

**Московский государственный университет**

**имени М.В. Ломоносова**

**Физический факультет**

**Кафедра физики частиц и космологии**

## **Курсовая работа**

# **Стандартные свечи на космологических расстояниях**

**Выполнил:**

Студент 206 группы

Дьяченко Артём Андреевич

**Научный руководитель:**

член-корр. РАН, доктор физ.-

мат. наук, Горбунов Дмитрий

Сергеевич

г. Москва

2021

## Оглавление

1 Введение.....	3
2 Новый подход .....	4
3 Проверка приближения фиктивной диаграммой Хаббла .....	6
4 Сравнение с разложением в ряд Тейлора по логарифмам .....	9
5 Заключение .....	11
6 Список литературы .....	12

# 1. Введение

Стандартные свечи – астрономические объекты с известной светимостью. Их красное смещение определяется по смещению их спектральных линий, по сравнению с неподвижными источниками. Наблюдение за такими объектами позволяет понять, как расширяется вселенная, и узнать больше о природе тёмной энергии. Для анализа зависимости расстояния от красного смещения (диаграммы Хаббла) строят кривую, которая аппроксимирует эту зависимость для стандартных свеч. При этом используется модельно независимый подход: выражение для этой кривой не постулирует какую-либо космологическую модель. После этого, анализируются полученные в ходе аппроксимации параметры кривой и делаются выводы о состоятельности той или иной космологической модели. Так в [2-4] для анализа совокупности квазаров и сверхновых в большом диапазоне  $z$  использовалось разложение фотометрического расстояния по степеням  $\log(1+z)$ :

$$d_L^{\log poly} = \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{n=1}^5 a_n [\log(1+z)]^n$$

Аппроксимация этой формулой показывает, что диаграмма Хаббла для квазаров хорошо объясняется стандартной космологической моделью  $\Lambda$ CDM при  $z < 2$ , но при больших  $z$  данные наблюдений сильно отклоняются от стандартной модели. Позже ([1], [5]), было показано, что разложение по логарифмам не является модельно независимым: для  $z > 2$  оно работает лишь для некоторых значений космологических параметров. Поэтому результатам, полученным на основе этого разложения, нельзя доверять, так как ошибка, вызванная самими разложением, может быть неверно интерпретирована как отклонение от  $\Lambda$ CDM. Цель этой курсовой работы – предложить новое приближение для формулы фотометрического расстояния, и проверить его на модельную независимость.

## 2. Новый подход

Так как использование ряда Тейлора работает только в окрестности точки, в которой проводят разложение, при работе с широкими диапазонами  $z$  более целесообразно использовать такие аппроксимации, которые дают хорошее на всём рассматриваемом промежутке. Например, можно использовать аппроксимацию рядом многочленов Чебышева.

Параметр Хаббла и фотометрическое расстояние связаны соотношением

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz'$$

Эту величину можно аппроксимировать многочленами Чебышева.

$$d_L \approx \sum_{i=0}^n c_i T_i$$

Многочлены Чебышева – ортогональны на сегменте  $[-1; 1]$  с весовой функцией

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{fg}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Для того, чтобы аппроксимировать функцию на сегменте  $[0; u]$ , нужно отобразить  $[-1; 1]$  на этот сегмент при помощи функции

$$y(x) = \frac{u}{2}(x + 1)$$

Тогда коэффициенты  $c_i$  определяются следующим образом:

$$c_0 = \langle d_L(y(x)), T_0(x) \rangle \frac{1}{\pi}$$
$$c_k = \langle d_L(y(x)), T_k(x) \rangle \frac{2}{\pi}, k > 0$$

Коэффициенты  $c_i$  это и есть новые космографические параметры, их значения зависят от рассматриваемой модели и рассматриваемого интервала  $z$ .

Так как при вычислении коэффициентов интеграл брался для  $f(y(x))$ , где  $y(x) \in [-1, 1]$ , необходимо использовать многочлены Чебышева относительно функции:

$$x(y) = \frac{2x - u}{u}$$

Таким образом,  $d_L$  можно аппроксимировать рядом

$$d_L^{approx} = \sum_{i=0}^n c_i T_i \left( \frac{2z - u}{u} \right)$$

Чтобы проверить точность этой аппроксимации, можно составить график относительной ошибки для  $\Lambda$ CDM:

$$\frac{d_L^{approx} - d_L}{d_L}$$

Параметр Хаббла в  $\Lambda$ CDM:  $H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + 1 - \Omega_m}$

Для сегмента  $[0; 5]$  при  $n=5$  график будет иметь вид:

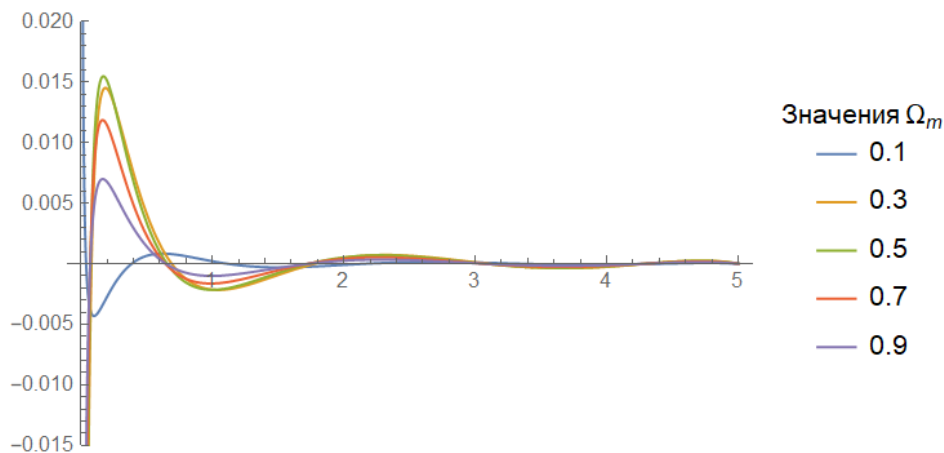


Рисунок 1. Относительная ошибка  $d_L$  и разложения по полиномам в  $\Lambda$ CDM

В случае  $\omega$ CDM при  $\Omega_m = 0.7$

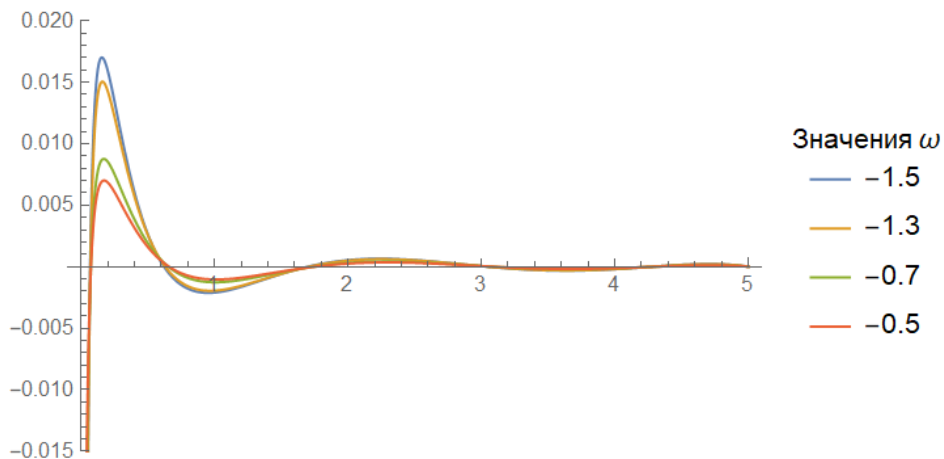


Рисунок 2. Относительная ошибка  $d_L$  и разложения по полиномам в  $\omega$ CDM

### 3. Проверка аппроксимации фиктивной диаграммой Хаббла

Чтобы убедиться в том, что эту аппроксимацию можно использовать для космографического анализа, я использую такой-же подход, как и в [1]. Сначала я составлю фиктивные зависимости модуля расстояния от  $z$ , которые будут воспроизводить плоскую  $\Lambda$ CDM с  $H_0 = 70$  км/с/Мпк в двух случаях: при  $\Omega_m = 0.1$  и  $\Omega_m = 0.5$  (последнее значение выбрано таким потому, что моя аппроксимация при нём ведёт себя хуже всего). После этого я аппроксимирую получившуюся зависимость модуля расстояния от  $z$  используя  $d_L^{approx}$  при  $n = 5$  ( $n$  выбрано таким потому, что это наименьшее число членов ряда, при котором относительная ошибка меньше 1% везде кроме окрестности точки  $z=0$ ) и сравню получившиеся коэффициенты с теми, которые должны быть в плоской  $\Lambda$ CDM при тех-же параметрах.

Зависимость модуля расстояния от фотометрического расстояния:

$$\mu = 25 + 5 \log\left(\frac{d_l}{\text{Мпк}}\right)$$

Квезары будут распределены в промежутке  $z \in [0.04; 5.098]$  (из-за этого  $\mu = 5.098$ ) с шагом 0.003, относительная погрешность  $\Delta\mu/\mu = 1\%$ . Сверхновые будут распределены в промежутке  $z \in [0.01; 2.254]$  с шагом 0.004, относительная погрешность  $\Delta\mu/\mu = 0.5\%$ . Значения  $\mu$  - случайные числа сгенерированные по закону нормального распределения с математическим ожиданием  $\mu(z_i)$  и стандартным отклонением  $\Delta\mu$ .

Чтобы убедиться в том, что фиктивные данные согласуются с  $\Lambda$ CDM, я восстановлю значения космологических параметров путём аппроксимации данных формулой фотометрического расстояния в  $\Lambda$ CDM:

$$d_L(z, \Omega_m, H_0) = (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + 1 - \Omega_m}} dz'$$

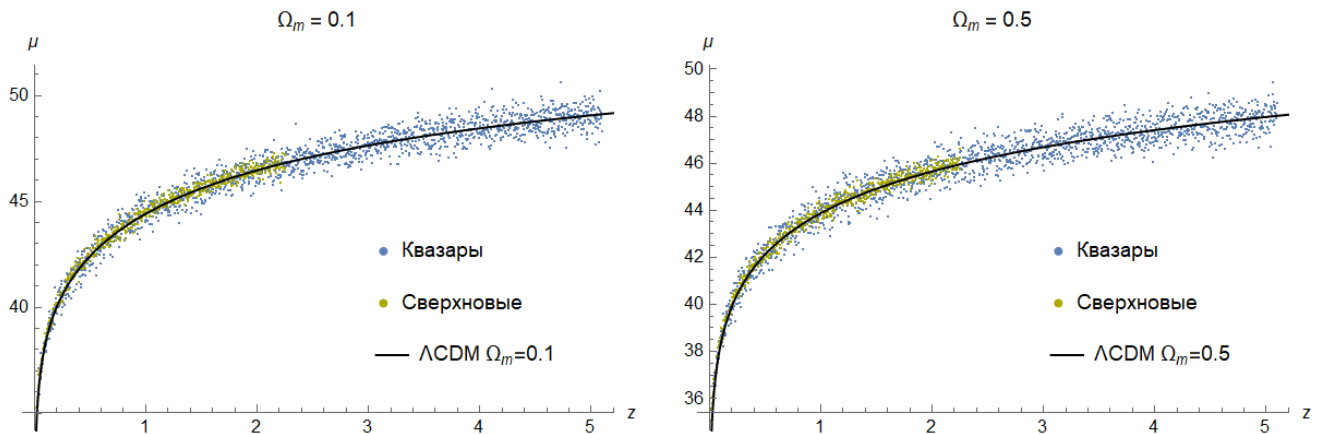


Рисунок 3. Фиктивные данные для  $\Lambda$ CDM при  $\Omega_m = 0.1$  (слева) и  $\Omega_m = 0.5$  (справа)

Фиктивные данные	$H_0$ (км/с/Мпк)	$\Omega_m$
$\Omega_m = 0.1$	$70.2 \pm 0.7$	$0.099 \pm 0.005$
$\Omega_m = 0.5$	$70.0 \pm 1.0$	$0.495 \pm 0.026$

Таблица 1 - результат аппроксимации диаграммы Хаббла

Как и ожидалось, данные хорошо согласуются с  $\Lambda$ CDM. Далее, эти же наборы данных будут аппроксимироваться  $d_L^{approx}$ .

	$\Lambda$ CDM: $\Omega_m = 0.1; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
$c_0$	0.1005	$0.1005 \pm 0.0008$
$c_1$	0.1141	$0.1141 \pm 0.0014$
$c_2$	0.0101	$0.0102 \pm 0.0012$
$c_3$	-0.0026	$-0.0024 \pm 0.0011$
$c_4$	0.00068	$0.0007 \pm 0.0008$
$c_5$	-0.00013	$-0.00020 \pm 0.00028$

Таблица 2 коэффициенты ряда Чебышева при  $\Omega_m = 0.1$

	$\Lambda$ CDM: $\Omega_m = 0.5; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
$c_0$	0.0631	$0.0633 \pm 0.0005$
$c_1$	0.0679	$0.0680 \pm 0.0009$
$c_2$	0.0035	$0.0035 \pm 0.0008$
$c_3$	-0.00088	$-0.0006 \pm 0.0007$
$c_4$	0.00029	$0.0005 \pm 0.0005$
$c_5$	-0.00010	$-0.00011 \pm 0.00020$

Таблица 3 коэффициенты ряда Чебышева при  $\Omega_m = 0.5$

Полученные коэффициенты совпадают с теми, которые соответствуют  $\Lambda$ CDM с заданными параметрами, это говорит о том, что предложенное мною приближение – модельно независимо.

По этим коэффициентам можно оценить значения космологических параметров, для этого надо найти минимум функции:

$$f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0) = \sum_{i=0}^5 \frac{(\hat{c}_i - c_i(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0))^2}{\sigma_i^2}$$

Где  $\hat{c}_i$  – статистическая оценка космографического коэффициента  $c_i$ ,  $\sigma_i^2$  – дисперсия,  $c_i(\Omega_m, H_0)$  – космографический коэффициент как функция космологических параметров.

$$c_i(\Omega_m, H_0) = \int_{-1}^1 \frac{T_i(x) d_L\left(\frac{5.098}{2}(1+z), \Omega_m, H_0\right)}{\sqrt{1-z^2}} dz * \begin{cases} \frac{1}{\pi}; & i = 0 \\ \frac{2}{\pi}; & i > 0 \end{cases}$$

Минимум  $f(\hat{\Omega}_m, \hat{H}_0)$  при  $\Omega_m = 0.1$  достигается при:

$$\hat{\Omega}_m = 0.0985 \quad \hat{H}_0 = 70.3142 \text{ км/с/Мпк}$$

Для случая  $\Omega_m = 0.5$ :

$$\hat{\Omega}_m = 0.5020 \quad \hat{H}_0 = 69.7245 \text{ км/с/Мпк}$$

Для того, чтобы нагляднее показать точность в определении этих коэффициентов, можно изобразить на плоскости  $(c_i, c_j)$  доверительные интервалы статистических оценок первых трех коэффициентов ряда.

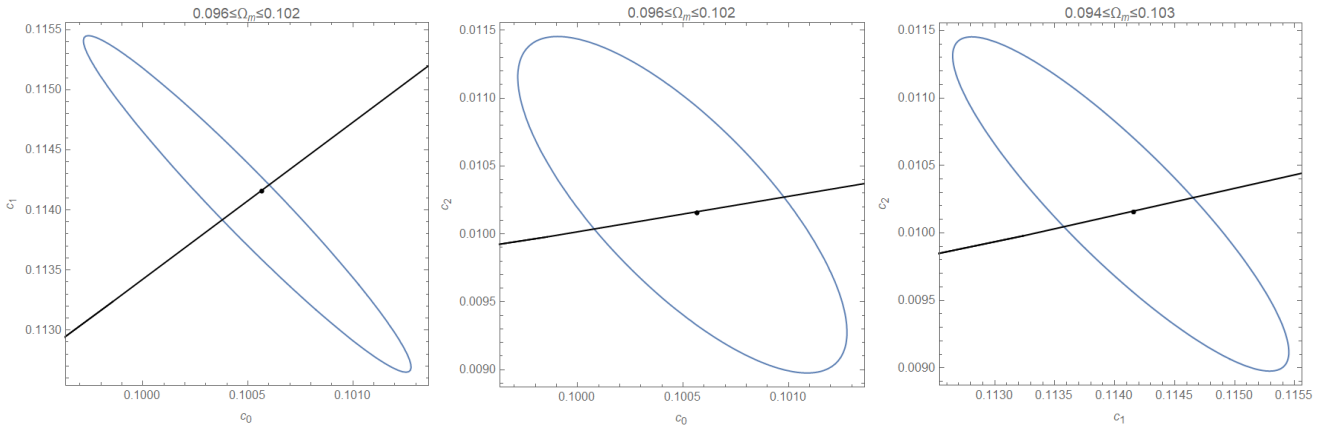


Рисунок 4. Доверительные интервалы в  $1\sigma$ , соответствующие аппроксимации фиктивных данных при  $\Omega_m = 0.1$ . Черная кривая – параметрическая кривая связывающая коэффициенты  $c_i, c_j$  в  $\Lambda$ CDM при значении постоянной Хаббла из таблицы 1. Черная точка соответствует значениям коэффициентов при космологических параметрах из таблицы 1.

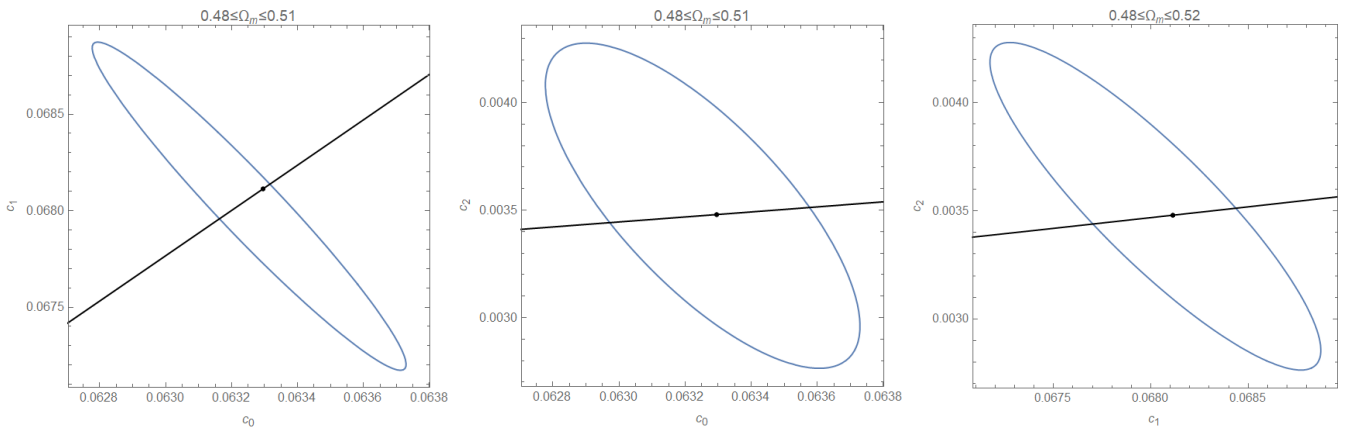


Рисунок 5. Доверительные интервалы в  $1\sigma$ , соответствующие аппроксимации фиктивных данных при  $\Omega_m = 0.5$ .



#### 4. Сравнение с разложением в ряд Тейлора по логарифмам

Для более честного сравнения можно сделать проверку на модельную независимость для разложения по логарифмам, используя те-же наборы данных которые использовались для проверки ряда Чебышева.

В этом случае, фотометрическое расстояние аппроксимируется рядом:

$$d_L^{\log poly} = \ln(10) \frac{c}{H_0} \sum_{n=1}^5 a_n [\log(1+z)]^n$$

В котором  $a_1 = 1$ , чтобы воспроизводить закон Хаббла в окрестности  $z = 0$ , а коэффициенты  $a_2 \dots a_5$  – космографические коэффициенты. В  $\Lambda$ CDM они зависят от  $\Omega_m$  следующим образом:

$$a_2 = \ln(10) \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \Omega_m \right), \quad a_3 = \ln(10)^2 \left( \frac{9}{8} \Omega_m^2 - 2\Omega_m + \frac{7}{8} \right),$$

$$a_4 = \ln(10)^3 \left( -\frac{135}{64} \Omega_m^3 + \frac{9}{2} \Omega_m^2 - \frac{47}{16} \Omega_m + \frac{5}{8} \right),$$

$$a_5 = \ln(10)^4 \left( \frac{31}{120} - \frac{25}{8} \Omega_m + \frac{315}{32} \Omega_m^2 - \frac{729}{64} \Omega_m^3 + \frac{567}{128} \Omega_m^4 \right)$$

	$\Lambda$ CDM: $\Omega_m = 0.1; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
$H_0$	70	$68.2 \pm 2.8$
$a_2$	3.28	$2.1 \pm 0.9$
$a_3$	5.18	$13 \pm 5$
$a_4$	4.57	$-13 \pm 7$
$a_5$	0.94	$10 \pm 7$

Таблица 4. Коэффициенты ряда Тейлора и постоянная Хаббла при  $\Omega_m = 0.1$

	$\Lambda$ CDM: $\Omega_m = 0.5; H_0 = 70$ км/с/Мпк	Аппроксимация
$H_0$	70	$69.3 \pm 2.7$
$a_2$	1.90	$2.3 \pm 0.8$
$a_3$	1.47	$4 \pm 4$
$a_4$	1.08	$-3 \pm 9$
$a_5$	0.61	$3 \pm 6$

Таблица 5. Коэффициенты ряда Тейлора и постоянная Хаббла при  $\Omega_m = 0.1$

Минимум функции:

$$f(\hat{\Omega}_m) = \sum_{i=2}^5 \frac{(\hat{a}_i - a_i(\hat{\Omega}_m))^2}{\sigma_i^2}$$

для  $\Omega_m = 0.1$  достигается при  $\hat{\Omega}_m = 0.0164$ , а для  $\Omega_m = 0.5$  при  $\hat{\Omega}_m = 0.6$ . Используя разложение по логарифмам, нельзя определить космологические параметры даже в том случае, когда данные полностью соответствуют им.

## 5. Заключение

В работе было предложено новое приближение для космографического анализа. Выполнена проверка на модельную независимость путём аппроксимации фиктивной диаграммы Хаббла. Полученные значения коэффициентов и оценки параметров совпадают с теми, которые должны получиться теоретически даже в том случае, когда разложение ведёт себя хуже всего ( $\Omega_m = 0.5$ ). Следовательно, это приближение лучше используемого ранее разложения по логарифмам.

## 6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Banerjee, E. O Colgain, M. Sasaki, M. M. Sheikh-Jabbari and T. Yang, “On cosmography in the cosmic dark ages: are we still in the dark?,” [arXiv:2009.04109 [astro-ph.CO]].
- [2] G. Risaliti and E. Lusso, “Cosmological constraints from the Hubble diagram of quasars at high redshifts,” *Nature Astron.* 3, no.3, 272-277 (2019) [arXiv:1811.02590 [astro-ph.CO]].
- [3] E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti, M. Paolillo, S. Bisogni, E. Nardini and L. Amati, “Tension with the  $\Lambda$ CDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts,” *Astron. Astrophys.* 628, L4 (2019) [arXiv:1907.07692 [astro-ph.CO]].
- [4] E. Lusso, G. Risaliti, E. Nardini, G. Bargiacchi, M. Benetti, S. Bisogni, S. Capozziello, F. Civano, L. Eggleston, M. Elvis, G. Fabbiano, R. Gilli, A. Marconi, M. Paolillo, E. Piedipalumbo, F. Salvestrini, M. Signorini and C. Vignali, “Quasars as standard candles III. Validation of a new sample for cosmological studies,” [arXiv:2008.08586 [astro-ph.GA]].
- [5] T. Yang, A. Banerjee and E. O Colgain, “On cosmography and  $\Lambda$ CDM tensions at high redshift,” [arXiv:1911.01681 [astro-ph.CO]].
- [6] Hans Petter Langtangen “Approximation of functions”.