



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА"

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Влияние гипотетического нарушения лоренцевой
симметрии
на кинематику процессов в физике нейтрино

Выполнила:
студентка 2 курса 203 группы
Куренкова Ангелина Станиславовна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., Сатунин П.С.

Москва
2022

Содержание

1	Введение	2
2	Цель работы	2
3	Принцип относительности и преобразования Лоренца	2
4	Теоремы о пороговых конфигурациях	4
5	Исследуемые реакции в рамках LV	5

1 Введение

Одним из способов приблизиться к построению теории квантовой гравитации является рассмотрение гипотетического нарушения Лоренцевой инвариантности. С появлением в дисперсионном соотношении слагаемого, зависящего от множителя квантовой гравитации, некоторые запрещенные в классическом случае реакции обретают вероятность. В данной работе рассматриваются такие реакции, происходящие с астрофизическими нейтрино. Поскольку нарушение лоренцевой инвариантности предполагается для частицы высоких энергий, должны существовать конфигурации импульсов, начиная с которых реакции становятся возможными. Также исследуется зависимость величин импульсов в пороговых конфигурациях от множителя квантовой гравитации.

2 Цель работы

Изучение пороговых конфигураций импульсов в реакциях с нарушением Лоренцевой инвариантности.

3 Принцип относительности и преобразования Лоренца

Для описания процессов происходящих в природе, необходимо иметь систему отсчета. Под системой отсчета понимается система координат, связанная с этой системой часами, для указания времени. Системы отсчета, в которых движение тел, не находящихся под воздействием внешних сил, происходит с постоянной скоростью называются инерциальными. Для таких систем отсчета существует принцип относительности, гласящий, что все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, выраженный через координаты и время будет иметь один и тот же вид в различных ИСО. Известно, что преобразования Галилея и Ньютоновская механика, постулирующие инвариантность времени и ускорения при переходе от одной ИСО к другой, и как следствие перенос взаимодействия с бесконечной скоростью, носят приближенный характер и могут считаться справедливыми лишь для скоростей намного меньших скорости света. Впервые конечное значение для скорости света было получено Ремером, при наблюдении затмений спутников Юпитера, а спустя два с половиной столетия уже был получен принцип относительности Эйнштейна, объединяющий принцип относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий. Механика, основанная на принципе относительности Эйнштейна назы-

вается релятивистской. Переход от релятивистской механики к классической осуществляется при переходе $c \rightarrow \infty$

Попробуем разобраться, что является инвариантом в релятивистском случае. Для начала введем понятия события и мировой линии. Событие определяется местом и временем, когда оно произошло, то есть определяется 4-мя координатами. В этом пространстве событие изображается точкой, которые называются мировыми точками. Линия, соединяющая мировые точки соответствующие положениям одной и той же частицы в данном пространстве, называется мировой линией.

Рассмотрим две инерциальные СО K и K' , притом система K' движется относительно K вправо вдоль осей x и x' . Пусть первое событие - распространение сигнала со скоростью света из точки (x_1, y_1, z_1, t_1) , а второе приход сигнала в точку x_2, y_2, z_2, t_2 Тогда приравнивая расстояние пройденное им

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

Те же события можно наблюдать из K' :

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

Величина

$$s_{12} = [c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2]^{1/2}$$

называется интервалом между двумя событиями. $s = s'$. Интервал между событиями является инвариантом по отношению к преобразованию от одной СО к другой. Введем обозначения

$$(l_{12})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$t_{12} = t_2 - t_1$$

Если события происходят в одной точке, то $(l'_{12})^2 = 0$ и тогда

$$(s_{12})^2 = c^2(t'_{12})^2 > 0$$

Вещественные интервалы между событиями называют времениподобными. Если какие-то два события происходят с одним и тем же телом, то интервал всегда времениподобный. Если события происходят в одной и той же точке, то

$$(s_{12})^2 = -(l'_{12})^2 < 0$$

а интервал называется пространственноподобным. Следующие формулы наиболее просто выражают переход от координат одной системы, к координатам другой.

$$\frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = x$$

$$\frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = t$$

Данные преобразования называются преобразованиям Лоренца. Энергия и импульс выражаются следующим образом:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

При скоростях много меньших скорости света при разложении в ряд получим

$$E = \frac{2mc^2 + mv^2}{2} = (T + K)$$

Возведя в квадрат выражения для импульса и энергии получим соотношение, называемое дисперсионным.

$$E^2 = p^2 + m^2$$

4 Теоремы о пороговых конфигурациях

При решении уравнений кинематики, возникает вопрос о выборе приближений, благодаря которым системы уравнений становятся разрешимыми. Или же какими будут соотношения импульсов вылетающих частиц на самом пороге реакции. Поэтому были наложены ограничения соответствующие теоремам о пороговых конфигурациях.

1. Теорема о минимуме энергии

Верхняя и нижняя пороговые конфигурации, всегда являются конфигурациями с минимальной энергией.

На основе этой теоремы можно использовать еще одну.

2. Теорема о пороговой конфигурации импульсов

При верхней или нижней пороговой конфигурации импульсы начальных частиц антипараллельны, а импульсы конечных частиц параллельны.

Предположим, что импульсы вылетающих частиц образуют угла α . Тогда существует перпендикулярная составляющая и параллельная для каждого импульса. Перпендикулярные составляющие противоположны и могут компенсировать друг друга. Если их уменьшать, будет уменьшаться и абсолютная величина импульса, а следовательно и энергия частицы. Таким образом, конфигурацией с наименьшей энергией является такая, где импульсы сонаправлены.

Аналогично для исходных частиц: чтобы достичь минимума энергии параллельные компоненты необходимо свести к минимуму, тогда останутся только антипараллельные, которые в свою очередь частично компенсируют друг-друга.

5 Исследуемые реакции в рамках LV

1. Двухчастичный распад Сперва рассмотрим наиболее простую для рассмотрения реакцию

$$\nu \rightarrow W^+ + e^-$$

Запишем систему уравнений с нарушением Лоренцевой инвариантности для нейтрино.

$$\begin{cases} E_\nu = E_w + E_e \\ p_\nu = p_w + p_e \\ E_\nu^2 = m_\nu^2 + p_\nu^2 + \frac{p_\nu^4}{Q^2} \\ E_w^2 = m_w^2 + p_w^2 \\ E_e^2 = m_e^2 + p_e^2 \end{cases}$$

Так как масса W бозона на много порядков превышает массу электрона, логично предположить, что пороговой конфигурацией будет конфигурация

с покоящимся W бозоном. Следовательно получим

$$\begin{cases} E_\nu = m_w + E_e \\ p_\nu = p_e \\ E_\nu^2 = m_\nu^2 + p_\nu^2 + \frac{p_\nu^4}{Q^2} \\ E_e^2 = m_e^2 + p_e^2 \end{cases}$$

Отсюда следует

$$E_\nu^2 - m_\nu^2 - (E_\nu - m_w)^2 + m_e^2 = \frac{p_\nu^4}{Q^2}$$

$$Q = \frac{(E_\nu - m_w)^2 - m_e^2}{\sqrt{m_w(2E_\nu - m_w) - m_\nu^2 + m_e^2}}$$

При расчете бралась масса нейтрино $E \sim 10^{15}$ эв, $m_w = 8 \cdot 10^{10}$ эв. Получившееся значение масштаба квантовой гравитации $Q = 10^{17}$ эв.

2. Трехчастичный распад

Теперь рассмотрим реакцию

$$\nu(p) \rightarrow \nu(p_1)e^-(p_2)e^+(p_3)$$

. Как известно, нельзя наверняка определить энергии получившихся в результате трехчастичного распада частиц, поскольку процесс носит вероятностный характер. Законы сохранения и дисперсионные соотношения в таком случае образуют систему нелинейных уравнений, с количеством переменных разительно превышающим количество уравнений. Однако можно промоделировать трехчастичный распад, определив некоторые решения полученной системы. Далее E_2 и E_3 энергии позитрона и электрона соответственно. При составлении уравнений учитываем, что пороговой является конфигурация, в которой все импульсы параллельны, поэтому в одном случае рассматриваются решения с ограничением, что все конечные частицы летят в одном направлении, а в другом, фиксировано только положительное направление получившегося нейтрино, остальные частицы имеют направле-

ние относительно данного направления зависимости от знака.

$$\begin{cases} E = E_1 + E_2 + E_3 \\ p = p_1 + p_2 + p_3 \\ E^2 = m_\nu^2 + p^2 + \frac{p^4}{Q^2} \\ E_3^2 = m_3^2 + p_3^2 \\ E_2^2 = m_2^2 + p_2^2 \\ E_1^2 = m_\nu^2 + p_1^2 + \frac{p_1^4}{Q^2} \end{cases}$$

Для решения системы был использован метод "hybr" из библиотеки SciPy модуля optimize. Он отличается максимальной универсальностью и быстротой, по сравнению с другими методами модуля. К сожалению, о нем крайне мало написано в интернете, хотя то, что написано никак его не выделяет среди других методов. Во многих случаях, где остальные методы "вязнут он дает хороший результат, но к сожалению поставленную задачу он не решил. Позже будет рассмотрен графический интерфейс для решения одного уравнения.

Решение системы уравнений не дало положительных результатов, поэтому было решено свести систему к одному уравнению.

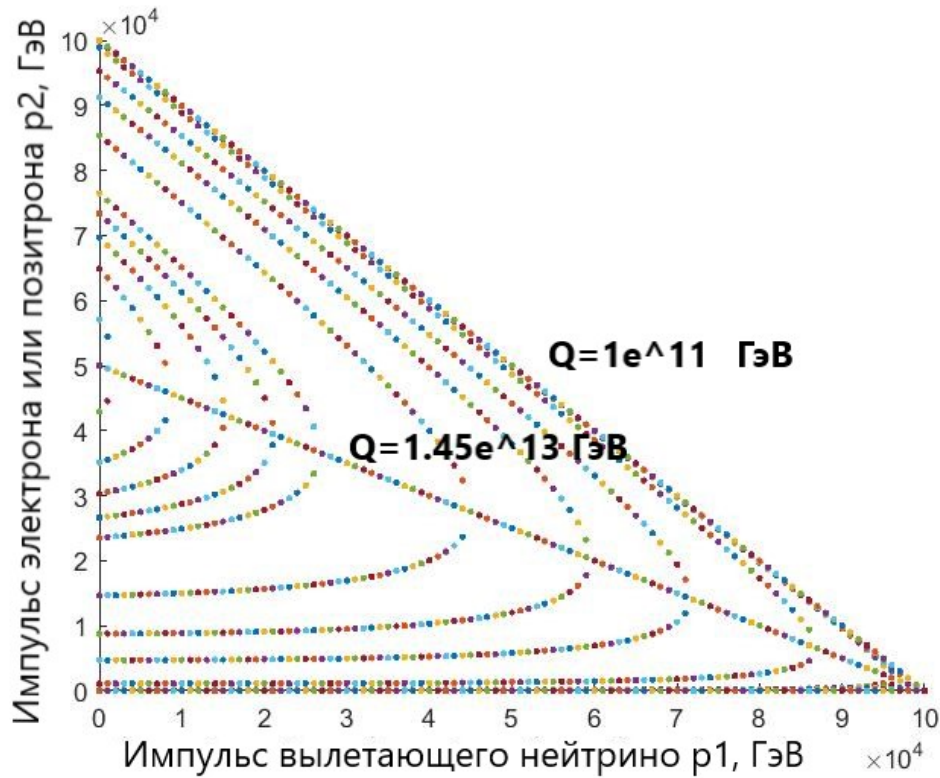
$$p - p_1 + \frac{p^3 - p_1^3}{2Q^2} - \sqrt{p_2^2 + M^2} - \sqrt{(p - p_1 - p_2)^2 + M^2} = 0$$

Это уравнение было решено в Wolfram Mathematica и Matlab, а также на языке python с использованием библиотеки Scipy. Такой обширный подход был обусловлен тем, что нужно было подобрать среду которая лучше всего справляется с поставленной задачей. Хотя и питон наиболее быстро справлялся с задачей, в работе методов библиотеки Scipy присутствуют неточности. Вероятно, это связано с тем, что на вход используемого мною метода fsolve необходимо подавать матрицу приближенных значений. Наилучшим образом справился с задачей Matlab, в котором и были построены графики исследуемых зависимостей.

Теперь подробнее о рисунке: прямая соответствует области действительных частей мнимых чисел. Об этом Матлаб уведомляет при расчете. Заметим, что действительных решения всегда два. Так как дисперсионные соотношения для электрона и позитрона ничем не отличаются, можно предположить что подобное расщепление решений связано именно с образованием пары.

В точках пересечения кривых действительных решений и прямой было в

Рис. 1: График зависимости конфигураций конечных импульсов от величины множителя квантовой гравитации



ручную проверено существование корней. В окрестности примерно 2 Тэва корни лежащие на прямой при подстановке дают значения близкие к нулю, с точностью до 10^{-12} . Таким образом при энергиях нейтрино $E \sim 10^{14}$ эВ реакция становится возможна при $Q \sim 10^{20}$ эВ. При данном значении Q график вырождается в треугольник, то есть ненулевое значение импульса электрона или же позитрона единственно. А при $Q \sim 1.45 \cdot 10^{22}$ эВ График вырождается в прямую, состоящую из действительных частей комплексных корней уравнения. Ниже приведен код программы в среде Matlab.

Вернемся к python. В среде разработки Jupyter notebook был создан графический интерфейс, с возможностью задания начальных параметров при построении графика решения уравнения. Сведенная к уравнению система решалась методом fsolve. Пример графика при значениях $Q \sim 10^{13}$ ГэВ приведен ниже.

Если сравнивать ограничения полученные при рассмотрении этих реакций, то очевидно, что трехчастичный распад дает нам больше информации и более точные ограничения. А Matlab ищет более точные значения, чем питон.

Рис. 2: Код программы в Matlab

```
clear all

syms x

p = 1e5;

M = 4e13;

ep= 0.5e-3;

step = 1000;

figure(5)

for one = 0:step:p

eq = -sqrt(x.^2 + ep.^2) - sqrt( (p - one - x).^2 + ep.^2) - one + p + ((p.^3 - one.^3)/M^2) == 0;

sol = solve(eq, x);

hold on

plot(one,sol, '.');

hold off

end
```

Зависимость конфигураций импульсов от величины Q

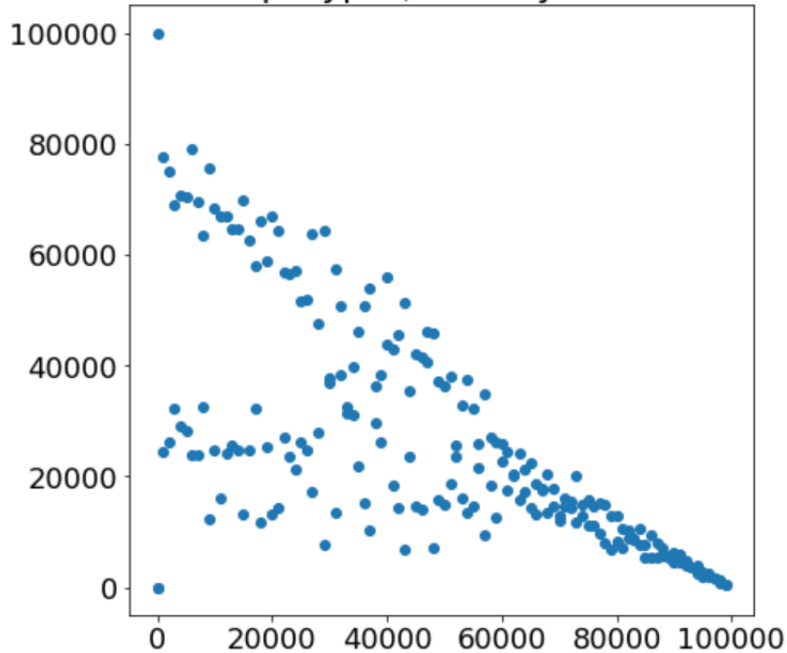


Рис. 3: Пример графика, получаемого в графическом интерфейсе Jupyter Notebook

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.
- [2] D. Mattingly, Ted Jacobson and S. Liberati Threshold configurations in the presence of Lorentz violating dispersion relations