

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА"
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Доманевский Данил Анатольевич

ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД В МОДЕЛИ С НЕСКОЛЬКИМИ АКСИОНОПОДОБНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Курсовая работа

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор РАН
Либанов Максим Валентинович

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	3
Глава 1.	
Математическое описание	5
1.1 <u>Уравнения движения</u>	5
1.2 <u>Дисперсионное соотношение и квантование</u>	7
1.3 <u>Поиск вероятностей превращений</u>	9
1.4 <u>Программная проверка</u>	10
Глава 2.	
Влияние множественного эффекта Примакова-Сикиви	
на эволюцию звёзд	12
2.1 <u>Эволюция звёзд</u>	12
2.2 <u>Оценка констант связи</u>	13
Заключение	15
Список литературы	16
Приложение А. Пояснения некоторых фактов и расчётов	17
А.1 <u>Коэффициенты v_s и g_s</u>	17
А.2 <u>Расчёт энергии для нахождения f_s</u>	17
А.3 <u>Норма и скалярное произведение в формализме Дирака</u>	19
Приложение Б. Случай смешивания n аксионов	21
Приложение В. Примеры эволюционных треков звёзд	22

Введение

Множество естественных объектов поразительно симметричны. Но, когда мы начнем погружаться в современное описание природы с помощью физики, то увидим ещё одно интересное явление - окружающий мир не только содержит симметрию, но и склонен отвечать на её нарушение.

Что имеется в виду? Квантовая теория поля говорит нам, что если симметрия будет нарушена спонтанно, т.е. в процессе эволюции некоторой физической системы инвариантность относительно некоторых преобразований начальной симметрии нарушится (Теорема Голдстоуна), тогда будут рождены частицы, не имеющие массу. Если же при этом происходит ещё и явное нарушение симметрии, то частицы приобретают малую массу. В данной работе мы будем рассматривать явления, связанные с одним из видов таких частиц - аксионами, которые помогают описать CP инвариантность в сильном взаимодействии (т.е. инвариантность относительно одновременного зеркального отражения и замены всех зарядов на противоположные).

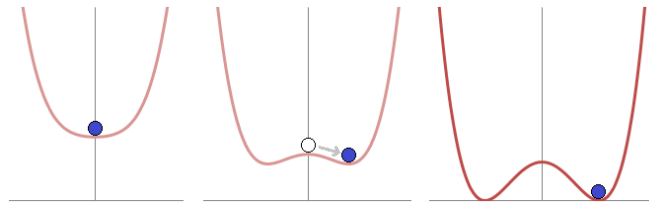


Рисунок 1 — *Пример спонтанного нарушения симметрии. Система может самостоятельно перейти в любую из двух потенциальных ям в процессе эволюции.*

Аксионы обладают одним важным свойством. А именно, под действием внешнего магнитного поля аксион может превратиться в фотон и обратно (Эффект Примакова-Сикиви).

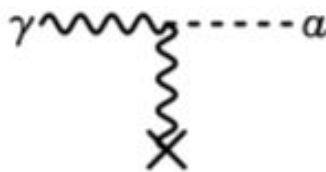


Рисунок 2 — *Иллюстрация одиночного эффекта Примакова-Сикиви. Фотон под действием внешнего поля превращается в аксион.*

До сих пор рассматривался одиночный процесс, т.е. один фотон переходит в один аксион, а также была получена оценка на потери энергии, которые вносит данный процесс в недрах звезд, влияя тем самым на их эволюцию [1]:

$$\langle \epsilon_x \rangle \lesssim 10 \text{ эрг гр}^{-1} \text{ сек}^{-1} \quad (1)$$

В настоящей же работе мы рассмотрим множественный процесс превращения, т.е. фотон и два аксиона смешиваются. Мы рассчитаем вероятности данных переходов (под действием внешнего поля) в зависимости от расстояния до источника (в нашем случае - первичный фотон), чтобы оценить возможность детектирования, а также проведем оценку, аналогичную (1), чтобы посмотреть на сколько изменится влияние данного механизма потери энергии на продолжительность жизни звезды.

Глава 1.

Математическое описание

1.1 Уравнения движения

Запишем лагранжиан системы двух аксионов и фотона [1],[2],[4]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{(\partial_\mu\phi)^2}{2} - \frac{m_\phi^2\phi^2}{2} + M^2\phi\chi + \frac{(\partial_\mu\chi)^2}{2} - \frac{m_\chi^2\chi^2}{2} + \\ & + \frac{1}{8}g_\phi\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}\phi + \frac{1}{8}g_\chi\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}\chi \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ϕ и χ - поля, соответствующие аксионам, m_ϕ и m_χ - "массы" аксионов, $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ - символ Леви-Чивита, g_ϕ и g_χ - константы связи для аксионов, отвечающие за смешивание с фотоном, а M - константа, отвечающая за смешивание аксионов друг с другом. $F_{\mu\nu}$ - тензор электромагнитного поля, задающийся соотношением (A - векторный потенциал электромагнитного поля):

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = & \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_z & H_x & 0 \end{pmatrix} \\ \partial_\mu = & \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \quad \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Также удобно ввести естественную систему единиц. То есть $\hbar = c = k_B = 1$. Будем ещё иметь в виду, что $A^\mu = (A^0, A^i) = (A^0, A_i)$; $A_\mu = (A_0, -A_i)$; $\partial^i = -\partial_i$ (по определению).

Рассмотрим систему (1.1) в присутствии внешнего магнитного поля $B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}F_{jk}$. Тогда, проварьировав действие, получим следующую систему дифференциальных уравнений (Сразу раскрыв тензор $F_{\mu\nu}$):

$$\begin{cases} \partial^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial A) - g_\phi B_i \dot{\phi} \delta_\mu^i - g_\phi B_i \partial_i \phi \delta_\mu^0 - g_\chi B_i \dot{\chi} \delta_\mu^i - g_\chi B_i \partial_i \chi \delta_\mu^0 = 0 \\ \partial^2 \phi + m_\phi^2 \phi - g_\phi B_i (\partial_0 A^i - \partial_i A^0) - M^2 \chi = 0 \\ \partial^2 \chi + m_\chi^2 \chi - g_\chi B_i (\partial_0 A^i - \partial_i A^0) - M^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Далее разделим в A^μ временную и пространственные части, тогда система чуть увеличится:

$$\begin{cases} \partial^2 A^0 - g_\phi B_i \partial_i \phi - g_\chi B_i \partial_i \chi = \partial_0(\partial A) \\ \partial^2 A^i - g_\phi B_i \dot{\phi} - g_\chi B_i \dot{\chi} = -\partial_i(\partial A) \\ \partial^2 \phi + m_\phi^2 \phi - g_\phi B_i (\dot{A}^i - \partial_i A^0) - M^2 \chi = 0 \\ \partial^2 \chi + m_\chi^2 \chi - g_\chi B_i (\dot{A}^i - \partial_i A^0) - M^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Используем калибровку Кулона $div \mathbf{A} = \partial_i A_i = 0$. Система упрощается,

$$\begin{cases} \partial_i^2 A^0 + g_\phi B_i \partial_i \phi + g_\chi B_i \partial_i \chi = 0 \\ \partial^2 A^i + \partial_i \dot{A}_0 - g_\phi B_i \dot{\phi} - g_\chi B_i \dot{\chi} = 0 \\ \partial^2 \phi + m_\phi^2 \phi - g_\phi B_i (\dot{A}^i - \partial_i A^0) - M^2 \chi = 0 \\ \partial^2 \chi + m_\chi^2 \chi - g_\chi B_i (\dot{A}^i - \partial_i A^0) - M^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Следующим нашим шагом будет переход в импульсное пространство, т.е. представим поля в виде: $\phi = \phi(k)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, $\chi = \chi(k)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, $A = A(k)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$.

При этом импульс: $p^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ и $p_\mu = (\omega, -\mathbf{k})$

($\partial^2 \equiv \partial_0^2 - \partial_i^2$ - оператор Д'Аламбера, при этом $\partial_i^2 = |\mathbf{k}|^2$, а $\partial^2 = p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$ из выражения для оператора импульса)

Сделаем попутно следующие упрощения - представим внешнее магнитное поле в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$, при этом пусть оно будет полностью ортогонально волновому вектору, т.е. $\mathbf{B}_\parallel = 0$, $\mathbf{B}_\perp \mathbf{k} = 0$.

Тогда из 1-го уравнения следует:

$$A_0 = \frac{i\mathbf{B}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} (\phi g_\phi + g_\chi \chi) = 0 \quad (1.6)$$

С другой стороны представим поле A , как $\mathbf{A} = \vec{\tau} + \frac{a\mathbf{B}_\perp}{|\mathbf{B}_\perp|}$, где $\vec{\tau}\mathbf{k}$ (калибровка Кулона). И система (1.5) преобразуется, с учетом (1.6), в следующую:

$$\begin{cases} p^2 \vec{\tau} + p^2 a \frac{\mathbf{B}_\perp}{|\mathbf{B}_\perp|} + i\omega \phi g_\phi \mathbf{B}_\perp + i\omega \chi g_\chi \mathbf{B}_\perp = 0 \\ (p^2 - m_\phi^2) \phi - i\omega g_\phi a \mathbf{B}_\perp - M^2 \chi = 0 \\ (p^2 - m_\chi^2) \chi - i\omega g_\chi a \mathbf{B}_\perp - M^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Далее τ поляризация фотона отщепляется и в матричном виде мы будем иметь матрицу уравнений движения:

$$\begin{pmatrix} p^2 & ig_\phi\omega\mathbf{B}_\perp & ig_\chi\omega\mathbf{B}_\perp \\ -ig_\phi\omega\mathbf{B}_\perp & p^2 - m_\phi^2 & -M^2 \\ -ig_\chi\omega\mathbf{B}_\perp & -M^2 & p^2 - m_\chi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

1.2 Дисперсионное соотношение и квантование

Дисперсионное соотношение, а именно зависимость $\omega(k)$ либо $k(\omega)$, будет следовать из условия:

$$N = \begin{vmatrix} p^2 & ig_\phi\omega\mathbf{B}_\perp & ig_\chi\omega\mathbf{B}_\perp \\ -ig_\phi\omega\mathbf{B}_\perp & p^2 - m_\phi^2 & -M^2 \\ -ig_\chi\omega\mathbf{B}_\perp & -M^2 & p^2 - m_\chi^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega^2 - \mathbf{k}^2 & ig_\phi\omega\mathbf{B}_\perp & ig_\chi\omega\mathbf{B}_\perp \\ -ig_\phi\omega\mathbf{B}_\perp & \omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_\phi^2 & -M^2 \\ -ig_\chi\omega\mathbf{B}_\perp & -M^2 & \omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_\chi^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

Видно, что получится кубическое уравнение относительно \mathbf{k}^2 либо ω , следовательно будет три корня, которые мы обозначим k_s , где $s = 1,2,3$ (ω будет постоянной частотой).

И далее, решая задачу на собственные векторы мы сможем представить поля в x - пространстве через них:

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} f_s (e^{ip_s x} a_s^* + e^{-ip_s x} a_s) \\ \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} g_s (e^{ip_s x} a_s^* + e^{-ip_s x} a_s) \\ \chi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} v_s (e^{ip_s x} a_s^* + e^{-ip_s x} a_s) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь коэффициенты v_s и g_s находятся непосредственно из подстановки в (1.8) и выражаются через коэффициенты f_s . Их явное выражение написано в приложении (A.1). Также a_s^* и a_s - некоторые амплитуды полей в канонической базе.

Дальнейшие действия будут заключаться в поиске f_s . Для этого нужно вначале составить гамильтониан системы (1.1). Тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.11)$$

Преобразовав исходный лагранжиан (1.1), мы получим выражение:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial a)^2 + \frac{1}{2}(\partial \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial \chi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2 \chi^2 + M^2 \phi \chi + g_\phi \dot{a} B \phi + g_\chi \dot{a} B \chi \quad (1.12)$$

Его импульсы

$$\begin{aligned} \pi_a &= \dot{a} + g_\phi B \phi + g_\chi B \chi; \\ \pi_\phi &= \dot{\phi}; \quad \pi_\chi = \dot{\chi} \end{aligned} \quad (1.13)$$

И гамильтониан таким образом из (1.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T^{00} &= \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i a)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \phi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_i \chi)^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2 + \frac{1}{2}m_\chi^2 \chi^2 - M^2 \phi \chi \end{aligned} \quad (1.14)$$

И теперь нам требуется взять выражения (1.10), подставить их в гамильтониан (1.14) и проинтегрировать, то есть найти энергию $E = \int d^3x \mathcal{H}(k_s, f_s)$. И всё что остается, это с другой стороны приравнять энергию к $\sum_s \int d^3k \omega a_s^* a_s$, т.к. вследствие квантования амплитуды a_s^* и a_s , ставшие операторами, должны удовлетворять условию $[a_s(\mathbf{k}), a_{s'}^*(\mathbf{q})] = 1 \cdot \delta_{ss'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ ($[..]$ - коммутатор).

Итого имеем уравнение $\int d^3x \mathcal{H}(k_s, f_s) = \sum_s \int d^3k \omega a_s^* a_s$ из которого можно явно выразить коэффициенты f_s (условие нормировки). Пример подробного расчёта см. (A.2).

Также запишем 4-импульс - он нам ещё пригодится:

$$P_\mu = \sum_s \int d^3x p_{s,\mu} a_s^* a_s \quad (1.15)$$

1.3 Поиск вероятностей превращений

Пусть лазером рождается фотон при $t = 0$, $\mathbf{x} = 0$ с энергией ω . Тогда квантовая механика говорит нам, что такое состояние имеет вид:

$$A^\dagger|0\rangle \equiv \sum_s f_s(\omega, k_s) a_s^*(\mathbf{k}_s)|0\rangle \equiv |A\rangle \quad (1.16)$$

Соответственно для аксионов ϕ и χ :

$$\Phi^\dagger|0\rangle \equiv \sum_s g_s(\omega, k_s) a_s^*(\mathbf{k}_s)|0\rangle \equiv |\Phi\rangle \quad (1.17)$$

$$X^\dagger|0\rangle \equiv \sum_s v_s(\omega, k_s) a_s^*(\mathbf{k}_s)|0\rangle \equiv |X\rangle \quad (1.18)$$

g_s и v_s были найдены нами ранее - они выражаются через f_s . Опишем теперь эволюцию состояний, используя (1.15):

$$|A(t)\rangle = e^{-iP^\mu x_\mu} |A(0)\rangle = e^{-i \int d^3x \sum_s p_{s,\mu} x_\mu a_s^* a_s} |A(0)\rangle = e^{-i\omega t} \sum_s f_s a_s^* e^{ik_s L} |0\rangle \quad (1.19)$$

А вероятность обнаружить ϕ на расстоянии L по определению (например, для ϕ):

$$P_{\gamma\phi} = \frac{|\langle\Phi|A(t)\rangle|^2}{\langle\Phi|\Phi\rangle\langle A|A\rangle} \quad (1.20)$$

И обнаружить опять фотон (например, аксион пролетит сквозь стену и превратится обратно в фотон) мы сможем с вероятностью: $P_{\gamma\gamma} = P_{\gamma\phi}^2$ (A.3)

Тогда, учитывая, что у нас три волновых вектора, вероятность раскрывается:

$$P_{\gamma\phi} = \frac{|\sum_s g_s^* f_s e^{ik_s L}|^2}{\sum_s |f_s|^2 \sum_s |g_s|^2} = \frac{|g_1^* f_1 e^{ik_1 L} + g_2^* f_2 e^{ik_2 L} + g_3^* f_3 e^{ik_3 L}|^2}{(|f_1|^2 + |f_2|^2 + |f_3|^2)(|g_1|^2 + |g_2|^2 + |g_3|^2)} \quad (1.21)$$

Здесь все коэффициенты были нами найдены ранее, так что это вполне определенное число, которое можно найти, подставив все константы связи и поле B .

При этом должно выполняться соотношение:

$$P_{\gamma\gamma} + P_{\gamma\phi} + P_{\gamma\chi} + \dots = 1 \quad (1.22)$$

Многоточием обозначены процессы перемешиваний порядка, большего единицы, которые менее вероятны.

1.4 Программная проверка

Мы получили все формулы, представленные выше, пришло время проверить их правильность и вообще характер изменения вероятности с расстоянием. Делать мы это будем численно. Для этого используем Wolfram Mathematica. Какие значения констант выбирать? Возьмем частоту фотона $\omega \approx 1$ эВ, ожидаемые массы аксионов порядка $\approx 10^{-3}$ эВ, такого же порядка возьмем и константу смешивания аксионов M . И будем варьировать только поле B , ведь константы взаимодействия аксионов и фотона можно взять порядка единицы, а все ненулевые порядки заложить в B (это возможно в силу того, что эти величины входили как произведение в систему (1.8)). Теперь рассмотрим для проверки два критических случая.

1. Поле сравнимо по величине с энергией фотона. Рассмотрим магнитное поле на два порядка меньшее, чем энергия фотона. Тогда будут иметь высокую вероятность процессы превращения фотона в аксион. Построим соответствующий график:

Можно заметить, что один аксион оказывается в данном случае подавленным по вероятностям перехода. Кстати, при этом вероятность $P_{\phi\chi} \approx 0.02 = const$, т.е. вероятность смешивания аксионов не меняется на расстоянии (не показана на графике).

2. Поле стремится к нулю. Здесь вероятность $P_{\gamma\gamma}$ становится практически тождественно равной единице, а вероятности $P_{\phi\gamma}, P_{\chi\gamma} \lesssim 10^{-15}$, что согласуется с теорией, построенной ранее. Но также хочется отметить, что вероятность $P_{\phi\chi}$ нулю не равняется, т.е. в отсутствии внешнего поля, если строить теорию, как это делалось выше, аксионы могут спокойно смешиваться друг с другом (правда вероятность эта $P_{\phi\chi} \lesssim 10^{-7}$).

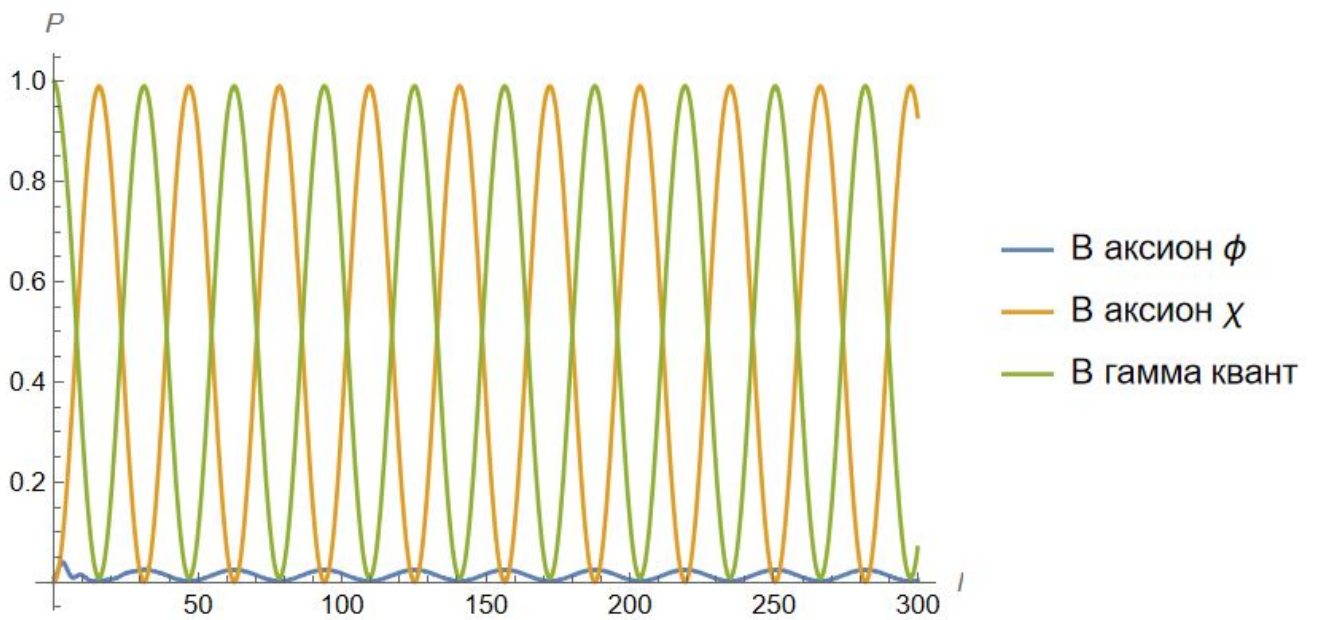


Рисунок 1.1 — График зависимости вероятностей, от расстояния до источника. Отметим, что заметно выполнение соотношения (1.22).

Глава 2.

Влияние множественного эффекта Примакова-Сикиви
на эволюцию звёзд2.1 Эволюция звёзд

Рассмотрим диаграмму Герцшпрунга - Рассела, которая наглядно показывает эволюционные стадии звёзд.

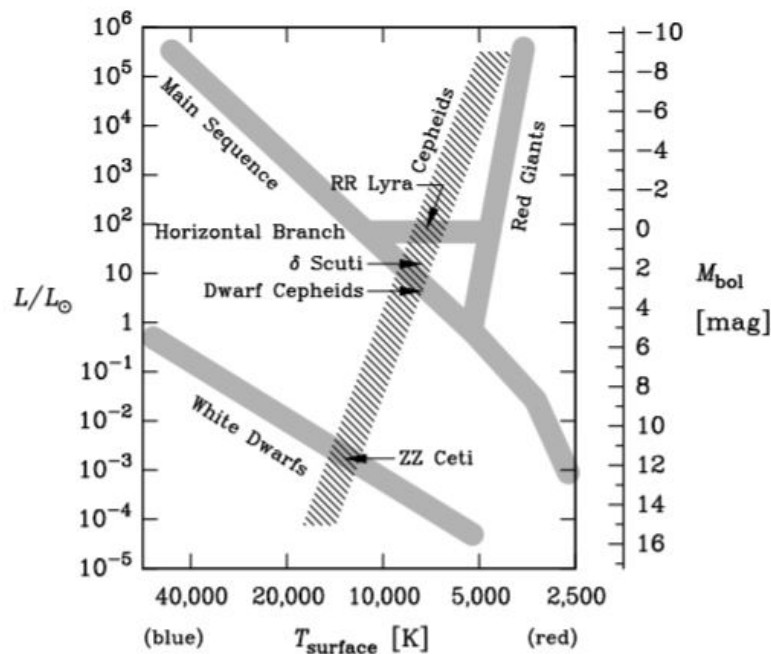


Рисунок 2.1 — Схематическая диаграмма Герцшпрунга-Рассела, на которой показаны основные типы звёзд, которые нам понадобятся.

Для начала поясним основные стадии эволюции, изображенные на диаграмме и которые понадобятся нам в дальнейших рассуждениях.

Главная последовательность - это первая стадия эволюции после стадии протозвезды, здесь единственным источником энергии являются термоядерные реакции синтеза гелия из водорода (в частности, Солнце сейчас находится на главной последовательности).

Далее, если масса звезды $0.5 M_{\text{sun}} \lesssim M_{\text{star}}$, то звезда, после выгорания водорода образует гелиевое ядро, массой около $0.5 M_{\text{sun}}$ и переходит на стадию **красного гиганта**. На данной стадии у таких звезд горит водородный слоевой источник. Начало же горения гелия и его превращение в углерод происходит

с кратковременным энерговыделением (гелиевая вспышка). После неё звезда начинается перемещаться от ветви красных гигантов влево с постоянной светимостью, образуя **горизонтальную ветвь**. Оболочка звезды сбрасывается и рассеивается, и образуется остывающий углеродно-кислородный белый карлик массой около $0.5 M_{sun}$.

Для $2.5 M_{sun} \lesssim M_{star}$ гелиевой вспышки не происходит, т.к. гелиевое ядро невырождено и после стадии красного гиганта происходит невырожденное горение гелия с образованием углерода и кислорода.

Дальнейшую эволюцию мы рассматривать не будем, поскольку оценка на скорость потери энергии получена по определению времени задержки зажигания гелия в звездах, которые находятся в Шаровых Звёздных Скоплениях (по совокупности наблюдательных данных, таких как, яркость, расстояние (которое определяется по цефеидам), радиус (Метод Бааде — Весселинка), спектр - можно провести соответствующие оценки) . Шаровые звёздные скопления (далее - ШЗС) - гравитационно связанные ансамбли из примерно 10^6 звезд - наиболее значимые объекты во Вселенной, которые помогут нам проследить за влиянием нового механизма потери энергии на жизнь звезды. Так как все звезды в ШЗС имеют примерно одинаковый химический состав и различаются лишь массой, то мы получаем наглядную эволюционную картину, потому они и имеют большой вес в астрофизике.

2.2 Оценка констант связи

Рассмотрим эффект Примакова - Сикиви для случая, когда фотон может под действием внешнего поля превращаться в два различных аксиона.

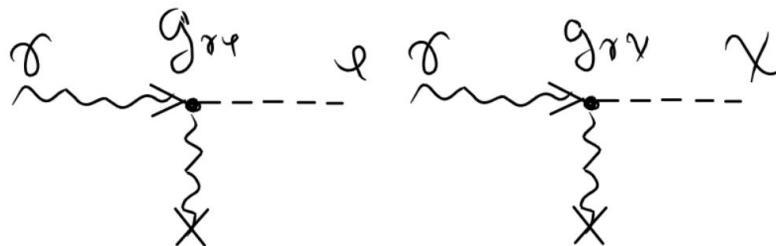


Рисунок 2.2 — Обе реакции рассматриваемого эффекта Примакова-Сикиви

Соответственно, константы связи $g_{\phi\gamma}$ и $g_{\chi\gamma}$. Тогда, считая два этих превращения

независимыми, перепишем скорость перехода фотона ω в аксион (исходя из теории Дебая-Хюккеля):

$$\Gamma_{\gamma \rightarrow \phi(\chi)} = \frac{g_{\phi(\chi)\gamma}^2 T k_s^2}{32\pi} \left[\left(1 + \frac{k_s^2}{4\omega^2}\right) \ln \left(1 + \frac{4\omega^2}{k_s^2}\right) - 1 \right]; \quad (2.1)$$

где,

$$k_s = \frac{4\pi\alpha}{T} n_B \left(Y_e + \sum_j Z_j^2 Y_j \right); \quad (2.2)$$

$$n_B = \frac{\rho}{m_u}.$$

Здесь T - температура плазмы, n_B - барионная плотность, Y_e и Y_j - доли на барион электронов и различных ядер j с зарядами Z_j .

Следовательно для каждого из аксионов потеря энергии на единицу объема будет составлять:

$$Q_{\phi(\chi)} = \int \frac{2 d^3 k_\gamma}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Gamma_{\gamma \rightarrow \phi(\chi)\omega}}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1} = \frac{g_{\phi(\chi)\gamma}^2 T^7}{4\pi} \cdot F(\kappa^2); \quad (2.3)$$

где,

$$F(\kappa^2) = \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dx \left[(x^2 + \kappa^2) \ln \left(1 + \frac{x^2}{\kappa^2}\right) - x^2 \right] \frac{x}{e^x - 1};$$

$$\kappa \equiv \frac{k_s}{2T} \quad (2.4)$$

Таким образом общая потеря энергии на единицу объема:

$$Q = Q_\phi + Q_\chi = \frac{T^7 F(\kappa^2)}{4\pi} \cdot (g_{\phi\gamma}^2 + g_{\chi\gamma}^2) \quad (2.5)$$

Далее, подставляя характерные значения параметров для звезды горизонтальной ветви, а именно $T = 10^8$ К, $\rho = 10^4$ гр/см³ и $\kappa^2 \approx 2.5$, и переводя в соответствующие единицы измерения, получим:

$$\langle \epsilon \rangle = (g_{10\phi\gamma}^2 + g_{10\chi\gamma}^2) \cdot 30 \text{ эрг гр}^{-1} \text{ сек}^{-1} \quad (2.6)$$

$$g_{10\phi\gamma} \equiv g_{\phi\gamma} \cdot 10^{10} \text{ ГэВ}^{-1}; \quad g_{10\chi\gamma} \equiv g_{\chi\gamma} \cdot 10^{10} \text{ ГэВ}^{-1}$$

Тогда для констант связи находим искомую оценку:

$$\sqrt{g_{\phi\gamma}^2 + g_{\chi\gamma}^2} \lesssim 0.6 \cdot 10^{-10} \text{ ГэВ}^{-1} \quad (2.7)$$

Заключение

По итогу выполнения работы были получены вероятности превращений фотона в аксионы и оценка на константы взаимодействия этих аксионов с помощью теории Дебая-Хюккеля и обработки наблюдательных данных, представленных в [1]. Из полученного можно сделать два вывода:

Во-первых заметим, что вероятности перехода одного аксиона в другой при отсутствии внешнего поля не является нулевой, чего не может быть, когда речь идет о вероятности превращения аксиона в фотон и обратно. Также отметим, что вероятности перехода в любых полях, которые по величине меньше звездных, $\rightarrow 0$, мы уже не говорим о превращениях второго порядка.

Во-вторых, оценки на константы взаимодействия как для двух аксионов, так и для большего их числа (B) - совпадают с (1), что говорит о равновероятности всех этих случаев, если получать их так, как получили мы, и говорит также, что мы не сможем их отличить, наблюдая за звездами. Ещё отметим, что вероятности переходов аксионов в аксионы в n-аксионном случае, по аналогии, тоже ненулевые при отсутствии поля, и только переход в квант света оказывается невозможен.

Список литературы

- [1] Raffelt G. 1996, Stars as Laboratories for Fundamental Physics.
- [2] Raffelt G. and Stodolsky L. 1988, Phys.Rev.D, 37,5.
- [3] Tinyakov P. and Pshirkov M. 2021, Universe 7, 11, 401.
- [4] Chadha-Day F. 2022, JCAP 01, 01, 013.
- [5] А.В.Засов, К.А. Постнов. Общая астрофизика. Фрязино: Век 2. 2016 - 576 с.
- [6] В.А.Рубаков. Классические калибровочные поля: Бозонные теории: Учебное пособие. М.: КомКнига, 2005. - 296 с.

Приложение А

Пояснения некоторых фактов и расчётов

А.1 Коэффициенты v_s и g_s

Рассмотрим систему (1.8)-(1.9) и подставим в первые два уравнения выражения для полей (1.10). Тогда, в соответствии с теорией о поиске собственных векторов, можно выразить g_s и v_s через свободные коэффициенты f_s .

В ходе подстановок возникнут интегралы по пространству k , которые, в силу основной леммы вариационного исчисления можно будет убрать. Тогда, после некоторых алгебраических преобразований, получим довольно громоздкие выражения (почему они и были вынесены в приложение):

$$g_s = \frac{-if_s((\omega^2 - k_s^2)M^2 g_\phi - g_\phi^2 g_\chi B_\perp^2 \omega^2)}{g_\phi \omega B_\perp (M^2 g_\phi - g_\chi(-\omega^2 + k_s^2) - g_\chi m_\phi^2)} \quad (\text{A.1})$$

$$v_s = \frac{if_s((\omega^2 - k_s^2)^2 - m_\phi^2(\omega^2 - k_s^2) - g_\phi^2 B_\perp^2 \omega^2)}{\omega B_\perp (M^2 g_\phi - g_\chi(-\omega^2 + k_s^2) - g_\chi m_\phi^2)}$$

А.2 Расчёт энергии для нахождения f_s

Для начала запишем известные свойства дельта функции:

$$\int f(x)\delta(x - a)dx = f(a); \quad (\text{A.2})$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} dt. \quad (\text{A.3})$$

Теперь рассмотрим одно из полей, например χ :

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} v_s (e^{ip_s x} a_s^* + e^{-ip_s x} a_s) \quad (\text{A.4})$$

При подставлении данного поля в гамильтониан (1.14) возникнет два типа слагаемых, например, рассмотрим χ^2 :

$$\chi^2 = \frac{v_s^2}{(2\pi)^3} \left(\sum_s \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} (e^{ip_s x} a_s^* + e^{-ip_s x} a_s) \right)^2 \quad (\text{A.5})$$

Раскрыв, получим слагаемые вида $(\dots a_1 \cdot a_2)$, т.е. перекрестные по разным полям; вида $(\dots a_1 \cdot a_1)$, т.е. "квадратичные". Все эти слагаемые сократятся либо за счет дисперсионного соотношения (1.9) и найденных соотношений между коэффициентами g_s , v_s , f_s), когда мы соответствующим образом подставим все три поля и их производные, либо за счет коммутационных соотношений между операторами, относящимися к разным полям в каноническом базисе.

Наиболее интересны слагаемые вида $(\dots a_1 \cdot a_1^*)$, которые и будут формировать выражение для энергии. Возьмем перекрестное слагаемое из (A.5) и проинтегрируем его, чтобы найти часть энергии, т.к. энергия задается выражением $E = \int d^3x \mathcal{H}(k_s, f_s)$ (рассмотрим только $s = 1$):

$$E_1 = \int d^3x \frac{2v_1^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} \frac{d^3q}{\sqrt{2q_0}} e^{i(k_0 - q_0)x_0} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q})\mathbf{x}} a_{1_k} a_{1_q}^* \quad (\text{A.6})$$

Применяя определение дельта функции преобразуем:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2 v_1^2 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} \frac{d^3q}{\sqrt{2q_0}} e^{i(k_0 - q_0)x_0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) a_{1_k} a_{1_q}^* = \\ &= \frac{v_1^2}{\omega} \int d^3k a_1^* a_1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Абсолютно таким же образом ищутся все остальные слагаемые такого же вида. Вспоминая, что энергия должна иметь вид $\int d^3k \omega a_1^* a_1$, и вычисляя таким же образом слагаемые соответствующие индексам s и складывая, получим окончательную неявную функцию для нахождения нормировочных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_s, k_s) &= \frac{1}{2} \omega f_s^2 + \frac{1}{2} \frac{k_s^2}{\omega} f_s^2 + \frac{1}{2} \omega g_s^2 + \frac{1}{2} \frac{k_s^2}{\omega} g_s^2 + \frac{1}{2} \omega v_s^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{k_s^2}{\omega} v_s^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\phi^2 g_s^2}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{m_\chi^2 v_s^2}{\omega} - \frac{M^2 g_s v_s}{\omega} - \omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Отсюда, после подстановки коэффициентов (A.1) и волновых векторов из (1.9) получим явные выражения для нормировочных коэффициентов f_s .

A.3 Норма и скалярное произведение в формализме Дирака

Выражение вида $\langle A|B \rangle$ - является состоянием системы:

$$\langle A|B \rangle = \psi_B(A); \quad (\text{A.9})$$

Соответственно, т.к. в нашем случае собственные функции это экспоненты и используя свёртку с дельта функцией, норма в гильбертовом пространстве и скалярное произведение (* - эрмитово сопряжение, в нашем случае оно вырождается позднее просто в комплексное):

$$\begin{aligned} \langle A|A \rangle &= \int \psi_a^* \psi_a d\mathbf{q} = |A|^2 (2\pi)^3 \delta^3(0) \\ \langle A|B \rangle &= \int \psi_a^* \psi_b d\mathbf{q} = |A \cdot B| (2\pi)^3 \delta^3(0) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Тогда для норм в случае аксионов и фотона:

$$\begin{aligned} \langle A|A \rangle &= \delta^3(0) \sum_s f_s^* \cdot f_s = \delta^3(0) \sum_s |f_s|^2 \\ \langle \Phi|\Phi \rangle &= \delta^3(0) \sum_s g_s^* \cdot g_s = \delta^3(0) \sum_s |g_s|^2 \\ \langle X|X \rangle &= \delta^3(0) \sum_s v_s^* \cdot v_s = \delta^3(0) \sum_s |v_s|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

И для эволюции:

$$\langle \Phi|A(t) \rangle = \delta^3(0) e^{-i\omega t} \cdot \sum_s g_s^* f_s e^{ik_s L} \quad (\text{A.12})$$

$$\langle X|A(t) \rangle = \delta^3(0) e^{-i\omega t} \cdot \sum_s v_s^* f_s e^{ik_s L} \quad (\text{A.13})$$

$$\langle A|A(t) \rangle = \delta^3(0) e^{-i\omega t} \cdot \sum_s f_s^* f_s e^{ik_s L} \quad (\text{A.14})$$

Подставим полученные выражения в вероятности вида (1.20) и получим соотношения (1.21) со всеми известными коэффициентами. (В частности, для того, чтобы мы могли таким образом найти вероятности мы и нормировали рассказанным ранее способом f_s).

Приложение Б

Случай смешивания n аксионов

Оценку (2.7) можно обобщить на случай, когда фотон может превращаться в любое наперед заданное число различных аксионов. Тогда, рассматривая потери энергии каждого процесса независимо, получим:

$$Q_0 = \sum_n Q_n = \frac{T^7 F(\kappa^2)}{4\pi} \cdot \sum_n g_{\phi_n \gamma}^2 \quad (\text{Б.1})$$

Подставляя те же параметры звёзд в уравнение, находим оценку:

$$\langle \epsilon_0 \rangle = \sum_n g_{10\phi_n \gamma}^2 \cdot 30 \text{ эрг гр}^{-1} \text{ сек}^{-1} \quad (\text{Б.2})$$

$$g_{10\phi_n \gamma} \equiv g_{\phi_n \gamma} \cdot 10^{10} \text{ ГэВ}^{-1}; \quad (\text{Б.3})$$

Тогда, аналогично (2.7) имеем:

$$\sqrt{\sum_n g_{\phi_n \gamma}^2} \lesssim 0.6 \cdot 10^{-10} \text{ ГэВ}^{-1} \quad (\text{Б.4})$$

Это говорит о том, что мы не сможем, в силу совпадения оценок, понять, наблюдая за звездами (в частности за ШЗС), какое количество аксионов участвует в данных реакциях, по крайней мере пока.

Приложение В

Примеры эволюционных треков звёзд

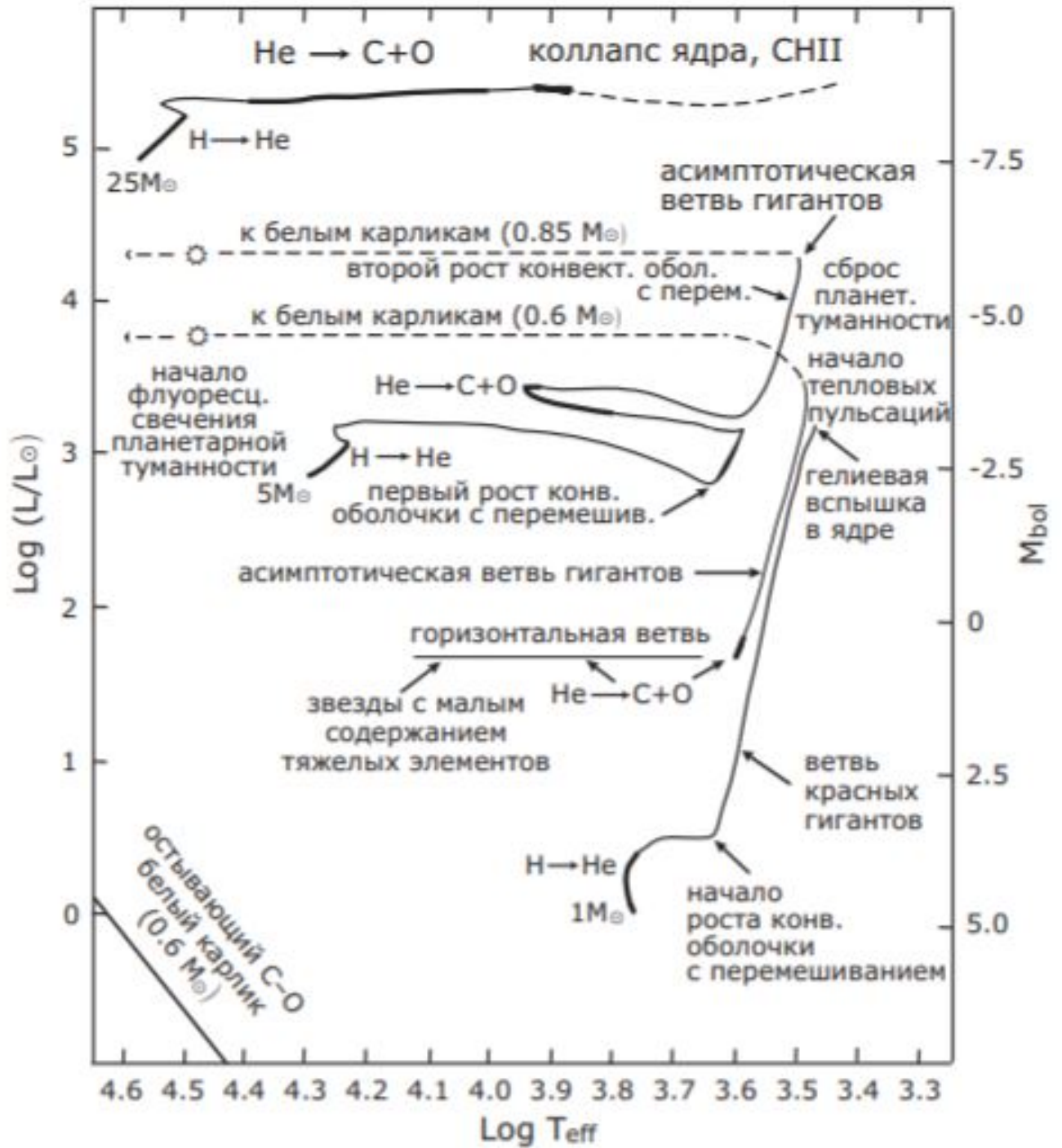


Рисунок В.1 — Эволюционные треки звезд различных масс на диаграмме Герцшпрунга-Рассела.