\chi, t)$  почти не меняется. Так как  $N_*$  — целое число, то можно сказать, что на масштабе времени жизни Вселенной нижняя граница области (54) равна нулю, что соответствует отсутствию слияния космологических Q-шаров в рамках выбранной модели на масштабе времени жизни Вселенной. Таким образом,  $N_*(v, u, \eta_\chi)$  как функция трех свободных параметров лежит внутри области, изображенной на рисунке 5. Из (41) следует, что  $m_Q(t)$  так же является функцией многих параметров,

$$m_Q(t) = m_Q(v, u, \eta_\chi, t),$$

и, более того, область ее значений лежит в области, пропорциональной  $N_*$ . Из (41) и рисунка 5 следует, что Q-шар становится наиболее массивным, когда  $\eta_\chi$  или  $u$  стремятся к нулю. В первом приближении эти параметры фиксированы только (55). Для дальнейших оценок зафиксируем параметр  $u = 0.03$  [9]. Таким образом,  $m_Q$  становится функцией только двух свободных параметров  $v$  и  $\eta_\chi$ . Потребуем, чтобы максимально возможная масса достигалась за время порядка времени жизни Вселенной. Данное требование соответствует  $\eta_\chi \approx 0.5 \cdot 10^{-14}$ . Тогда аналогично рассуждениям об области значений  $N_*$  с учетом (36), (41) и рисунка 6 можно получить верхнюю оценку на массу Q-шара.

$$M_Q^{max} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} v_{max} (1 + N(t_{un})Q_*)^{3/4} \sim 15.7 M_\odot, \quad (56)$$

где  $t_{un} \approx 14$  млрд. лет — время жизни Вселенной.

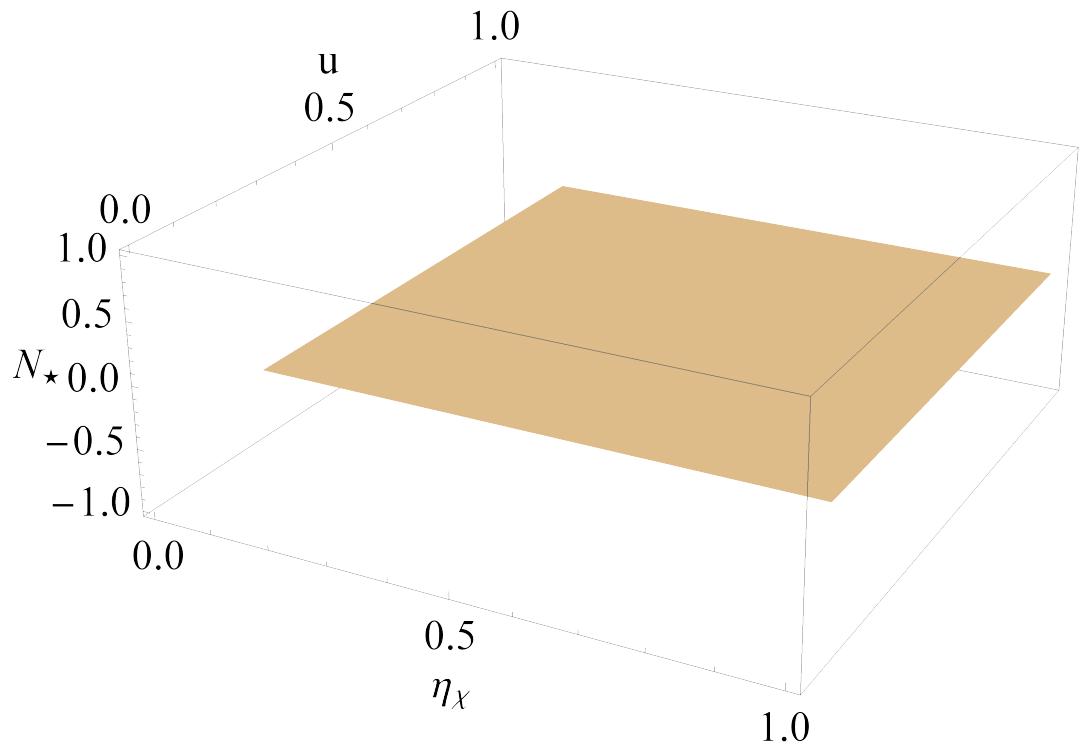


Рис. 4: Современное значение  $N_*(v_{\min})$  как функции свободных параметров асимметрии и скорости космологических Q-шаров.

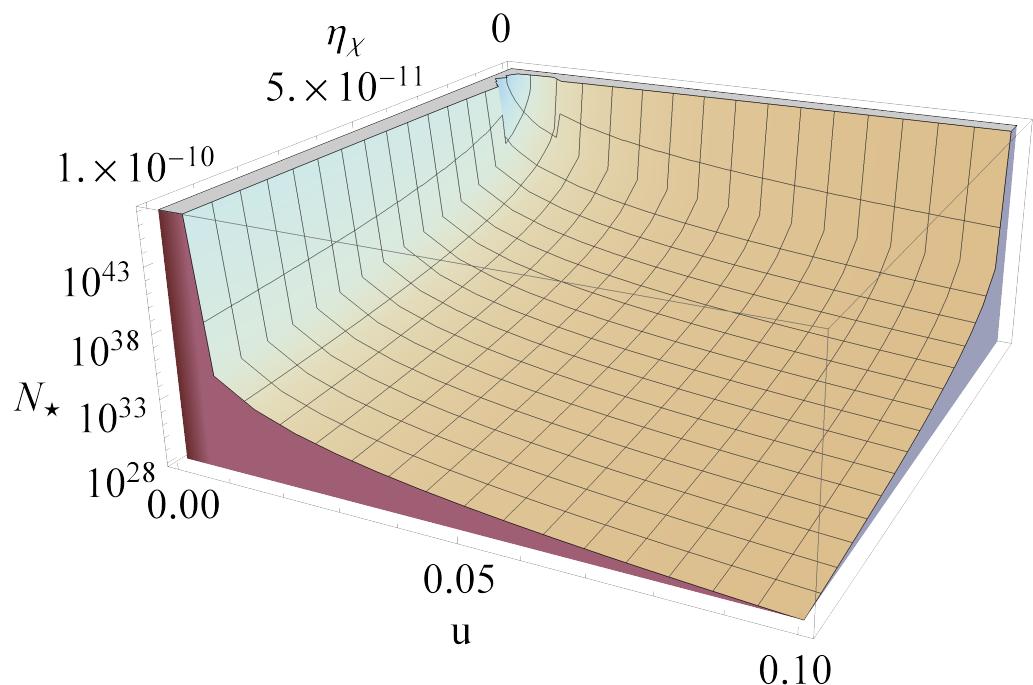


Рис. 5: Современное значение  $N_*(v_{\max})$  как функции свободных параметров асимметрии и скорости космологических Q-шаров. Закрашенная область под графиком соответствует интервалу (54).

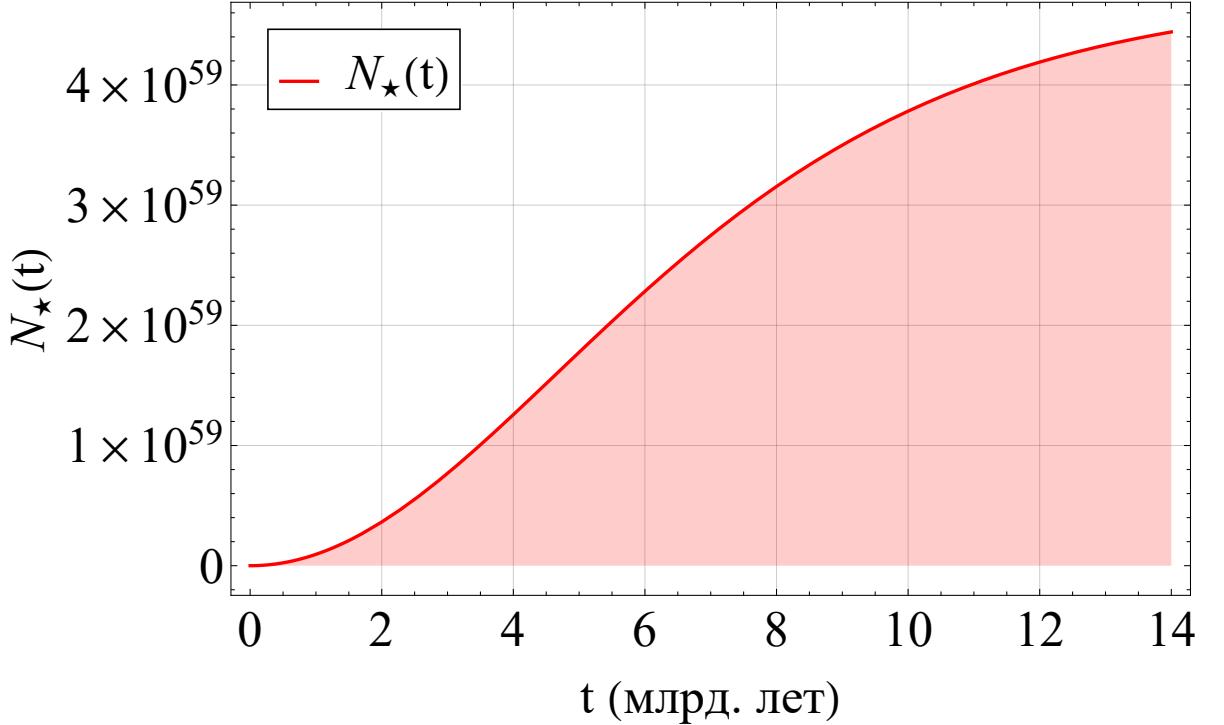


Рис. 6:  $N_*(t)$  на масштабе времени жизни Вселенной в случае конфигурации свободных параметров  $\eta_\chi \approx 0.5 \cdot 10^{-14}$  и  $u = 0.03$ . В таком режиме выделенный космологический Q-шар приобретает массу порядка 10 масс Солнца. Красная линия обозначает верхнюю границу данной функции  $N_*(v_{max})$ , а красная область под ней — область значений  $N_*(v)$  при выбранной фиксации свободных параметров.

Не смотря на то, что результат (56) способен объяснить некоторые наблюдения LIGO/VIRGO, это еще не означает возможность существования таких Q-шаров. Одним из важных условий существования Q-шаров звездной массы является наличие у них радиуса, который больше радиуса Шварцшильда. В противном случае, такие Q-шары сколлапсируют в черные дыры. Исходя из (5) и (56) найдем радиус Q-шара, соответствующий верхнему ограничению его массы.

$$R_Q^{max} = \left( \frac{(1 + N_*(v_{max}, t_{un})) \cdot Q_*}{4} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{v_{max}} \sim 1 \cdot 10^{-9} \text{ км.} \quad (57)$$

Подчеркнем, что данное выражение не является оценкой сверху на радиус Q-шара, а просто соответствует  $v_{max}$ . С другой стороны, радиус Шварцшильда для объекта с массой (56),

$$R_{BH}^{max} = 3 \text{ км} \cdot \frac{M_Q^{max}}{M_\odot} \sim 47.1 \text{ км.} \quad (58)$$

Из сравнения численных значений (57) и (58) следует, что Q-шар с такими свободными параметрами  $u$  и  $\eta_\chi$  не может существовать. В таком случае, найдем

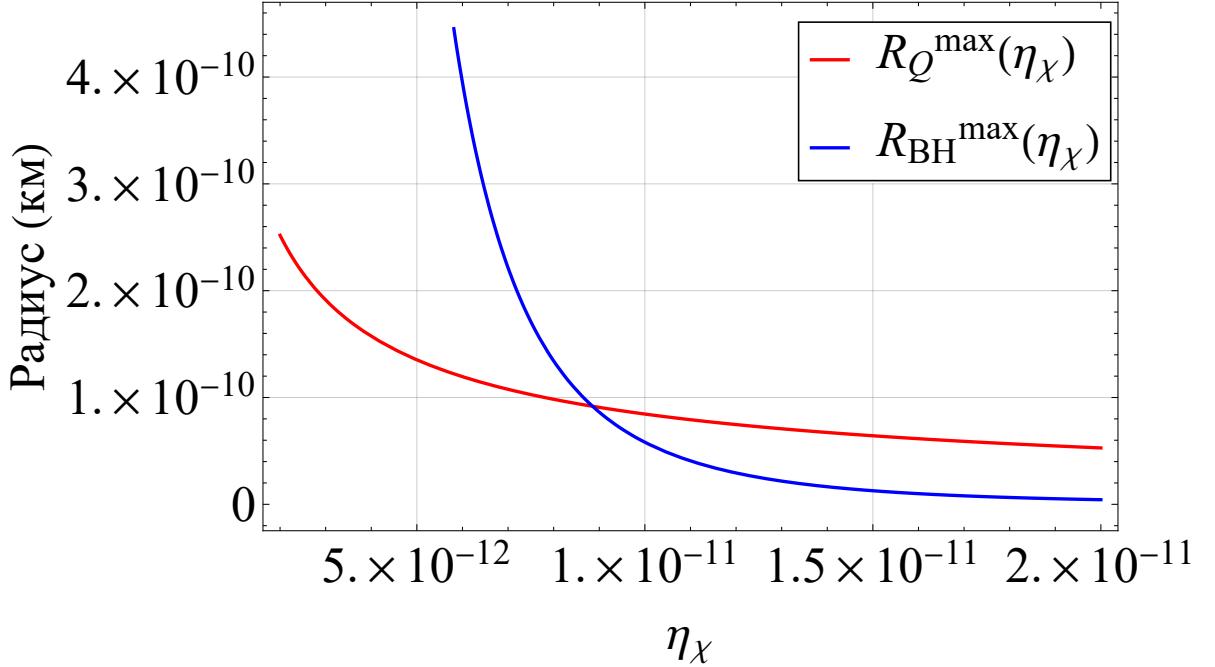


Рис. 7: Зависимость радиуса современного Q-шара и его радиуса Шварцшильда от свободного параметра асимметрии в случае  $u = 0.03$ . Красная линия — радиус современного Q-шара, соответствующий  $v_{max}$ . Синяя линия — соответствующий  $v_{max}$  радиус Шварцшильда.

критическое значение  $\eta_\chi$  при фиксированном  $u$  из условия,

$$R_{BH}^{max} \leq R_Q^{max}|_{u=0.03, N_*(t_{un}) \approx \theta(v_{max})}. \quad (59)$$

Данное условие выполняется при условии  $\eta_\chi \gtrsim 0.9 \cdot 10^{-11}$  (см. рис. 7). Зависимость  $N_*(t)$  для данного значения асимметрии продемонстрирована на рисунках 8 и 9. Масса и радиус такого Q-шара на сегодняшний день в соответствии с (56) и (57),

$$M_Q^{max} \approx 5.75 \cdot 10^{19} \text{ кг} \approx 0.005 M_{\oplus}, \quad (60)$$

$$R_Q^{max} \approx 9 \cdot 10^{-11} \text{ км}, \quad (61)$$

где  $M_{\oplus}$  — масса Плутона. Радиус Шварцшильда же для такой конфигурации параметров в соответствии с (58),

$$R_{BH}^{max} \approx 8.62 \cdot 10^{-11} \text{ км}. \quad (62)$$

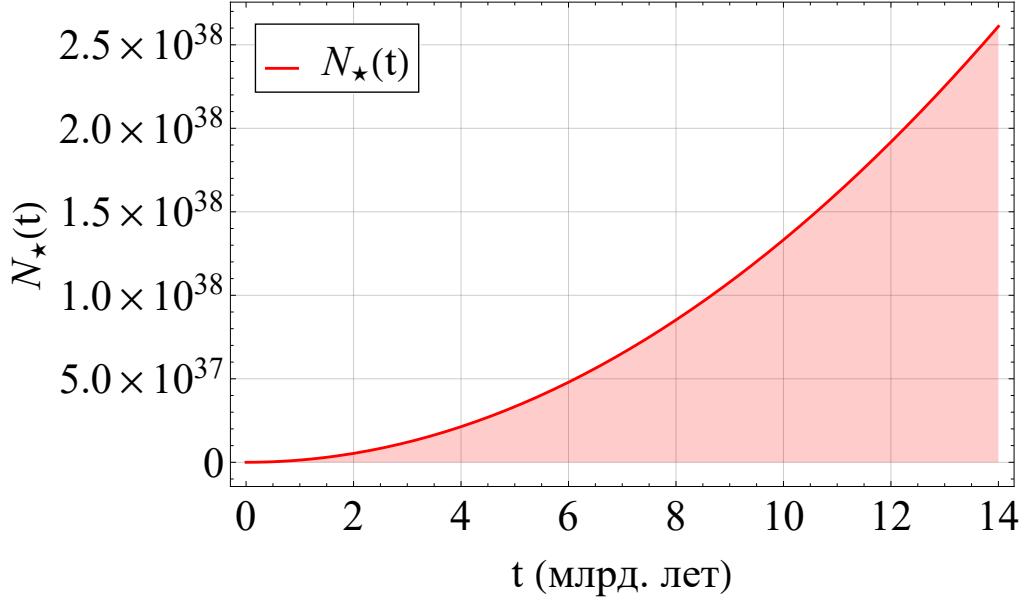


Рис. 8:  $N_*(t)$  на масштабе времени жизни Вселенной в случае конфигурации свободных параметров  $\eta_\chi \approx 0.9 \cdot 10^{-11}$  и  $u = 0.03$ . Красная линия обозначает верхнюю границу данной функции  $N_*(v_{max})$ , а красная область под ней — область значений  $N_*(v)$  при выбранной фиксации свободных параметров.

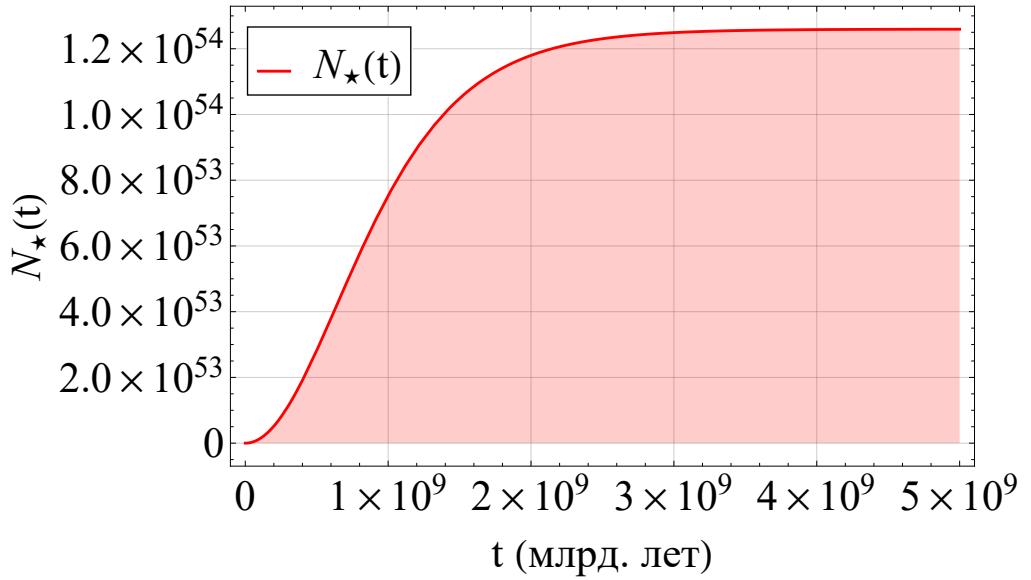


Рис. 9:  $N_*(t)$  на масштабе много большем времени жизни Вселенной в случае конфигурации свободных параметров  $\eta_\chi \approx 0.9 \cdot 10^{-11}$  и  $u = 0.03$ . Красная линия обозначает верхнюю границу данной функции  $N_*(v_{max})$ , а красная область под ней — область значений  $N_*(v)$  при выбранной фиксации свободных параметров. Данный график наглядно демонстрирует выход решения на константу, что обусловлено слиянием всех космологических Q-шаров с выделенным.

## VII. ВЫВОД И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основной идеей работы являлась попытка объяснить необычные сигналы, полученные коллаборацией LIGO/VIRGO. В качестве кандидатов на роль компактных объектов звездной массы были предложены Q-шары темной материи.

В ходе работы была подробно рассмотрена одна из возможных моделей Q-шаров — теория Фридберга-Ли-Сирлина, представленная лагранжианом (1). В рамках данной теории были получены выражения для массы и радиуса Q-шара (6) и (5). Был представлен механизм образования космологических Q-шаров темной материи в ходе фазового перехода I-го рода, который связан с остыанием ранней Вселенной, и который соответствует резкому изменению действительного поля в лагранжиане (1). В рамках такого механизма образования космологических Q-шаров было подробно показано получение выражения для заряда космологических Q-шаров (21). В работе было подробно обсуждено получение распределения космологических Q-шаров по их зарядам (29), а итогом этого обсуждения стало уточнение результата, приведенного в статье [12].

Ввиду того, что космологические Q-шары в соответствии с (38) не могут претендовать на роль компактных объектов звездной массы, автором была предложена наивная модель их взаимодействия. Модель предполагает, что в плоской нерасширяющейся Вселенной можно выделить космологический Q-шар, который в ходе абсолютно неупругого взаимодействия с другими космологическими Q-шарами увеличивает свою массу. В рамках данной модели было получено уравнение (48), которое описывает количество поглощенных космологических Q-шаров выделенным Q-шаром и получено его решение (52) в виде функции от времени и нескольких свободных параметров: параметра лагранжиана (1)  $v$ , асимметрии частиц комплексного поля  $\eta_\chi$ , скорости космологических Q-шаров после фазового перехода  $u$  и ожидаемой массы итогового Q-шара  $\mu$ . Поведение решения в зависимости от свободных параметров в современный момент времени продемонстрировано на рисунке 5. Верификацией же решения являются рисунки 6 и 9. На данных графиках видно, что при достаточно большом времени, которое, как правило, на несколько порядков больше времени жизни Вселенной, решение приближается к некоторой константе, которая, в действительности, равна удвоенному количеству космологических Q-шаров. Это означает, что по прошествию достаточно большого времени выделенный Q-шар поглотит все оставшиеся космологические Q-шары в рассматриваемом объеме, и согласуется с модельным предположением о вероятности абсолютно неупругого взаимодействия в 50%.

В работе была учтена проблема коллапса подходящих современных Q-шаров в черные дыры. В работе приведен радиус современного Q-шара (42) и его сравнение с радиусом Шварцшильда в случае максимального значения параметра  $v$  (57), (58). Данное сравнение представлено на рисунке 7. Исходя из этого были получены значение асимметрии при фиксированной скорости космологических Q-шаров и соответствующее ей и максимальному значению параметра  $v$

значение массы (60) и радиуса (62). Таким образом, удалось достичь при фиксированной скорости космологических Q-шаров максимальной массы современного Q-шара на несколько порядков меньше ожидаемой (60), что, к сожалению, не может объяснить результаты LIGO и VIRGO. Тем не менее, вопрос существования подходящего современного Q-шара требует более детального рассмотрения. Так, например, еще предстоит ответить на вопрос о существовании подходящей конфигурации свободных параметров без строгой фиксации одного из них. Также предстоит решить проблему слишком малой скорости увеличения массы выделенного космологического Q-шара. Например, в случае значения параметра  $v$  близкого к минимальному выделенный космологический Q-шар не успевает взаимодействовать с другими космологическими Q-шарами за время жизни Вселенной и приобретает необходимую массу на значительно больших временах. В частности, из-за этого зависимость нижней границы решения (48) от свободных параметров, продемонстрированная на рисунке (4), близка к плоской. Автор усматривает возможное решение данной проблемы в учете иерархического взаимодействия космологических Q-шаров, когда вместо поглощения выделенным космологическим Q-шаром окружающих его других космологических Q-шаров будет учитываться взаимодействие всех космологических Q-шаров в выделенной области. Предполагается, что данный механизм значительно ускорит увеличение массы итогового Q-шара.

Основными результатами работы являются:

- уточнение приведенного в статье [12] распределения космологических Q-шаров по их зарядам;
- космологическое ограничение на параметр  $v$  лагранжиана (1) как функции свободных параметров асимметрии и скорости космологических Q-шаров (33) и (36);
- разработка наивной модели взаимодействия космологических Q-шаров, которая, тем не менее, легко поддается модификации, и анализ ее применения к реалиям задачи.

В качестве дальнейшей научной работы автор предполагает уточнить модель взаимодействия космологических Q-шаров путем добавления в нее иерархического взаимодействия космологических Q-шаров в выделенном объеме и учета эволюции Вселенной. После уточнения модели предполагается детально рассмотреть область параметров и узнать, могут ли Q-шары темной материи объяснить необычные сигналы, полученные коллаборацией LIGO/VIRGO.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott [и др.] // Physical Review Letters. 2016. feb. T. 116, № 6.
- [2] Constraining exotic compact stars composed of bosonic and fermionic dark matter with gravitational wave events / Stephan Wystub, Yannick Dengler, Jan-Erik Christian [и др.]. 2021. 10.
- [3] R. Abbott et al. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object // The Astrophysical Journal Letters. 2020. jun. T. 896, № 2. C. L44.
- [4] R. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from Two Neutron Star–Black Hole Coalescences // The Astrophysical Journal Letters. 2021. jun. T. 915, № 1. C. L5.
- [5] Bertone Gianfranco, Tait M. P. Tim. A new era in the search for dark matter // Nature. 2018. T. 562, № 7725. C. 51–56.
- [6] Tsumagari Mitsuo I. The Physics of Q-balls. 2009.
- [7] Friedberg R., Lee T. D., Sirlin A. Class of scalar-field soliton solutions in three space dimensions // Phys. Rev. D. 1976. May. T. 13. C. 2739–2761.
- [8] Рубаков, В.А. Классические калибровочные поля. УРСС, 1999.
- [9] Krylov E., Levin A., Rubakov V. Cosmological phase transition, baryon asymmetry and dark matter Q-balls // Phys. Rev. D. 2013. T. 87, № 8. C. 083528.
- [10] Rubakov V.A., Gorbunov D.S. Introduction To The Theory Of The Early Universe: Hot Big Bang Theory. World Scientific Publishing Company, 2011.
- [11] Guth Alan H., Weinberg Erick J. Cosmological consequences of a first-order phase transition in the  $SU_5$  grand unified model // Phys. Rev. D. 1981. Feb. T. 23. C. 876–885.
- [12] Troitsky Sergey. Supermassive dark-matter Q-balls in galactic centers? // JCAP. 2016. T. 11. C. 027.
- [13] Multamaki Tuomas, Vilja Iiro. Q ball collisions in the MSSM: Gauge mediated supersymmetry breaking // Phys. Lett. B. 2000. T. 484. C. 283–288.
- [14] Multamaki Tuomas, Vilja Iiro. Q Ball collisions in the MSSM: Gravity mediated supersymmetry breaking // Phys. Lett. B. 2000. T. 482. C. 161–166.