Джинсовская неустойчивость конденсата в теории векторного комплексного поля

Выполнил студент:
Совит К. М.

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук Нугаев Э. Я.

16 мая 2022

Введение

Конденсатом будем называть решение в теории поля, не зависящее от пространственных координат.

Вопрос о классической устойчивости конденсатных решений актуален для вопроса о существовании нетопологических солитонов в теории.

Целью работы было найти конденсатные решения и провести анализ линейной устойчивости в зависимости от параметров теории. В случае неустойчивости необходимо было найти выражения для джинсовских длин волн конденсата.

В данной работе рассматривались теории поля с потенциалами 4-го порядка и $U(1)$ симметрией.

Скалярный нерелятивистский конденсат

Лагранжиан поля:

$$\mathcal{L} = i\dot{\psi}\psi^* - \frac{|\nabla\psi|^2}{2m} - V(\psi\psi^*),$$

где $V(\psi\psi^*) = \frac{\lambda}{2}(\psi\psi^*)^2$.

Уравнение поля (после варьирования по ψ^*):

$$-\frac{\Delta\psi}{2m} + \lambda\psi^2\psi^* = i\dot{\psi}.$$

Конденсатное решение:

$$\psi_0 = \rho_\omega e^{i\omega t},$$

где $\omega = -\lambda|\rho_\omega|^2$.
Таким образом, в отличие от случая квадратичного потенциала, возникает нетривильный закон дисперсии.

Проверка на линейную устойчивость:

$\psi_0 \longrightarrow \psi_0 + \varphi$, $|\varphi| \ll |\psi_0|$.

Такие возмущения имеют вид:

$$\varphi = \{Ae^{i(kx+\gamma t)} + Be^{-i(kx+\gamma^* t)}\}e^{i\omega t},$$

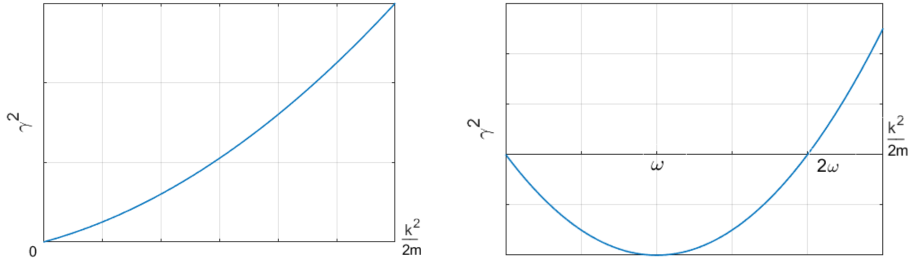
Если γ имеет ненулевую мнимую часть – возмущения изменяются экспоненциально, а если γ вещественное – осциллируют.

γ и k связаны дисперсионным соотношением:

$$\gamma^2 = (\frac{k^2}{2m} - \omega)^2 - \omega^2$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{k^2}{2m} - \omega\right)^2 - \omega^2, \quad \omega = -\lambda|\rho_\omega|^2 \text{ – знак } \omega \text{ определяется } \lambda.$$

Рис.: Вид зависимости $\gamma^2(k^2)$



$\lambda > 0$ – устойчивость

$\lambda < 0$ – неустойчивость

$$\lambda_J = \frac{\pi}{\sqrt{\omega m}} = \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda|\rho_\omega|^2 m}}$$

Скалярный релятивистский конденсат

Лагранжиан релятивистского поля:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi \Phi^* - V(\Phi\Phi^*),$$

где $V(\Phi\Phi^*) = \dfrac{\lambda_r}{2}(\Phi\Phi^*)^2$.

Конденсатное решение:

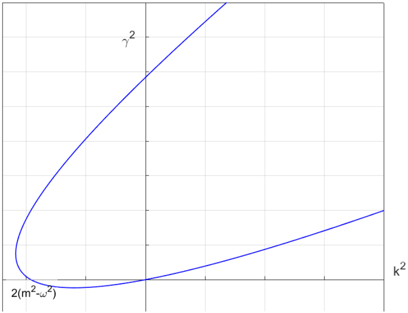
$$\Phi_0 = \rho_\omega e^{i\omega t},$$

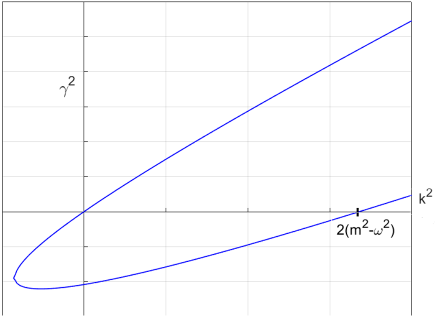
где $\omega^2 = m^2 + \lambda|\rho_\omega|^2$.

Возмущения, ответственные за неустойчивость: $\varphi \propto e^{i(kx+\gamma t)}$

$$(k^2 - \gamma^2)^2 + 2(\omega^2 - m^2)k^2 - 2(3\omega^2 - m^2)\gamma^2 = 0.$$

Рис.: Вид зависимости $\gamma^2(k^2)$





$\lambda > 0$ – устойчивость

$\lambda < 0$ – неустойчивость

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{\sqrt{2(m^2 - \omega^2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{-2\lambda_r |\rho_\omega|^2}}$$

Релятивистское уравнение переходит в нерелятивистское при замене $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2m}}\psi e^{-imt}$ при $\omega \ll m$, откуда

$\lambda_r = (2m)^2\lambda, \quad |\Phi| = \frac{1}{\sqrt{2m}}\psi.$

Выразим λ_J в терминах поля ψ:

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{\sqrt{-2\lambda_r|\rho_r|^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda|\rho_\omega|^2 m}}.$$

Это означает совпадение джинсовской длины волны в случаях релятивистского и нерелятивистского полей.

Заметим, что при $\lambda < 0$ в обеих теориях могут существовать нетопологические солитоны:

$$\Phi_Q(x,t) = \sqrt{\frac{m^2-\omega^2}{-\lambda/2}}\frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{ch}[\sqrt{(m^2-\omega^2)}x]}$$

Таким образом, при $\lambda < 0$ поле имеет тенденцию к уплотнению и образованию локализованных объектов, таких, как солитоны.

Векторный нерелятивистский конденсат

Лагранжиан поля:

$$\mathcal{L} = i\psi_i^* \dot{\psi}^i - \frac{|\nabla\psi_i|^2}{2m} - V,$$

где $V = \frac{\alpha}{2}(\psi_i\psi^{*i})^2 + \frac{\beta}{2}(\psi_i^*\psi^{*i})(\psi_j\psi^j), \quad i, j = 1, 2, 3.$
После варьирования по ψ_k^* получаются уравнения:

$$-\frac{\Delta\psi_k}{2m} + \alpha(\psi_j\psi^{j*})\psi_k + \beta(\psi_j\psi^j)\psi_k^* = i\dot{\psi}_k,$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Конденсатное решение имеет вид:

$$\psi_{0k} = \rho_k e^{i\omega t}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\omega = -(\alpha + \beta)(|\rho_1|^2 + |\rho_2|^2 + |\rho_3|^2) \equiv -(\alpha + \beta)\rho^2.$

$\psi_{0k} \longrightarrow \psi_{0k} + \varphi_k, \quad |\varphi_k| \ll \rho.$

Полученное выражение для возмущений:

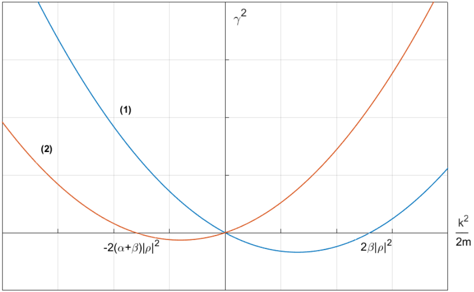
$$\varphi_j = \{A_j e^{i(kx+\gamma t)} + B_j e^{-i(kx+\gamma^* t)}\} e^{i\omega t},$$

$$\left[\begin{array}{l} \gamma^2 = [\frac{k^2}{2m} - \beta\rho^2]^2 - \beta^2\rho^4, \\ \gamma^2 = [\frac{k^2}{2m} + (\alpha+\beta)\rho^2]^2 - (\alpha+\beta)^2\rho^4. \end{array}\right. \tag{1}$$

(1) $\gamma^2 = [\frac{k^2}{2m} - \beta\rho^2]^2 - \beta^2\rho^4$

(2) $\gamma^2 = [\frac{k^2}{2m} + (\alpha+\beta)\rho^2]^2 - (\alpha+\beta)^2\rho^4$

Рис.: Вид зависимостей $\gamma^2(k^2)$



Оба дисперсионных соотношения имеют моды, соответствующие неустойчивости, при $\beta > 0,\ \alpha+\beta < 0$. В этом случае $\lambda_J = \min(\frac{\pi}{\sqrt{m\beta\rho^2}},\ \frac{\pi}{\sqrt{-m(\alpha+\beta)\rho^2}})$

Итоги работы

Был проведен анализ линейной устойчивости конденсатных решений в теориях с релятивистским скалярным полем, а также нерелятивистскими скалярным и векторным полями.

Результаты могут быть полезны при дальнейшем развитии теории с векторным полем и поиске солитонов в ней. Параметры, при которых в теории вероятней всего могут существовать солитоны: $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 0$

Также сделанные в результате работы заключения о величинах джинсовских длин волн конденсата могут быть полезны для изучения процессов формирования Q-шаров.