

Стандартные свечи на космологических расстояниях

Курсовая работа студента 206 группы

Дьяченко Артёма Андреевича

Научный руководитель:

член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук,

Горбунов Дмитрий Сергеевич

Введение

Стандартные свечи – астрономические объекты с известной светимостью.

Для того, чтобы узнать о расширении вселенной и природе тёмной материи исследуют зависимость расстояния до объекта от красного смещения.

Введение

Ранее, для работы с большими диапазонами использовалось приближение фотометрического расстояния по логарифмам:

$$d_L^{\log poly} = \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{i=1}^n a_i [\log(1 + z)]^i$$

$$a_1 = 1$$

$a_2 \dots a_n$ - независимые параметры

Введение

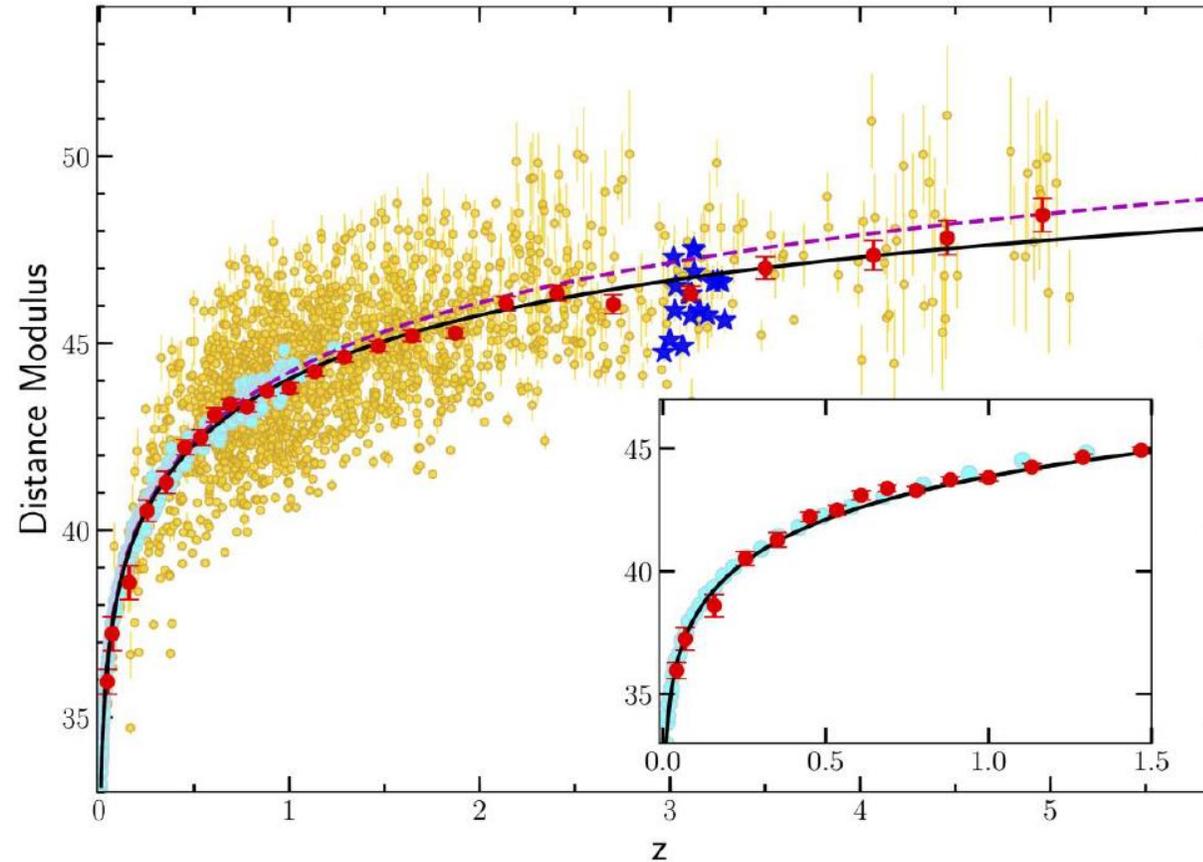


Рисунок 1. Диаграмма Хаббла для сверхновых (голубые точки) и квазаров (желтые точки и синие звёзды). Фиолетовая пунктирная линия – Λ CDM с $\Omega_m = 0.31 \pm 0.05$. Черная сплошная линия – наилучшая аппроксимация логарифмическим многочленом 3 степени.

Введение

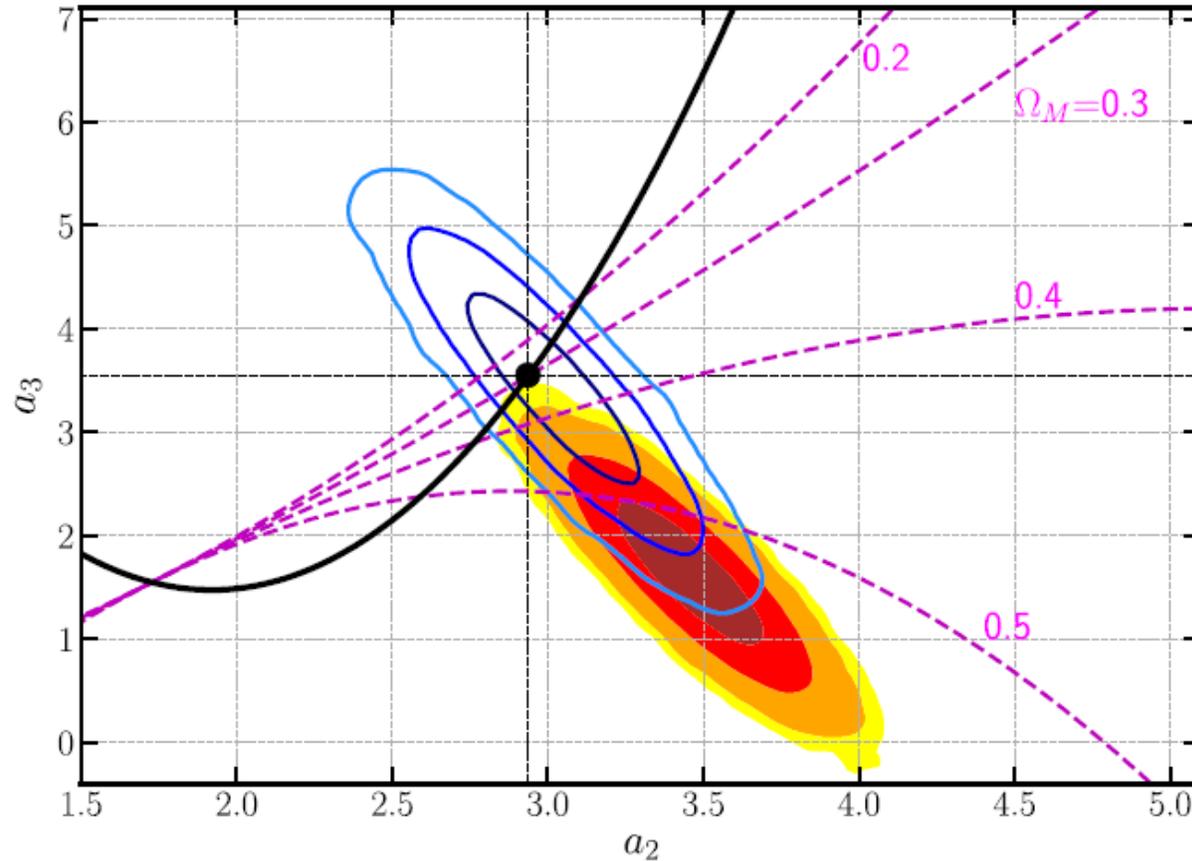


Рисунок 2. Сравнение космологических моделей, и аппроксимации логарифмами. Закрашенные контуры – доверительные интервалы в 1, 2, 3 и 4 σ , полученные в ходе аппроксимации всей Диаграммы Хаббла. Не закрашенные контуры – доверительные интервалы полученные в ходе аппроксимации объектов с $z < 1.4$

Введение

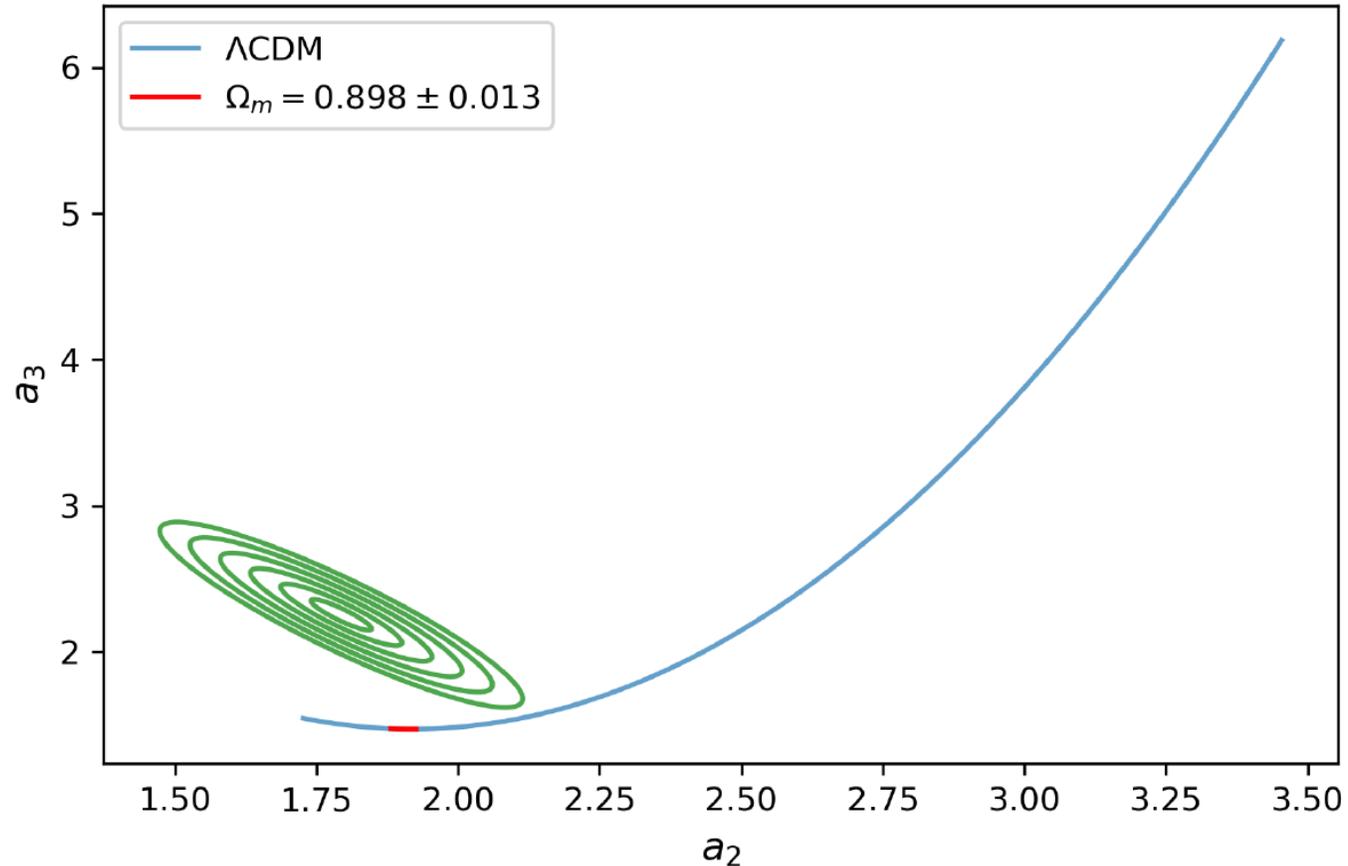


Рисунок 3. Доверительные интервалы, полученные в ходе аппроксимации фиктивных данных, соответствующих Λ CDM с $\Omega_m = 0.9$. Красный участок кривой не попадает в доверительные интервалы даже в том случае, когда данные соответствуют Λ CDM.

Постановка задачи

- Используя разложения по логарифмам нельзя правильно узнать космологические параметры даже в том случае, когда исходные данные полностью им соответствуют.
- Результатам, полученным на основе этого разложения, нельзя доверять, так как ошибка, вызванная самими разложением, может быть неверно интерпретирована как отклонение от Λ CDM.
- Необходимо найти другое приближение.

НОВЫЙ ПОДХОД

Фотометрическое расстояние можно аппроксимировать с помощью ряда многочленов Чебышёва

$$d_L \approx \sum_{i=0}^n c_i T_i$$

НОВЫЙ ПОДХОД

Эти многочлены ортогональны на сегменте $[-1; 1]$ с весовой функцией

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{fg}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

НОВЫЙ ПОДХОД

Для того, чтобы аппроксимировать функцию на сегменте $[0; u]$, нужно отобразить $[-1; 1]$ на этот сегмент при помощи функции

$$y(x) = \frac{u}{2} (x + 1)$$

НОВЫЙ ПОДХОД

Тогда коэффициенты c_i считаются по формулам:

$$c_0 = \langle d_L(y(x)), T_0(x) \rangle \frac{1}{\pi}$$

$$c_k = \langle d_L(y(x)), T_k(x) \rangle \frac{2}{\pi}, k > 0$$

НОВЫЙ ПОДХОД

- Так как при вычислении коэффициентов интеграл брался для $d_L(y(x))$, где $x \in [-1, 1]$, необходимо использовать многочлены Чебышева относительно функции:

$$x(y) = \frac{2x - u}{u}$$

- d_L можно аппроксимировать рядом :

$$d_L^{approx} = \sum_{i=0}^n c_i T_i \left(\frac{2z - u}{u} \right)$$

Новый подход

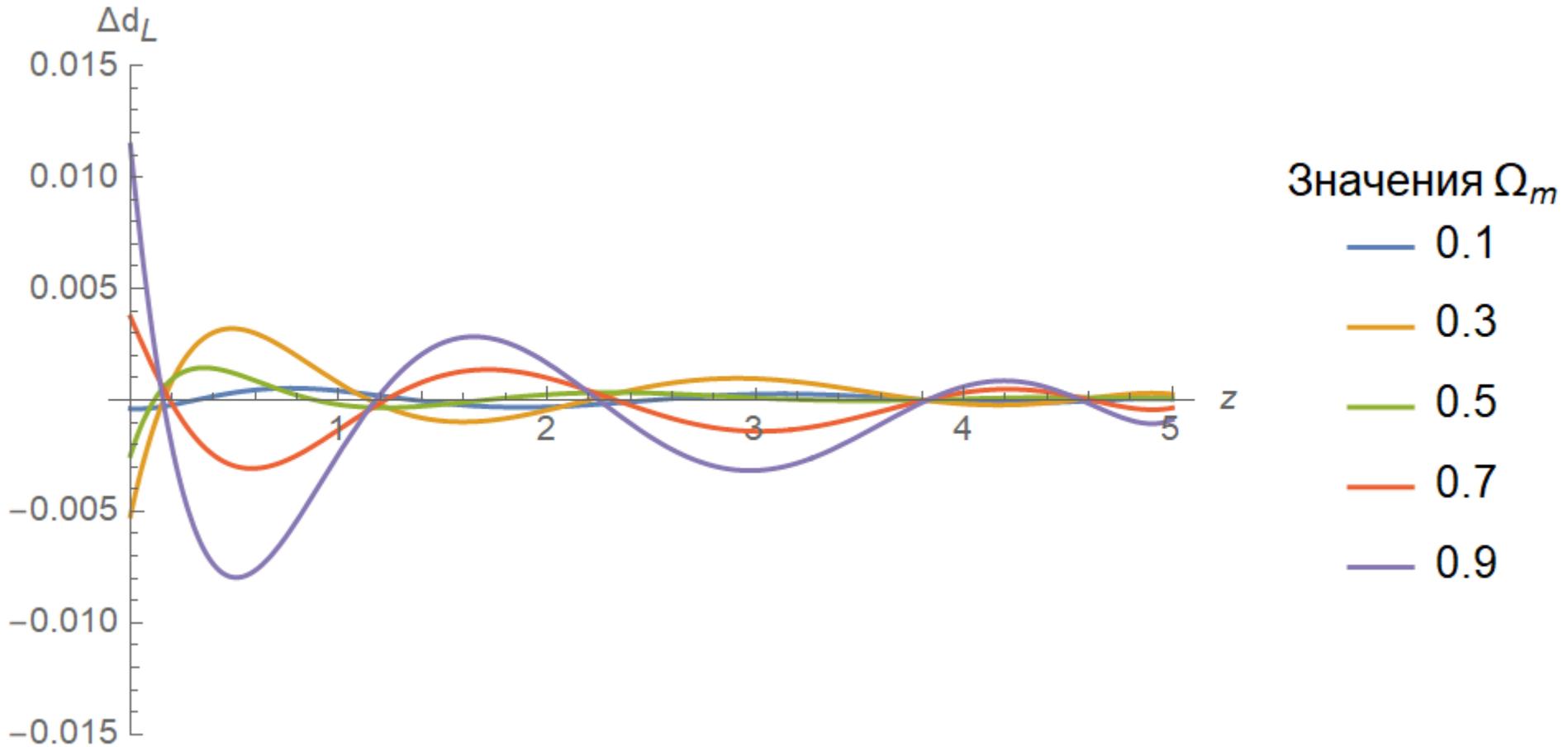


Рисунок 4. График относительной ошибки $\Delta d_L = \frac{d_L - d_L^{approx}}{d_L}$ для Λ CDM

Составление фиктивных данных

- Чтобы убедиться в том, что моё приближение можно использовать для анализа, его можно проверить аппроксимацией фиктивных данных, симулирующих зависимость модуля расстояния от z в Λ CDM при различных значениях параметра Ω_m ($\Omega_m=0.1$ и $\Omega_m=0.5$, при $H_0 = 70$ км/с/Мпк)
- Зависимость модуля расстояния от фотометрического расстояния:

$$\mu = 25 + 5 \log \left(\frac{d_l}{\text{Мпк}} \right)$$

Составление фиктивных данных

- Квазары будут распределены в промежутке $z \in [0.04; 5.098]$ (из-за этого $u = 5.098$) с шагом 0.003, относительная погрешность $\Delta\mu/\mu = 1\%$
- Сверхновые будут распределены в промежутке $z \in [0.01; 2.254]$ с шагом 0.004, относительная погрешность $\Delta\mu/\mu = 0.5\%$.
- Значения μ - случайные числа сгенерированные по закону нормального распределения с математическим ожиданием $\mu(z_i)$ и стандартным отклонением $\Delta\mu$.

Составление фиктивных данных

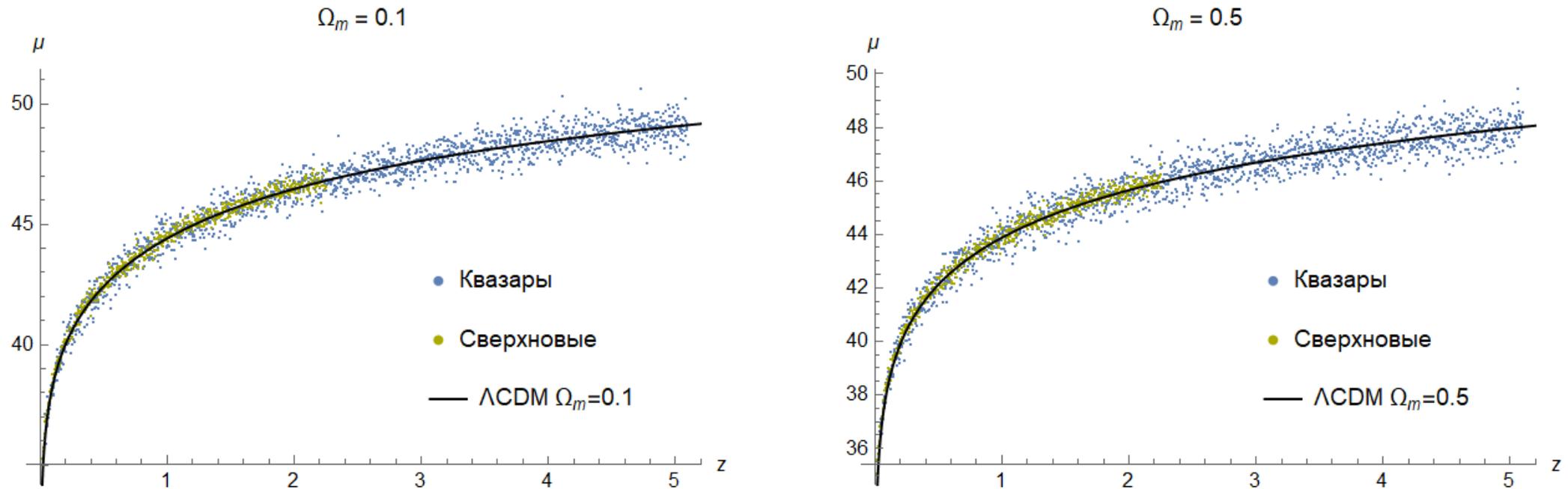


Рисунок 5. Фиктивные данные для Λ CDM при $\Omega_m = 0.1$ (слева) и $\Omega_m = 0.5$ (справа)

Составление фиктивных данных

Фиктивные данные	H_0 (км/с/Мпк)	Ω_m
$\Omega_m = 0.1$	70.2 ± 0.7	0.099 ± 0.005
$\Omega_m = 0.5$	70.0 ± 1.0	0.495 ± 0.026

Таблица 1 - результат аппроксимации фиктивной диаграммы Хаббла

Данные хорошо согласуются с Λ CDM. Далее, эти же наборы данных будут аппроксимироваться d_L^{approx} .

Проверка аппроксимации при $\Omega_m = 0.1$

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.1$; $H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
c_0	0.1005	0.1005 ± 0.0008
c_1	0.1141	0.1141 ± 0.0014
c_2	0.0101	0.0102 ± 0.0012
c_3	-0.0026	-0.0024 ± 0.0011
c_4	0.00068	0.0007 ± 0.0008
c_5	-0.00013	-0.00020 ± 0.00028

Таблица 2. коэффициенты ряда Чебышева при $\Omega_m = 0.1$

Проверка аппроксимации при $\Omega_m=0.1$

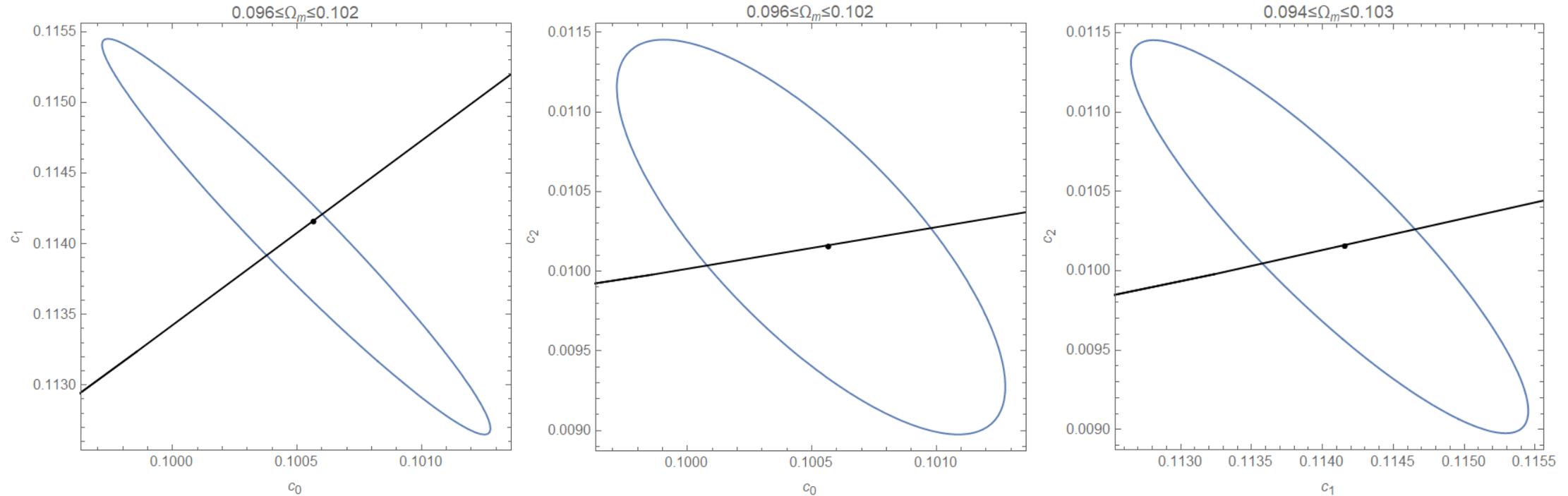


Рисунок 6. Доверительные интервалы в 1σ , соответствующие аппроксимации фиктивных данных при $\Omega_m = 0.1$. Черная кривая – параметрическая кривая связывающая коэффициенты c_i, c_j в Λ CDM при значении постоянной Хаббла из таблицы 1. Черная точка соответствует значениям коэффициентов при космологических параметрах из таблицы 1.

Проверка аппроксимации при $\Omega_m=0.1$

$$f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0) = \sum_{i=0}^5 \frac{(\hat{c}_i - c_i(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0))^2}{\sigma_i^2}$$

Минимум $f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0)$ при $\Omega_m = 0.1$ достигается при:

$$\hat{\Omega}_m = 0.0985 \quad \hat{H}_0 = 70.3142 \text{ км/с/Мпк}$$

Проверка аппроксимации при $\Omega_m=0.5$

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.5$; $H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
c_0	0.0631	0.0633 ± 0.0005
c_1	0.0679	0.0680 ± 0.0009
c_2	0.0035	0.0035 ± 0.0008
c_3	-0.00088	-0.0006 ± 0.0007
c_4	0.00029	0.0005 ± 0.0005
c_5	-0.00010	-0.00011 ± 0.00020

Таблица 3 коэффициенты ряда Чебышева при $\Omega_m = 0.5$

Проверка аппроксимации при $\Omega_m=0.5$

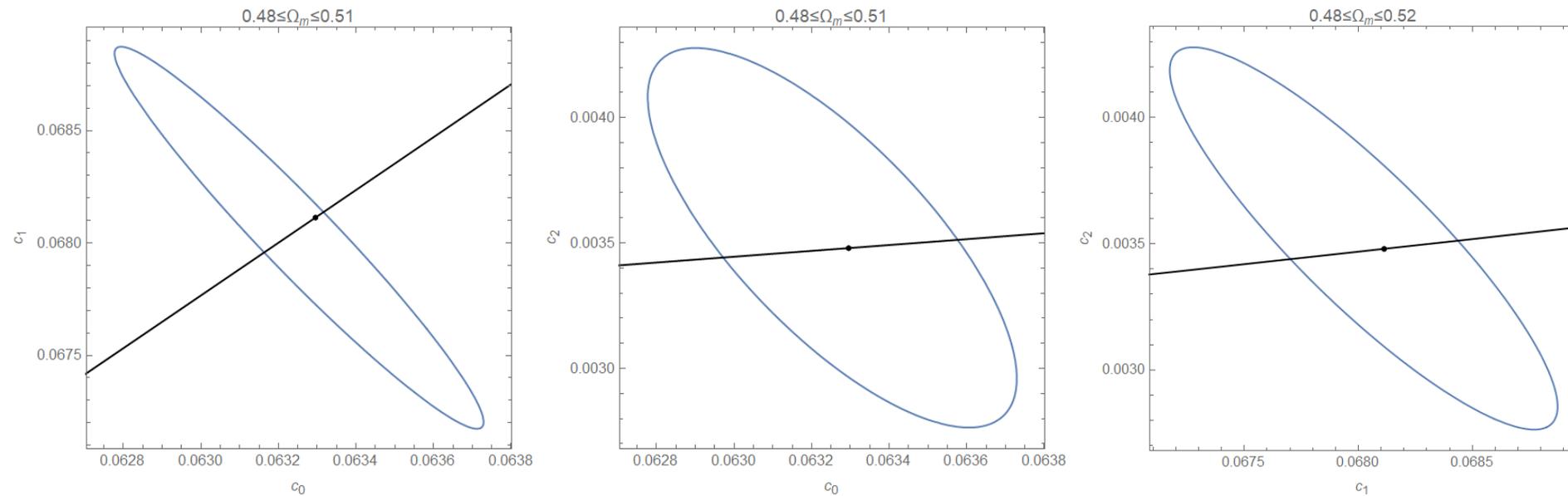


Рисунок 7. Доверительные интервалы в 1σ , соответствующие аппроксимации фиктивных данных при $\Omega_m = 0.5$.

Проверка аппроксимации при $\Omega_m=0.5$

$$f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0) = \sum_{i=0}^5 \frac{(\hat{c}_i - c_i(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0))^2}{\sigma_i^2}$$

Минимум $f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0)$ при $\Omega_m = 0.5$ достигается при:

$$\hat{\Omega}_m = 0.5020 \quad \hat{H}_0 = 69.7245 \text{ км/с/Мпк}$$

Сравнение с разложением по логарифмам

$$d_L^{\log poly} = \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{n=1}^5 a_n [\log(1+z)]^n$$

$$a_2 = \ln(10) \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \Omega_m \right), \quad a_3 = \ln(10)^2 \left(\frac{9}{8} \Omega_m^2 - 2\Omega_m + \frac{7}{6} \right),$$

$$a_4 = \ln(10)^3 \left(-\frac{135}{64} \Omega_m^3 + \frac{9}{2} \Omega_m^2 - \frac{47}{16} \Omega_m + \frac{5}{8} \right),$$

$$a_5 = \ln(10)^4 \left(\frac{31}{120} - \frac{25}{8} \Omega_m + \frac{315}{32} \Omega_m^2 - \frac{729}{64} \Omega_m^3 + \frac{567}{128} \Omega_m^4 \right)$$

Сравнение с разложением по логарифмам

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.1; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
H_0	70	68.2 ± 2.8
a_2	3.28	2.1 ± 0.9
a_3	5.18	13 ± 5
a_4	4.57	-13 ± 7
a_5	0.94	10 ± 7

Таблица 4. Коэффициенты ряда Тейлора и постоянная Хаббла при $\Omega_m = 0.1$

Сравнение с разложением по логарифмам

	Λ CDM: $\Omega_m = 0.1; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
H_0	70	69.3 ± 2.7
a_2	1.90	2.3 ± 0.8
a_3	1.47	4 ± 4
a_4	1.08	-3 ± 9
a_5	0.61	3 ± 6

Таблица 4. Коэффициенты ряда Тейлора и постоянная Хаббла при $\Omega_m = 0.5$

Сравнение с разложением по логарифмам

$$f(\hat{\Omega}_m) = \sum_{i=2}^5 \frac{(\hat{a}_i - a_i(\hat{\Omega}_m))^2}{\sigma_i^2}$$

Минимум $f(\hat{\Omega}_m)$ достигается при $\hat{\Omega}_m = 0.0164$ для $\Omega_m = 0.1$, и при $\hat{\Omega}_m = 0.6$ для $\Omega_m = 0.1$

Заключение

- В работе было предложено новое приближение для космографического анализа.
- Выполнена проверка на модельную независимость путём аппроксимации фиктивной диаграммы Хаббла.
- Полученные значения коэффициентов и оценки параметров совпадают с теми, которые должны получиться теоретически даже в том случае, когда разложение ведёт себя хуже всего ($\Omega_m = 0.5$). Следовательно, это приближение лучше используемого ранее разложения по логарифмам.