

Московский государственный университет  
имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Устойчивость, хаос и сложность в классической и  
квантовой механике

Курсовая работа  
студента 215 группы  
Чистякова Всеволода Всеволодовича

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Белокуров Владимир Викторович

Москва 2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>I</b>	<b>Основные понятия</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Устойчивость</b>	<b>3</b>
2.1	Понятие устойчивости . . . . .	3
2.2	Линеаризация . . . . .	4
2.3	Показатель Ляпунова . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Классический хаос</b>	<b>6</b>
3.1	Хаотические и регулярные системы . . . . .	6
3.2	Эргодичность . . . . .	6
3.3	Перемешивание . . . . .	7
3.4	Примеры систем с хаосом . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Квантовый хаос</b>	<b>8</b>
4.1	Квантовый аналог показателя Ляпунова . . . . .	8
4.2	Сложность . . . . .	11
<b>II</b>	<b>Рассмотрение модельных задач</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Задача о маятнике с подвижной точкой подвеса</b>	<b>13</b>
5.1	Классическая задача . . . . .	13
5.2	Квантовая задача . . . . .	16
5.3	Приближённое исследование на устойчивость . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Численные расчёты</b>	<b>20</b>
6.1	Проверка алгоритма на известных результатах . . . . .	21
6.2	Осциллятор с периодической частотой . . . . .	25
6.3	Нелинейный осциллятор с периодической внешней силой . . . . .	29
6.3.1	Классическая задача . . . . .	29
6.3.2	Квантовая задача . . . . .	35

<b>7 Приложение: описание алгоритма вычислений</b>	<b>39</b>
7.1 Аппроксимация квантовомеханических операторов . . . . .	41
7.2 Аппроксимация оператора эволюции . . . . .	42
7.3 Программная реализация алгоритма вычислений . . . . .	43
<b>8 Заключение</b>	<b>43</b>

# 1 Введение

В настоящей работе обозреваются понятия устойчивости и хаоса в классической и квантовой механике, рассматриваются различные характеристики хаоса для классических и квантовых систем. Понятие квантового хаоса представляет интерес в связи с некоторыми моделями квантовой теории поля такими, как модель SYK. Анализ изученных понятий производится в двух модельных задачах: задаче о перевёрнутом маятнике с колеблющейся точкой подвеса и задаче о нелинейном осцилляторе с обладающей двумя минимумами потенциальной энергией в поле периодической внешней силы.

## Часть I

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## 2 Устойчивость

### 2.1 Понятие устойчивости

Рассмотрим систему  $n$  линейных дифференциальных уравнений относительно величин  $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ , которую запишем в векторном виде

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \tag{1}$$

Решение данной системы зависит от  $n$  произвольных постоянных, которые определяются начальными условиями

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

В то же время, начальные значения  $\mathbf{X}_0$  обычно бывают известны с некоторой погрешностью, т. е. приближённо. А решение системы описывает траекторию, вообще говоря, отличную от истинной. В некоторых случаях это, однако, не умаляет предсказательной силы модели, так

как при малых погрешностях начальных условий траектория также будет мало отличаться от истинной. Существуют и случаи, в которых даже при малых начальных отклонениях истинная и приближённая траектории будут сильно отличаться друг от друга. Для классификации таких случаев было введено понятие устойчивости решения дифференциального уравнения:

Решение дифференциального уравнения  $\mathbf{X}(t)$  называется устойчивым (по Ляпунову) если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для любого другого решения  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ , удовлетворяющего условию  $\|\tilde{\mathbf{X}}(0) - \mathbf{X}(0)\| < \delta$  выполняется  $\|\tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)\| < \varepsilon$  при любом  $t > 0$ .

Норма вектора определяется как

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

## 2.2 Линеаризация

Исследование на устойчивость решения системы (1) представляет собой довольно сложную задачу. Одним из способов её упрощения является линеаризация в окрестности решения  $\mathbf{X}(t)$ .

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}(t)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}, t) = F(\mathbf{X}, t) + \hat{A}(t)\delta\mathbf{X} + o(\|\delta\mathbf{X}\|)$$

$$\hat{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)}$$

подставляя полученные выражения в систему (1) получим:

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = \hat{A}\delta\mathbf{X} + o(\|\delta\mathbf{X}\|) \tag{2}$$

Таким образом, исследование устойчивости произвольного решения нелинейной системы (1) свелось к исследованию устойчивости тривиального решения  $\delta\mathbf{X} = 0$  системы (2). В общем случае зависимости матрицы  $\hat{A}$  от времени эта задача не является легко разрешимой. Если матрица  $\hat{A}$  не зависит от времени и выполняются условия, при которых нелинейными членами можно пренебречь (о них будет сказано после некоторого дополнительного анализа), исследование на устойчивость можно произвести аналитически в конечном виде. Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами.

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = \hat{A}\delta\mathbf{X}$$

Согласно [7], её решение имеет вид :

$$\delta\mathbf{X}(t) = e^{\hat{A}t}\delta\mathbf{X}(0)$$

Матрица  $A$  имеет  $n$  собственных значений  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  (некоторые из них, возможно, комплексны), предположим также, для простоты, что все собственные значения матрицы  $\hat{A}$  невырождены. Разложим вектор  $\mathbf{X}(0)$  по собственным векторам матрицы  $\hat{A}$ :  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ ,

$$\delta\mathbf{X}(0) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{h}_i$$

решение запишется в виде

$$\delta\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{h}_i e^{\lambda_i t} \quad (3)$$

Ранее упоминалось об условиях, при которых нелинейной частью (2) можно пренебречь. Среди слагаемых в (3) присутствуют экспоненциально возрастающие  $Re\lambda > 0$ , экспоненциально убывающие  $Re\lambda < 0$  и осциллирующие  $Re\lambda = 0$ . В случае, когда есть хотя бы одно экспоненциально возрастающее слагаемое, решение, очевидно, неустойчиво. Если все слагаемые экспоненциально убывают, решение устойчиво. Если же присутствует хотя бы одно осциллирующее слагаемое и нет экспоненциально растущего, то при  $t \rightarrow \infty$  именно осциллирующая часть станет определяющей и пренебрегать нелинейными слагаемыми в (2) нельзя.

### 2.3 Показатель Ляпунова

Пусть существует хотя бы одно собственное значение, у которого  $Re\lambda > 0$ . Рассмотрим собственное значение с наибольшей действительной частью. Без ограничения общности можно считать, что это  $\lambda_1$ . При  $t \rightarrow \infty$  соответствующее слагаемое будет давать основной вклад по сравнению с остальными.

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{X}(t)\| &= |c_1| e^{\lambda_1 t} + \alpha(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) &= 0 \end{aligned}$$

Число  $\lambda_1$  называется показателем Ляпунова. Оно характеризует скорость расхождения двух близких траекторий. Можно обобщить это определение на случай, когда матрица  $\hat{A}$  зависит от времени [3].

$$\lambda = \lim_{\substack{\|\delta\mathbf{X}\| \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{X}(t)\|}{\|\delta\mathbf{X}(0)\|}$$

Показатель Ляпунова можно назвать мерой экспоненциального расхождения траекторий, так как при полиномиальном росте  $\|\delta\mathbf{X}(t)\|$  показатель Ляпунова равен 0.

## 3 Классический хаос

### 3.1 Хаотические и регулярные системы

Среди неустойчивых систем существуют системы с особенно сложным поведением. В них траектория точки  $\mathbf{X}(t)$  неотличима от некоторого случайного процесса. Это делает возможным применение методов и рассмотрение характеристик величины  $\mathbf{X}(t)$ , аналогичных тем, что используются для случайных величин в теории вероятности. Такие системы называются хаотическими, в противоположность регулярным системам, в которых движение может быть хоть и неустойчивым, но не случайным. Приведём пример неустойчивости, не приводящей к хаосу. Любое решение уравнения

$$\dot{x} = x$$

неустойчиво. Однако, поведение  $x(t)$  тривиально:

$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$  при  $x(0) \neq 0$  и  $x(t) = 0$  при  $x(0) = 0$ . Тривиальное поведение связано с возможностью неограниченного возрастания  $x$ . Если  $\|\mathbf{X}(t)\|$  остаётся ограниченной в течение всего времени (финитное движение) появляется возможность возникновения хаоса. При этом наблюдаются два тесно связанных с хаосом явления: эргодичность и перемешивание

### 3.2 Эргодичность

Пусть  $\mathbf{X}(0) \in U_1$ ,  $U_1 \subset R^n$  -ограниченное множество. Тогда все траектории  $\mathbf{X}(t)$  лежат в некотором ограниченном множестве  $U$ .

Динамическая система называется **эргодической** если существует такая траектория  $\mathbf{X}(t)$ , что в сколь угодно малой окрестности любой точки  $U$  лежит хотя бы одна точка данной траектории.

Эргодическими являются и некоторые регулярные системы, совершающие финитное движение. Примером может являться маятник, совершающий колебания на плоскости, которые являются суперпозицией колебаний вдоль оси  $x$  с частотой  $\omega_1$  и вдоль оси  $y$  с частотой  $\omega_2$ . В случае, когда отношение  $\omega_1/\omega_2$  иррационально, движение является эргодическим.

В случае эргодического движения можно говорить о плотности распределения траектории на фазовом пространстве  $\rho(\mathbf{X})$  [5]. С помощью этой плотности можно производить усреднение различных функций  $\varphi(\mathbf{X})$  на фазовом пространстве.

$$\langle \varphi(\mathbf{X}) \rangle_\rho = \int_U \varphi(\mathbf{Y}) \rho(\mathbf{Y}) dY \quad dY = dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

причём вычисленное таким образом среднее будет совпадать со средним по времени:

$$\langle \varphi(\mathbf{X}) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{X}(t)) dt$$

$$\langle \varphi(\mathbf{X}) \rangle_t = \langle \varphi(\mathbf{X}) \rangle_\rho$$

### 3.3 Перемешивание

Как отмечалось выше, свойством эргодичности могут обладать и некоторые регулярные системы. Для хаотических систем наблюдается также явление перемешивания. Оно заключается в следующем [5]. Рассмотрим автокорреляционную функцию (для простоты ограничимся одномерным случаем)

$$C(\tau) = \langle \hat{x}(t + \tau)\hat{x}(t) \rangle$$

где

$$\hat{x}(t) = x(t) - \langle x \rangle$$

Для регулярных систем автокорреляционная функция постоянна, либо осциллирует. Для хаотических систем автокорреляционная функция быстро (обычно экспоненциально) спадает,  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$  являются "независимыми случайными величинами". Отличие между регулярными эргодическими системами и системами с перемешиванием заключается и в поведении преобразования Фурье функции  $C(\tau)$

$$\hat{C}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Спектр дискретен в случае регулярного движения и непрерывен в случае хаотического.

### 3.4 Примеры систем с хаосом

Исторически одной из первых моделей, в которых был замечен хаос являлась система уравнений Лоренца, описывающая конвективные потоки в жидкости

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x - y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

В зависимости от параметра  $r$  могут наблюдаться как различные регулярные, так и хаотический режим. Особенностью данной системы также является возникновение притягивающего множества — аттрактора, возможность возникновения такого множества связана с диссипативными свойствами системы.

Имеются различные колебательные системы, в которых обнаруживается хаос. Например [4]

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \frac{1}{2}x(1 - x^2) = f \cos \nu t$$

При различных параметрах  $f$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$  возможно как регулярное, так и хаотическое поведение. Этот пример будет детально проанализирован в дальнейшем.

Хаос может возникать и в моделях, использующих дискретные отображения [2]. Например, квадратичное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

При  $r < r_1$  у системы существует помимо нулевого также другое положение равновесия  $f(x^*) = x^*$ , затем при  $r > r_1$  это положение равновесия исчезает, однако существует положение равновесия у повторного отображения  $f(f(x^*)) = x^*$ , таким образом возникает двухточечный цикл, при дальнейшем возрастании  $r$  возникают 4, 8... $2^n$ -точечные циклы, и при некотором  $r_\infty$  последовательность  $x_n$  становится хаотической

## 4 Квантовый хаос

Рассмотренные выше понятия относятся к классическим системам. Возникает вопрос: каковы особенности квантовых систем, классические пределы которых обнаруживают хаотическое поведение? По каким характеристикам квантовых систем можно судить об этих особенностях?

### 4.1 Квантовый аналог показателя Ляпунова

Перепишем определение показателя Ляпунова в несколько ином виде.

$$e^{\lambda t} = \lim_{\|\delta\mathbf{X}(0)\| \rightarrow 0} \frac{\|\delta\mathbf{X}(t)\|}{\|\delta\mathbf{X}(0)\|}$$

Рассмотрим для простоты одномерный случай гамильтоновой системы, описываемой координатой  $q$  и импульсом  $p$

$$\frac{\partial q(t)}{\partial q(0)} \approx \frac{\delta q(t)}{\delta q(0)} \sim e^{\lambda t}$$

Для приведения этого выражения к виду, удобному для квантования воспользуемся известным свойством скобок Пуассона

$$\{f, p\} = -\frac{\partial f}{\partial q}$$

Где  $f(p, q)$ -произвольная функция на фазовом пространстве. Рассматривая  $q(t)$ ,  $p(t)$  при каждом заданном  $t$  как функции на фазовом пространстве  $(q(0), p(0))$ :  $q(t) = f_t(q(0), p(0))$  можно записать

$$\frac{\partial q(t)}{\partial q(0)} = -\{q(t), p(0)\}$$



Далее совершим процедуру канонического квантования:

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{g}]$$

Можно предположить, что в квантовом случае экспоненциально расти мог бы матричный элемент

$$\langle out | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)] | in \rangle$$

Недостатком этого выражения является зависимость от начального и конечного состояний. Чтобы избежать этого недостатка можно рассмотреть несколько иное выражение, где произведено суммирование по конечным и усреднение по начальным состояниям

$$C_T(t) = \sum_n \frac{e^{-E_n/T}}{Z} \sum_{out} \langle n | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)]^\dagger | out \rangle \langle out | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)] | n \rangle$$

$$C_T(t) = \sum_n \frac{e^{-E_n/T}}{Z} c_n(t) \quad c_n(t) = - \langle n | [\hat{q}(t), \hat{p}(0)]^2 | n \rangle$$

$$C_T(t) = -Tr(\hat{\rho}[\hat{q}(t), \hat{p}(0)]^2) \quad \hat{\rho} = \frac{e^{-\hat{H}/T}}{Z} \quad Tr\hat{\rho} = 1$$

Величины  $c_n(t)$  и  $C_T(t)$  носят название ОТОС ("Out-of-time-order correlator"). Если классический предел данной системы обнаруживает хаотическое поведение, то ожидается, что

$$C_T(t) \sim e^{2\lambda t}$$

Вычислим функцию  $C_T(t)$  в единственном случае, когда это можно сделать аналитически - для гармонического осциллятора. Пусть собственная частота осциллятора  $\omega$ , будем считать эту величину либо вещественной, либо чисто мнимой  $\omega = i\lambda$  где  $\lambda$ -некоторое вещественное число. Гамильтониан имеет стандартный вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{x}^2)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{p} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}] = -\omega \hat{x}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}] = \hat{p}$$

решение этой системы операторных уравнений [12]:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) \cos \omega t + \frac{\hat{p}(0)}{\omega} \sin \omega t$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}(t) &= \hat{x}(0)\omega \sin \omega t + \hat{p}(0) \cos \omega t \\
[\hat{x}(t), \hat{p}(0)] &= i\hbar \cos \omega t \\
c_n(t) &= \hbar^2 \cos^2 \omega t \\
C_T(t) &= Tr(\hat{\rho}\hbar^2 \cos^2 \omega t) = \hbar^2 \cos^2 \omega t
\end{aligned}$$

эта величина осциллирует, когда  $\omega$ -вещественное. Если  $\omega = i\lambda$ , то:

$$\begin{aligned}
c_n(t) &= \hbar^2 \cosh^2(\lambda t) \\
C_T(t) &= \hbar^2 \cosh^2 \lambda t = \frac{\hbar^2}{4}(e^{2\lambda t} + 2 + e^{-2\lambda t})
\end{aligned}$$

В соответствии с предположением, наблюдается экспоненциальный рост.

Следует отметить во-первых, что для ограниченных систем экспоненциальный рост  $C_T(t)$  наблюдается лишь в течение конечного промежутка времени, после которого рост сменяется колебаниями около некоторого значения. Схожесть динамики квантовой частицы и её классического аналога подразумевает достаточно сильную локализацию волновой функции. В момент времени, когда неопределённость координаты станет порядка величины размеров области движения, уже нельзя будет говорить о схожести классического и квантового поведения частицы. Для хаотической системы с показателем Ляпунова  $\lambda$  момент времени может быть сверху оценен временем Эренфеста  $t_* \sim \frac{1}{\lambda} \ln \frac{S}{\hbar}$  где  $S$  - характерная величина классического действия.

Во-вторых, не для всех классически хаотических систем наблюдается экспоненциальный рост  $C_T(t)$ . Примером могут служить так называемые бильярды. Пусть  $U$ -некоторая область на плоскости, и частица находится в поле с потенциальной энергией

$$V(x, y) = \begin{cases} V(x, y) = 0 & x \in U \\ V(x, y) = \infty & x \notin U \end{cases} \quad (4)$$

Классическая система с потенциалом такого вида является хаотической, если область  $U$ , не обладает симметрией, обеспечивающей наличие дополнительного интеграла движения помимо энергии. Например, если  $U$ - круг то помимо энергии существует также интеграл  $L = xp_y - yp_x$ . Если  $U$ -прямоугольник, то помимо энергии  $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2)$  существует также ещё один независимый интеграл (например,  $p_x^2$ ). Примером потенциала, в котором такой второй независимый интеграл движения отсутствует может служить потенциал в форме стадиона.

Как показывают численные расчёты [7], в случае квантовой системы с потенциалом (4) и  $U$  в виде стадиона, функция  $C_T(t)$  не обнаруживает экспоненциального роста даже на протяжении времени  $t_*$ . Это связано с тем, что различие между классическим и квантовым описанием процесса столкновения начинает проявляться уже к моменту времени  $t_s \ll t_*$ .

## 4.2 Сложность

Волновая функция квантовой системы удовлетворяет уравнению (положим для простоты  $\hbar = 1$ )

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

его решение можно представить в виде:

$$\psi(t) = \hat{U}(t)\psi(0)$$

где  $\hat{U}$ - оператор эволюции. В случае гамильтониана  $\hat{H}$ , не зависящего от времени это оператор имеет вид

$$\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$$

Любое состояние  $\psi(t)$  может быть получено из начального состояния  $\psi(0)$  путём унитарного преобразования  $\hat{U}$ . Рассмотрим основные идеи, касающиеся понятия сложности состояния  $\psi(t)$ , изложенные в [17]. В теории информации под сложностью понимается количество операций, которые нужно совершить над исходными данными для получения требуемого результата. Пусть имеется некоторое исходное состояние  $\psi_R$  которое переводится оператором  $\hat{U}$  в целевое состояние  $\psi_T$ . Необходимо выбрать некий набор элементарных операций, на которые разлагается  $\hat{U}$  и функцию, характеризующую количество таких операций. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда таких операций конечное число. Пусть имеется система связанных осцилляторов с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega^2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + k(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)^2)$$

преобразованиями

$$\hat{x}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}_1 \pm \hat{x}_2)$$

гамильтониан приводится к виду

$$\hat{H} = \hat{H}_+ + \hat{H}_- \quad \hat{H}_\pm = \frac{1}{2}(\hat{p}_\pm^2 + \omega_\pm^2 x_\pm^2)$$

$$\omega_+^2 = \omega^2 \quad \omega_-^2 = \omega^2 + 2k$$

можно представить волновую функцию основного состояния системы двух связанных осцилляторов в следующем виде:

$$\psi_0(x_+, x_-) = \psi_0(x_+)\psi_0(x_-) = \frac{(\omega_+\omega_-)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega_+x_+^2 + \omega_-x_-^2)\right]$$

выражая через старые переменные  $x_1 x_2$ :

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{(\omega_1\omega_2 - \beta^2)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\omega_1x_1^2 + \omega_2x_2^2 + 2\beta x_1x_2) \right]$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-) \quad \beta = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)$$

Выберем в качестве исходной функцию

$$\psi_R(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}} \exp \left[ -\frac{\omega_0}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right]$$

А в качестве преобразований

$$\hat{Q}_{ab} = e^{i\varepsilon\hat{x}_a\hat{p}_b} \quad (a \neq b)$$

$$\hat{Q}_{aa} = e^{\varepsilon/2} e^{i\varepsilon\hat{x}_a\hat{p}_a}$$

они действуют на функцию  $\psi(x_1, x_2)$  следующим образом

$$\hat{Q}_{11}\psi(x_1, x_2) = e^{\varepsilon/2}\psi(e^\varepsilon x_1, x_2)$$

$$\hat{Q}_{21}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1 + \varepsilon x_2, x_2)$$

справедливо соотношение:

$$\psi_0(x_1, x_2) = \hat{Q}_{22}^{\alpha_3} \hat{Q}_{21}^{\alpha_2} \hat{Q}_{11}^{\alpha_1} \psi_R(x_1, x_2)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \frac{\beta}{\sqrt{\omega_1\omega_2 - \beta^2}}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \left( \frac{\omega_1\omega_2 - \beta^2}{\omega_0\omega_1} \right)$$

В качестве сложности можно взять, например,

$$C(\hat{U}) = \varepsilon(|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|)$$

или

$$C(\hat{U}) = \varepsilon\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

Возникает вопрос: является ли  $\hat{U}$  оптимальным? т. е. минимально ли  $C(\hat{U})$  среди всех возможных  $\hat{U}$  таких, что  $\psi_T = \hat{U}\psi_R$ ? Для ответа на этот вопрос применим геометрический подход, а именно, выберем некоторый базис преобразований  $\hat{M}_I$  и рассмотрим выражение вида:

$$\hat{U} = T \exp\left(\int_0^1 d\tau X^I(\tau)\hat{M}_I\right)$$

(Т-символ хронологического упорядочивания). А в качестве сложности выберем "длину в операторном пространстве":

$$C(\hat{U}) = \int_0^1 ds \sqrt{G_{IJ}X^I(s)X^J(s)}$$

## Часть II

# Рассмотрение модельных задач

## 5 Задача о маятнике с подвижной точкой подвеса

### 5.1 Классическая задача

Рассмотрим классическую систему, в которой при различных значениях параметров положение равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Пусть материальная точка массы  $m = 1$  находится на конце невесомого стержня длины  $l = 1$ , который может совершать колебания в вертикальной плоскости, а точка подвеса которого совершает заданное движение. Приведём собственный вывод уравнений движения. Пусть  $\mathbf{r}$ -радиус-вектор точки подвеса  $\varphi$ -угол отклонения от вертикали  $\mathbf{e}$ -единичный вектор, направленный вниз. Обозначим через  $\hat{R}_\varphi$ -оператор поворота на угол  $\varphi$  против часовой стрелки. Функция Лагранжа системы имеет вид:

$$L = T(\dot{\varphi}, t) - U(\varphi, t)$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) \quad \mathbf{x} = \mathbf{r} + \hat{R}_\varphi \mathbf{e}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{r}} + \frac{d\hat{R}_\varphi}{dt} \mathbf{e}$$

$$\frac{d\hat{R}_\varphi}{dt} = \frac{d\hat{R}_\varphi}{d\varphi} \dot{\varphi} \quad \frac{d\hat{R}_\varphi}{d\varphi} = \left. \frac{d\hat{R}_{\varphi+\psi}}{d\psi} \right|_{\psi=0} = \hat{R}_\varphi \left. \frac{d\hat{R}_\psi}{d\psi} \right|_{\psi=0} = \hat{R}_\varphi \hat{R}_{\pi/2}$$

$$(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}) + 2(\dot{\mathbf{r}}, \hat{R}_\varphi \hat{R}_{\pi/2} \mathbf{e})\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2$$

Преобразуем второе слагаемое, выделив полную производную по времени:

$$(\dot{\mathbf{r}}, \hat{R}_\varphi \hat{R}_{\pi/2} \mathbf{e}) \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}, \hat{R}_\varphi \mathbf{e}) - (\ddot{\mathbf{r}}, \hat{R}_\varphi \mathbf{e})$$

учитывая, что две функции Лагранжа, отличающиеся на полную производную по времени эквивалентны, получаем:

$$L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - (\dot{\mathbf{r}}, \hat{R}_\varphi \mathbf{e}) - U(\varphi, t)$$

Потенциальная энергия:

$$U(\varphi, t) = -\omega^2 \cos \varphi$$

Если точка подвеса маятника колеблется вертикально  $\mathbf{r}(t) = \xi(t) \mathbf{e}$

$$(\ddot{\mathbf{r}}, \hat{R}_\varphi \mathbf{e}) = \ddot{\xi} \cos \varphi$$

$$L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + (\omega^2 - \ddot{\xi}) \cos \varphi \quad (5)$$

Уравнения движения:

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 - \ddot{\xi}) \sin \varphi = 0$$

Данное уравнение носит название уравнения Матье и имеет вид уравнения гармонических колебаний, но с частотой, зависящей от времени:

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2(t) \sin \varphi = 0 \quad \Omega^2 = \omega^2 - \ddot{\xi}$$

У обычного математического маятника имеются два положения равновесия: устойчивое при  $\varphi = 0$  и неустойчивое при  $\varphi = \pi$ . Однако, в случае, когда точка подвеса совершает быстрые вертикальные колебания, положение равновесия  $\varphi = \pi$  может также стать устойчивым. Положим  $\varphi = \pi + \phi$  и линеаризуем уравнение, оставив только члены первого порядка по  $\phi$ :

$$\ddot{\phi} - \Omega^2(t) \phi = 0 \quad (6)$$

Заметим также, что это уравнение может быть записано в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{p} = \Omega^2 \phi \\ \dot{\phi} = p \end{cases} \quad (7)$$

далее будем считать  $\Omega(t)$  некоторой периодической функцией периода  $T$  и применим к анализу устойчивости положения равновесия методы, описанные в [8]. Рассмотрим фазовое пространство  $L$ , каждая точка которого соответствует некоторому состоянию системы.

$$L = \{ \mathbf{y} = (\phi, \dot{\phi})^T \}$$

Каждому начальному состоянию  $(\phi(0), \dot{\phi}(0))$  соответствует вектор  $\mathbf{y}(0) \in L$ . С течением времени вектор  $\mathbf{y}(t)$ , изменяющийся во времени согласно дифференциальному уравнению (6) описывает некоторую траекторию в фазовом пространстве. Зададим на фазовом пространстве семейство линейных операторов  $\{A_t\}$ , где  $A_t$  действует следующим образом

$$A_t \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{y}(t)$$

В общем случае  $A_t A_s \neq A_{t+s}$  и  $\{A_t\}$  не является группой по операции умножения. Пусть  $\phi(t)$  - некоторое решение уравнения (6), тогда  $\phi(t+T)$  также является решением:

$$\ddot{\phi}(t+T) + \Omega^2(t+T)\phi(t+T) = \ddot{\phi}(t) + \Omega^2(t)\phi(t) = 0$$

Следовательно

$$A_t A_T = A_{t+T}$$

Отображения  $\{A_{nT}\}$   $n$ -целое образуют группу (бесконечную циклическую), причём  $A_{nT} = (A_T)^n$ . Таким образом, задачу об устойчивости точки покоя  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  уравнения (6) сводится к исследованию устойчивости оператора  $A_T$ .

Определение. Оператор  $A$  называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что если  $\|\mathbf{y}\| < \delta$   $\|A^n \mathbf{y}\| < \varepsilon$  для любого целого  $n$ .

Заметим также, что так как система является бездиссипативной, фазовый объём, согласно теореме Лиувилля, сохраняется, следовательно,  $\det A_T = 1$ . Оказывается, устойчивость оператора  $A_T$  зависит лишь от его следа  $tr A_T$ . Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - tr A_T \lambda + 1 = 0$$

его дискриминант:

$$D = (tr A_T)^2 - 4$$

Рассмотрим два случая:

1)  $|tr A_T| > 2$ . Существуют два различных вещественных собственных значения  $|\lambda_1| > 1$   $|\lambda_2| < 1$  им соответствуют два линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{e}_1$   $\mathbf{e}_2$ , которые можно выбрать в качестве базиса. Тогда

$$\begin{aligned} \|A^n \mathbf{y}\| &= \|(A_T)^n y^1 \mathbf{e}_1 + (A_T)^n y^2 \mathbf{e}_2\| = \|\lambda_1^n y^1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2^n y^2 \mathbf{e}_2\| \geq \\ &\geq |\lambda_1|^n \|y^1 \mathbf{e}_1\| - |\lambda_2|^n \|y^2 \mathbf{e}_2\| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Следовательно, оператор  $A_T$  неустойчив

2)  $|tr A_T| < 2$ . Существуют два комплексно сопряжённых корня  $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$   $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  равных по модулю 1. Тогда существуют два вектора  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  такие, что

$$A \mathbf{e}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2$$

$$A\mathbf{e}_2 = \sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

разложим  $\mathbf{y} = y^1 \mathbf{e}_1 + y^2 \mathbf{e}_2$

$$\begin{aligned} \|(A_T)^n \mathbf{y}\| &= \|(y^1 \cos n\theta + y^2 \sin n\theta) \mathbf{e}_1 + (y^2 \cos n\theta - y^1 \sin n\theta) \mathbf{e}_2\| \leq \\ &\leq 2\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2} \leq 4\sqrt{2}\|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

Следовательно, отображение  $A_T$  устойчиво

## 5.2 Квантовая задача

Теперь рассмотрим квантовой аналог задачи о маятнике с колеблющейся точкой подвеса. Пусть в начальный момент времени состояние частицы представляет собой основное состояние гармонического осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$ :

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\omega_0 x^2}{2}\right)$$

Выбор такого начального состояния обусловлен тем, что в нём частица локализована в окрестности точки  $x = 0$ . Далее поместим частицу в поле с потенциальной энергией

$$V = \frac{\Omega^2 x^2}{2}$$

Причём  $\Omega$  может быть или вещественным, или чисто мнимым, во втором случае мы получаем квантовый аналог математического маятника, перевёрнутого в верхнее (неустойчивое) положение равновесия.

Состояние эволюционирует согласно уравнению:

$$i\dot{\psi} = \hat{H}\psi \quad (8)$$

в [18] приведена функция, являющаяся решением этого уравнения при условии, что  $\Omega$  не зависит от времени:

$$\psi(x, t) = N(t) \exp\left(-\frac{\omega(t)x^2}{2}\right) \quad (9)$$

$$\omega(t) = \Omega \left(\frac{\Omega - i\omega_0 \cot(\Omega t)}{\omega_0 - i\Omega \cot(\Omega t)}\right) \quad (10)$$



Приведу проделанный мной вывод данного результата, при котором рассматривается более общий случай зависимости  $\Omega$  от времени. Введём бесконечно малый временной параметр  $\tau$

$$\psi(t + \tau) - \psi(t) = -i\tau\hat{H}(t)\psi(t) + O(\tau^2) \quad (11)$$

рассмотрим действие оператора  $\hat{H}$  на функцию  $\psi(0) = \exp(-\frac{\omega x^2}{2})$ . В дальнейшем будет удобно опустить нормировочный множитель.

$$\hat{H}\psi = (\Omega^2 - \omega^2)\frac{x^2}{2}\psi + \frac{\omega}{2}\psi$$

Заметим, что

$$\frac{x^2}{2}\psi = -\partial_\omega\psi$$

подставим это в уравнение (11) при  $t = 0$

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \left(1 + i\tau(\Omega^2 - \omega^2)\partial_\omega - \frac{i\omega\tau}{2}\right)\psi(0) + O(\tau^2) = \\ &= \exp\left(\frac{-\tau i\omega}{2}\right)\exp\left(\tau i(\Omega^2 - \omega^2)\partial_\omega\right)\exp\left(-\frac{\omega x^2}{2}\right) + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Введём функцию  $\omega(t)$ , которая удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с начальным условием:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= i(\Omega^2 - \omega^2) \\ \omega(0) &= \omega_0 \end{aligned} \quad (13)$$

(при  $\Omega = const$   $\omega(t)$  совпадает с (10)) Тогда (11) можно переписать в виде

$$\psi(\tau) = \exp\left(-\frac{\omega(\tau)x^2}{2} - \frac{i}{2}\omega(0)\tau\right) + O(\tau^2)$$

Подставив найденное  $\psi(\tau)$  в (12) вместо  $\psi(0)$  получим  $\psi(2\tau)$ . Повторяя данную процедуру  $n$  раз, получим

$$\psi(n\tau) = \exp\left(-\frac{\omega(n\tau)x^2}{2} - \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\omega(k\tau)\tau\right) + O(\tau^2)$$

полагая  $n = t/\tau$  и переходя к пределу  $\tau \rightarrow 0$  получим

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{\omega(t)x^2}{2} - \frac{i}{2}\int_0^t\omega(s)ds\right)$$

восстановим нормировочный множитель

$$\psi(t) = \left(\frac{\omega_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{i}{2} \int_0^t \omega(s) ds\right) \exp\left(-\frac{\omega(t)x^2}{2}\right)$$

Непосредственной подстановкой в (8) можно убедиться в правильности решения.

Далее нас будет интересовать случай, когда  $\Omega(t)$ -периодическая функция с периодом  $T$ . В общем случае уравнение (13), являющееся уравнением Риккати, не может быть решено аналитически. Однако, его решения будут обладать некоторыми общими свойствами.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что любое решение уравнения (13) является дробно-линейной функцией произвольной постоянной:

$$\omega(t) = \frac{a(t)\omega_0 + b(t)}{c(t)\omega_0 + d(t)}$$

В связи с этим запишем  $\omega = \frac{z_1}{z_2}$  и поставим в соответствие каждому  $\omega(t)$  столбец  $z = (z_1, z_2)^T$ , причём  $\lambda z$  соответствует тому же  $\omega(t)$ , что и  $z$ . В этих обозначениях

$$z(t) = A(t)z(0), \quad z(t) = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Аналогично тому, как было показано ранее, можно показать, что  $A(nT)$  ( $n$ -целое) образуют группу по операции умножения, причём  $A(nT) = A^n(T)$

В [18] приведена формула для сложности состояния  $\psi(t)$

$$C(\psi(t)) = \frac{1}{2} \cosh^{-1}(R(t)) \quad R(t) = \frac{\omega_0^2 + |\omega(t)|^2}{2\omega_0 \operatorname{Re}(\omega(t))}$$

Как отмечалось ранее, сложность  $C$  является характеристикой устойчивости. При  $\Omega = \text{const}$ ,  $C(\psi(t))$  осциллирует, оставаясь ограниченной, при вещественном  $\Omega$  (система устойчива), и  $C = O(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\Omega$ -чисто мнимое (система неустойчива).

Положим далее  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega = z_1/z_2$

$$R(t) = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2} \tag{14}$$

Далее, выведем уравнение, которому удовлетворяют  $z_1$  и  $z_2$ . Подставим  $\omega = z_1/z_2$  в (10):

$$\frac{\dot{z}_1 z_2 - z_1 \dot{z}_2}{z_2^2} = i(\Omega^2 - \frac{z_1^2}{z_2^2})$$

$$\dot{z}_1 z_2 - z_1 \dot{z}_2 = i(\Omega^2 z_2^2 - z_1^2)$$

Это уравнение будет удовлетворяться, если на функции  $z_1(t)$   $z_2(t)$  наложить два условия:

$$\begin{cases} i\dot{z}_1 = -\Omega^2 z_2 \\ \dot{z}_2 = iz_1 \end{cases} \quad (15)$$

Заменой  $p = iz_1$   $q = z_2$  Система приводится к виду:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\Omega^2 q \\ \dot{q} = p \end{cases} \quad (16)$$

То есть к системе уравнений, описывающей движение линейного осциллятора с переменной частотой. Можно ввести фазовое пространство  $L$  и семейство линейных операторов  $\{A_t\}$  аналогично тому, как это было сделано выше. В этих обозначениях

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \|A_t \mathbf{y}(0)\|^2$$

Выведем, каким образом меняется со временем знаменатель в (14)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2\} &= \frac{d}{dt} 2Re \{z_1 \bar{z}_2\} \\ \frac{d}{dt} (z_1 \bar{z}_2) &= \dot{z}_1 \bar{z}_2 + z_1 \dot{\bar{z}}_2 = i\Omega^2 |z_2|^2 - i|z_1|^2 \\ Re \left\{ \frac{d}{dt} (z_1 \bar{z}_2) \right\} &= 0 \\ z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= const = 2 \\ R(t) &= \frac{\|A_t \mathbf{y}(0)\|^2}{2} \end{aligned}$$

Таким образом, сложность линейно растёт со временем в том и только в том случае, когда неустойчиво соответствующее классическое отображение  $A_t$

### 5.3 Приближённое исследование на устойчивость

Снова вернёмся к классическому рассмотрению задачи о маятнике с колеблющейся точкой подвеса. Исследование на устойчивость верхнего положения равновесия в редких случаях является аналитически точно решаемой задачей, так как вычислить в явном виде оператор  $A_T$  удастся лишь при некоторых  $\Omega(t)$ . Изложим приближённый метод, описанный в [5]. Пусть материальная точка массы  $m = 1$  находится под действием постоянных сил с потенциалом  $V(x)$ , а также

под действием быстроосциллирующей силы  $F = F_0 \sin \nu t$ . Тогда усреднённая по периоду координата материальной точки  $X = \langle x \rangle_T$  будет изменяться так, как если бы точка находилась под действием постоянной во времени силы с потенциалом:

$$V_{eff} = V + \frac{\langle F^2 \rangle_T}{2\nu^2}$$

Применим данный результат к материальной точке с функцией Лагранжа (5), положение точки подвеса при этом меняется по гармоническому закону:  $\xi(t) = -\xi_0 \sin \nu t$ . Периодическая сила имеет в этом случае вид:

$$F = \nu^2 \xi_0 \sin \varphi \sin \nu t$$

Эффективная потенциальная энергия:

$$V_{eff} = -\omega^2 \cos \varphi + \frac{\nu^2 \xi_0^2}{4} \sin^2 \varphi$$

Критерий устойчивости положения равновесия  $\varphi = \pi$ :

$$V_{eff}''|_{\varphi=\pi} = \frac{\xi_0^2 \nu^2}{2} - \omega^2 > 0$$

При дальнейших численных расчётах использовалось обозначение  $f = \xi_0 \nu^2$  а также полагалось для простоты  $\omega = 1$  в этих обозначениях критерий устойчивости запишется следующим образом:

$$f > \sqrt{2}\nu$$

## 6 Численные расчёты

Вычислим одну из введённых характеристик квантовой системы, которая может свидетельствовать о наличии хаоса. А именно, предположим, что в начальный момент времени система находится в  $n$ -ом стационарном состоянии заданного гамильтониана  $\hat{H}(0)$ , который обладает дискретным спектром собственных значений.

$$\hat{H}(0)|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Затем гамильтониан системы начинает изменяться во времени  $\hat{H}(t) = \frac{p^2}{2} + V(t, x)$ . Оператор координаты в Гейзенберговском представлении изменяется согласно:

$$\hat{x}(t) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{x}(0)\hat{U}(t)$$

где  $\hat{U}(t)$ -оператор эволюции:

$$\hat{U}(t) = T \exp \left( -i \int_0^t \hat{H}(s) ds \right) \quad (17)$$

будем вычислять величину

$$c_n(t) = - \langle n | [\hat{x}(t), \hat{p}(0)]^2 | n \rangle$$

В [14] приведён алгоритм вычисления  $c_n(t)$  в случае независящего от времени гамильтониана. Мы изменили данный алгоритм так, чтобы с помощью него можно было проводить вычисления при произвольной зависимости  $\hat{H}(t)$

## 6.1 Проверка алгоритма на известных результатах

Величины  $c_n(t)$  вычисляются аналитически в следующих двух случаях независящих от времени гамильтонианов. Первый случай:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

-гармонический осциллятор. Состояния в начальный момент времени являются стационарными состояниями гармонического осциллятора:

$$|n \rangle = N_n e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (18)$$

Как было показано выше  $c_n(t)$  при этом не зависят от  $n$  и даются выражением:

$$c_n(t) = \cos^2 t$$

Вычисления дали следующие результаты: при  $n = 0$  наблюдается полное совпадение с теорией. С ростом  $n$  наблюдается отклонение от теории, связанное с приближённой точностью аппроксимации операторов координаты и импульса, однако вычисленные и теоретические значения отличаются лишь на постоянный коэффициент

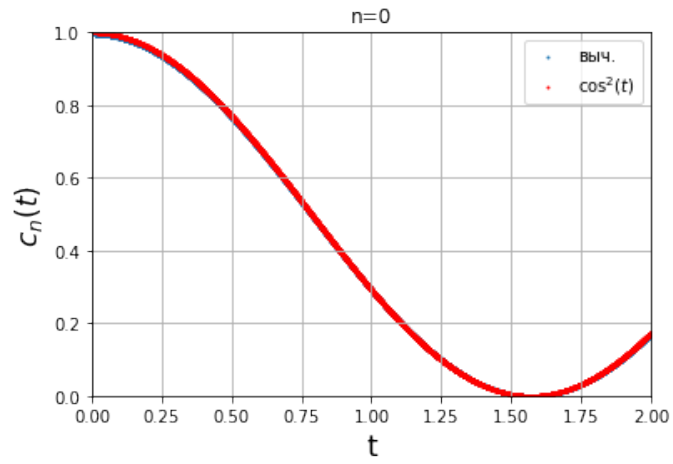


Рис. 1: Сопоставление теории с вычисленными значениями. Графики совпадают

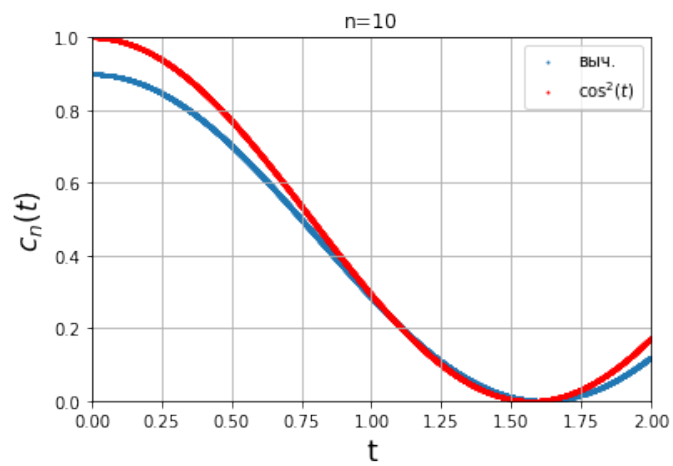


Рис. 2: Сопоставление теории с вычисленными значениями

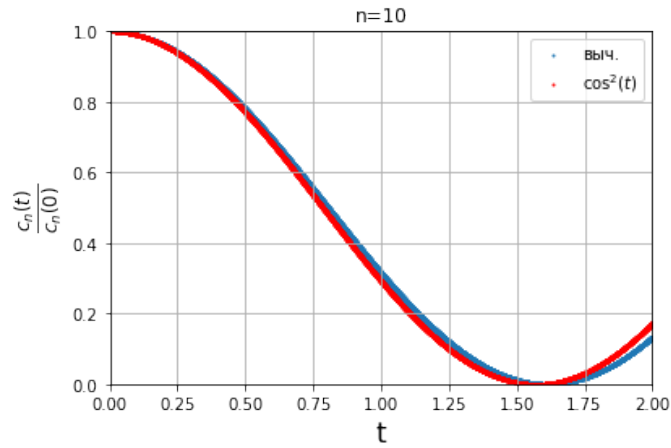


Рис. 3: Сопоставление теории с вычисленными значениями, график нормирован на начальное значение

Второй случай:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

. Гамильтониан отличается от гармонического осциллятора знаком у  $x^2$  В этом случае  $c_n(t)$  также не зависит от  $n$  и равно:

$$c_n(t) = ch^2t$$

В качестве начальных состояний также были взяты (18). Вычисления дали следующие (рис 4-6).

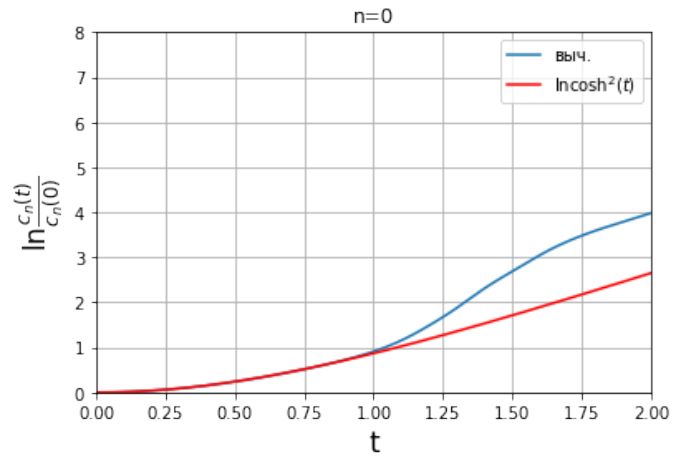


Рис. 4: Сопоставление теории с вычисленными значениями

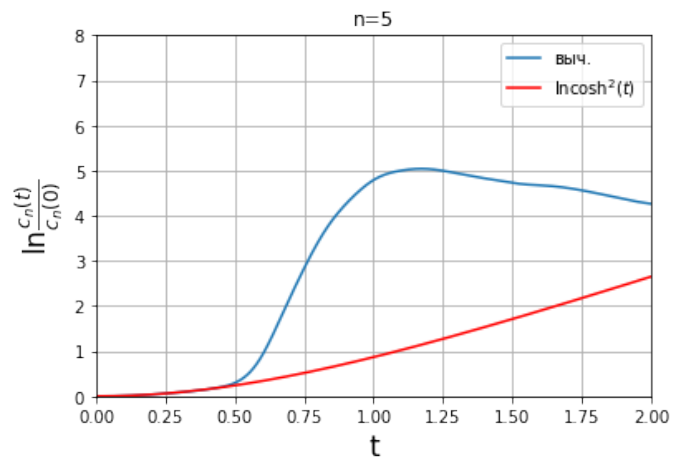


Рис. 5: Сопоставление теории с вычисленными значениями



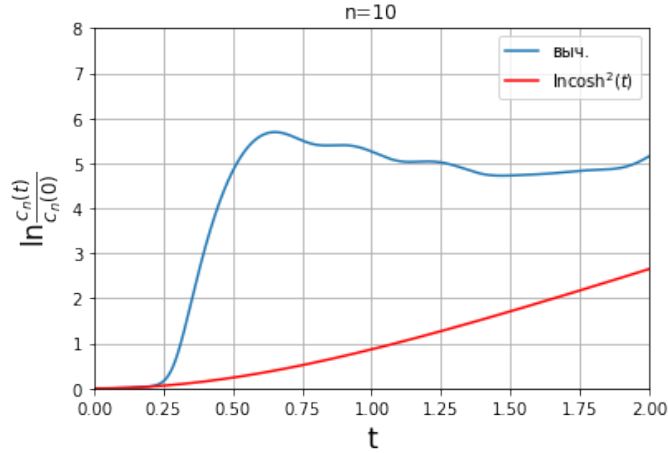


Рис. 6: Сопоставление теории с вычисленными значениями

Качественное поведение вычисленной зависимости  $c_n(t)$  соответствует неустойчивому движению. Количественное совпадение с теорией так же есть до некоторого момента времени (причём наступает он тем раньше, чем больше  $n$ ), далее наблюдается ускоренный рост  $c_n(t)$ , а затем насыщение. Этому можно дать следующее объяснение. При численном моделировании потенциала  $V(x)$  координатная сетка задаётся на конечном отрезке  $(-L, L)$ , вне которой волновая функция предполагается равной 0. Поэтому реальный потенциал имеет следующий вид:

$$V_{real} = \begin{cases} V(x) & x \in (-L, L) \\ \infty & x \notin (-L, L) \end{cases}$$

Быстрый рост  $c_n(t)$  по сравнению с теорией соответствует отражению от стенки, а дальнейшее насыщение свидетельствует о расплывании области локализации волнового пакета до размеров отрезка  $(-L, L)$ . Чем больше  $n$ , тем больше энергия осциллятора, тем менее локализована начальная волновая функция. Этим и объясняется уменьшение времени до столкновения с ростом  $n$ . Однако, вычисления при  $L = 20$  дают в точности те же результаты, что и при  $L = 10$ . Это может свидетельствовать о некоторых неучтённых факторах, влияющих на  $c_n(t)$ . При уменьшении шага  $h$  в два раза результаты различаются для нескольких первых  $n$ .

## 6.2 Осциллятор с периодической частотой

Рассмотрим потенциал зависящий от времени:

$$V(t, x) = -(1 + f \sin \nu t) \frac{x^2}{2}$$

Являющийся потенциалом математического маятника с точкой подвеса, совершающей вертикальные колебания по гармоническому закону, при этом математический маятник находится вблизи верхнего положения равновесия. Выше было отмечено, что если параметры  $(f, \nu)$  удовлетворяют условиям:

$$f > \sqrt{2\nu} \quad \nu \gg 1 \quad (19)$$

то верхнее положение равновесия устойчиво. Проведём расчёты для двух значений параметров  $f = 2$ ,  $\nu = 5$  (в этом случае условие (19) не выполняется) и  $f = 16$ ,  $\nu = 10$  (в этом случае условие (19) выполняется). В качестве начальных состояний  $|n\rangle$  также возьмём (18)

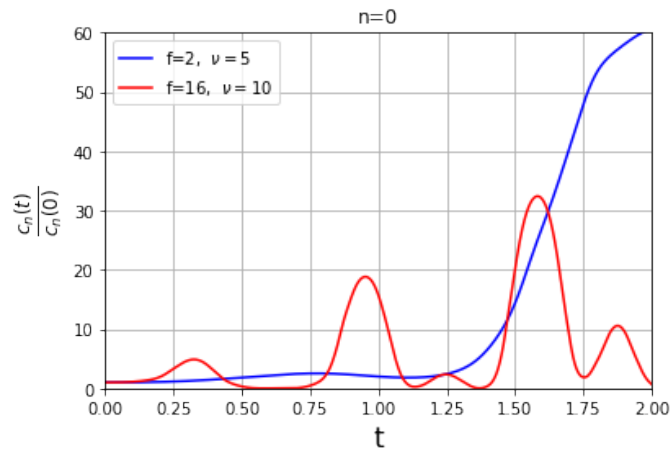


Рис. 7: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров

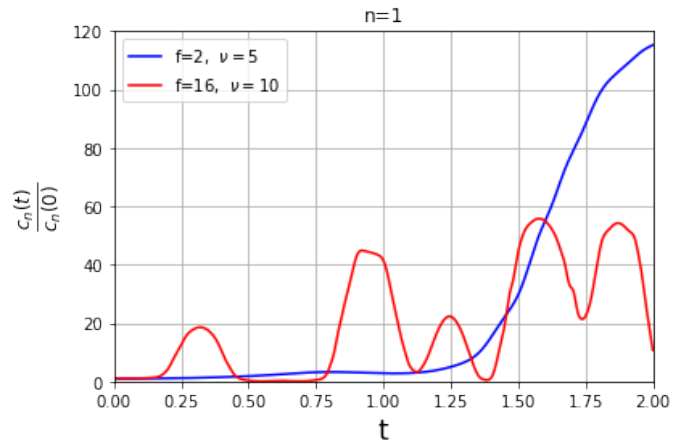


Рис. 8: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров

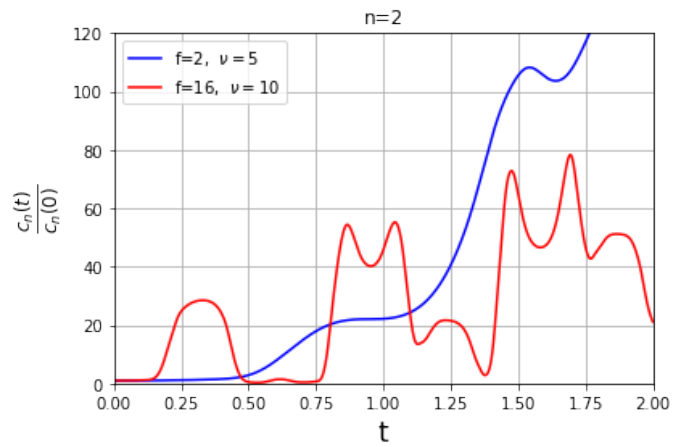


Рис. 9: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров

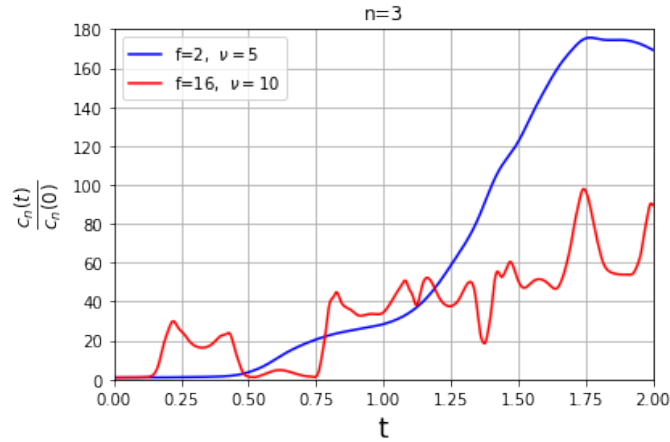


Рис. 10: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров

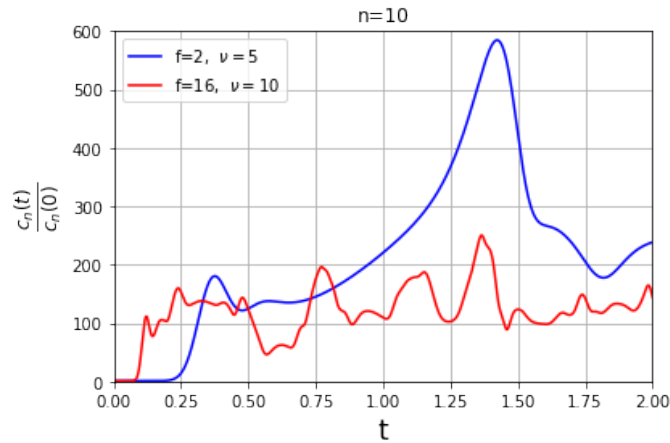


Рис. 11: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров

Результаты подтверждают устойчивость при параметрах  $f = 16$   $\nu = 10$ . При нескольких первых  $n$   $c_n(t)$  осциллирует, принимая в некоторые моменты времени нулевые значения в противоположность поведению  $c_n(t)$  при  $f = 2$   $\nu = 5$ , где наблюдается экспоненциальный рост. При возрастании  $n$  поведение  $c_n(t)$  также соответствует устойчивому движению, однако начинает сказываться неточность численной модели связанной с конечностью отрезка прямой, на котором осуществляется аппроксимация.

## 6.3 Нелинейный осциллятор с периодической внешней силой

### 6.3.1 Классическая задача

Рассмотрим частицу с потенциальной энергией

$$V(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} \quad (20)$$

на которую действует периодическая сила

$$F(t) = f_0 \cos \nu t$$

. Функция Гамильтона этой частицы:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + f_0 x \cos \nu t \quad (21)$$

уравнения движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= \frac{1}{2}x(1 - x^2) + f_0 \cos \nu t \end{aligned} \quad (22)$$

В отсутствие внешнего периодического возмущения движение представляет собой колебания или около одного из устойчивых положений равновесия  $x = \pm 1$ , при которой частица остаётся в одной из ям, или около неустойчивого положения равновесия  $x = 0$ , при этом частица находится попеременно в обоих ямах. В [4] приведены результаты численного решения системы (22) при наличии дополнительного слагаемого, отвечающего наличию трения. Далее решим систему (22) численно при различных значениях параметров  $f_0$  и будем отмечать точкой на плоскости  $(x, p)$  координаты в моменты времени  $t_n = \frac{2\pi n}{\nu}$  (т.н. сечения Пуанкаре). Ниже приведены сечения Пуанкаре для решения при начальных условиях  $x(0) = 0$   $p(0) = 1$   $\omega = 0.5$  и различных значениях  $f_0$  (отмечено 10000 точек).

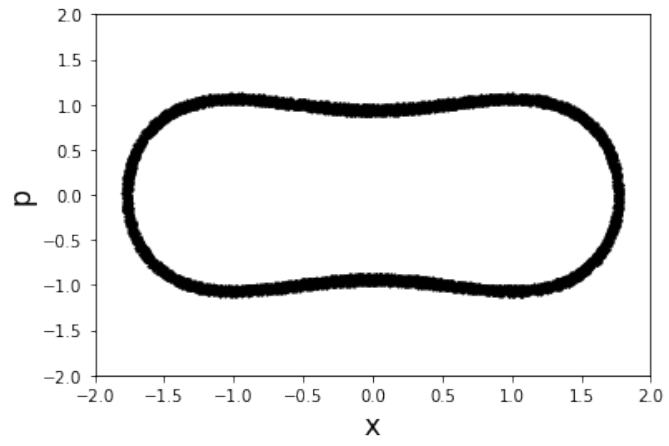


Рис. 12:  $f_0 = 0$

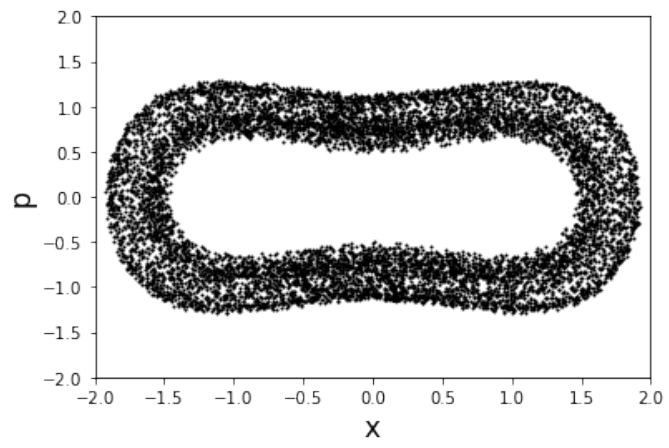


Рис. 13:  $f_0 = 0.1$

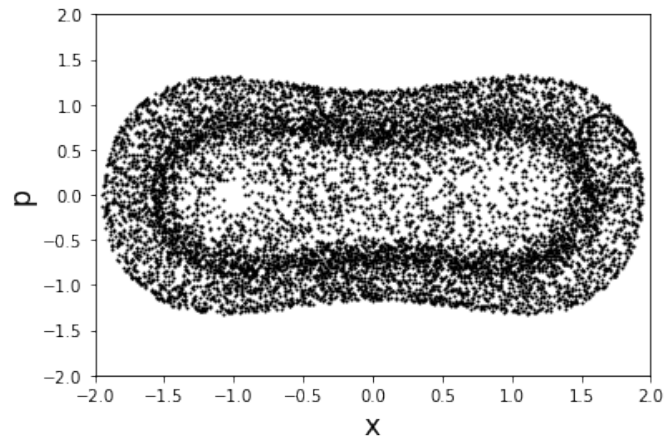


Рис. 14:  $f_0 = 0.12$

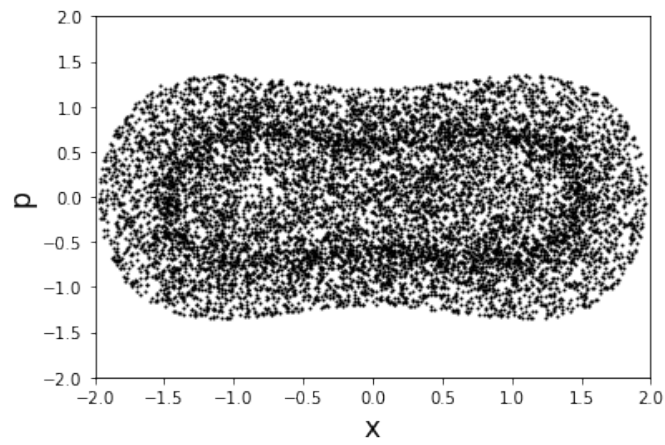


Рис. 15:  $f_0 = 0.14$

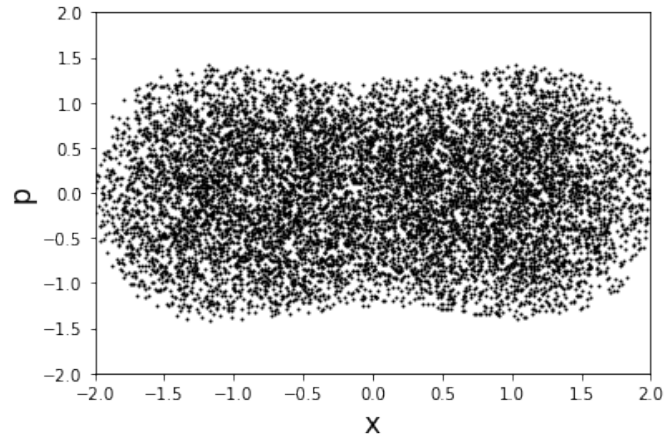


Рис. 16:  $f_0 = 0.18$

По совокупности сечений Пуанкаре можно проследить, как регулярное периодическое движение в отсутствие внешних сил приобретает эргодический характер с ростом амплитуды силы  $f_0$ . Однако, как отмечено выше, эргодичность ещё не означает полной хаотизации движения. Один из способов ответа на этот вопрос — вычисление рассмотренной ранее автокорреляционной функции  $C(\tau)$ . Ниже представлены графики  $C(\tau)$  при различных значениях  $f_0$

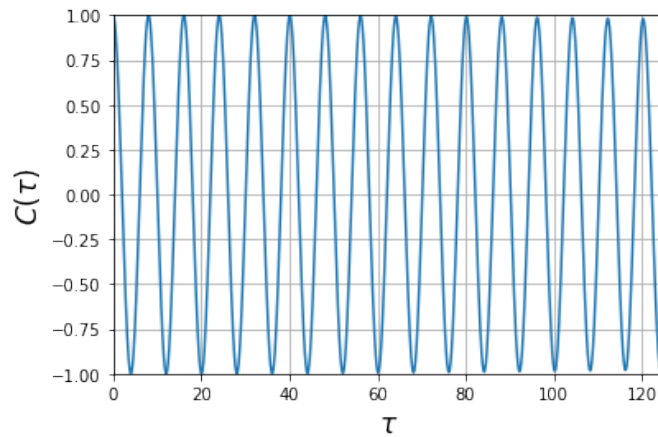


Рис. 17: Автокорреляционная функция координаты  $f_0 = 0$



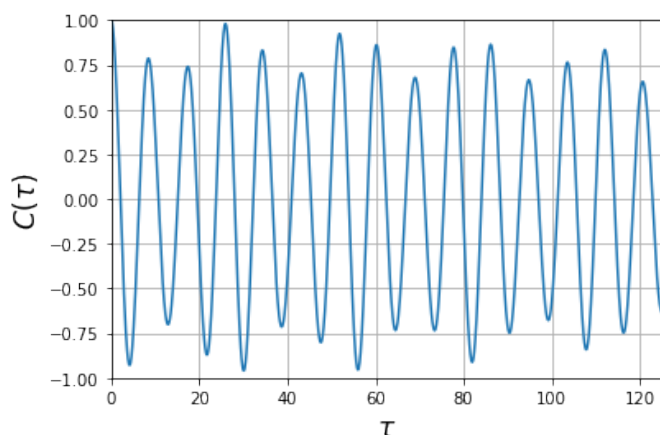


Рис. 18: Автокорреляционная функция координаты  $f_0 = 0.14$

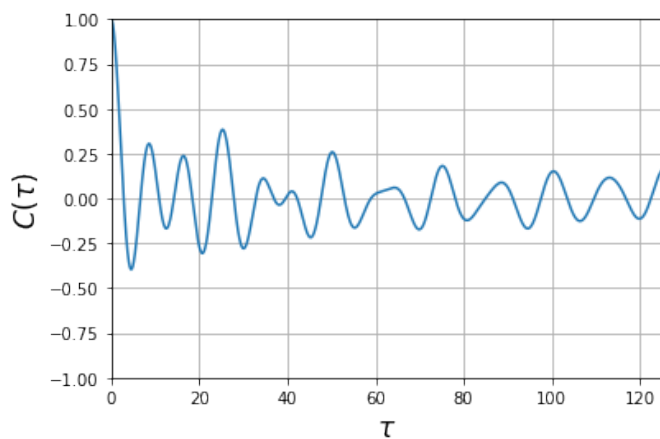


Рис. 19: Автокорреляционная функция координаты  $f_0 = 0.18$

Из изменения вида функции  $C(\tau)$  при увеличении  $f_0$  можно сделать вывод о хаотизации движения только при  $f_0 = 0.18$ , где корреляционная функция быстро убывает с увеличением  $\tau$ . По аналогии с корреляционной функцией координаты, можно рассмотреть корреляционную функцию импульса. Она также убывает более быстро при больших значениях  $f_0$ .

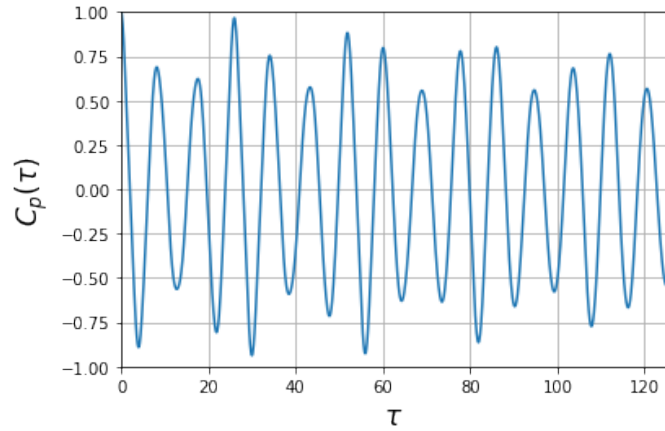


Рис. 20: Автокорреляционная функция импульса  $f_0 = 0.14$

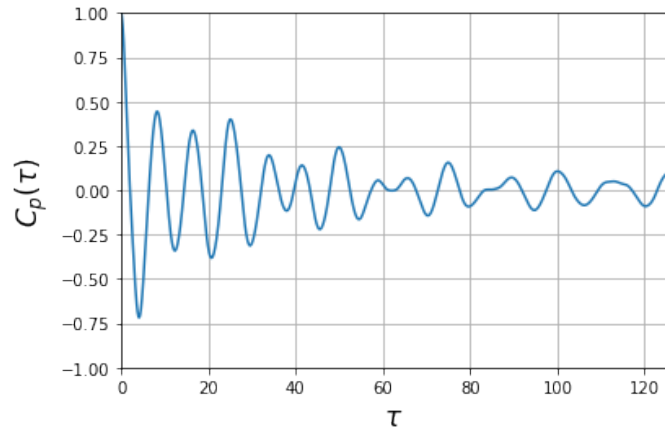


Рис. 21: Автокорреляционная функция импульса  $f_0 = 0.18$

Применим к системе (22) описанный выше метод линеаризации. Вектор  $\mathbf{F}$  имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} p \\ -V'(x) + f_0 \cos(\nu t) \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(x(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

собственные значения:  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-V''(x(t))}$

для потенциальной энергии (20) они оба вещественны при  $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  и чисто мнимы при  $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следует ожидать, что если траектория  $x(t)$  заходит в область  $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , то движение будет неустойчивым, а близкие траектории будут расходиться экспоненциально быстро.

Для явного выявления экспоненциального расхождения траекторий применим численный метод расчёта показателя Ляпунова, описанный в [3]. Выбирается произвольный единичный вектор  $\delta\mathbf{X}_0$  и численно интегрируется линеаризованная система  $\delta\dot{\mathbf{X}} = \hat{A}(t)\delta\mathbf{X}$  с начальным условием  $\delta\mathbf{X}(0) = \delta\mathbf{X}_0$  на некотором временном отрезке длиной  $\tau$  затем вычисляется  $d_1 = \|\delta\mathbf{X}(\tau)\|$  и  $\delta\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(\tau)/d_1$ . Далее интегрируется то же линеаризованное уравнение на отрезке  $\tau$ , но с начальным условием  $\delta\mathbf{X}(0) = \delta\mathbf{X}_1$ . Этот процесс повторяется  $N$  раз. Далее показатель Ляпунова вычисляется по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{N\tau} \sum_{i=1}^N \ln d_i$$

Ниже представлены значения показателя Ляпунова при различных  $f_0$

$f_0$	0	0.1	0.14	0.18
$100\lambda$	0,02	0,1	0,2	7,3

Следует отметить, что если не производить линеаризацию, а интегрировать систему

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$$

То  $\delta\mathbf{X}$  будет расти экспоненциально лишь в течение конечного промежутка времени, пока не достигнет величины порядка характерных размеров области движения.

### 6.3.2 Квантовая задача

Рассмотрим частицу в потенциале с двумя ямами, гамильтониан которой соответствует классической функции Гамильтона (20). Для неё, как и для перевёрнутого маятника будем вычислять  $c_n(t) = -\langle n | [\hat{x}(t), \hat{p}(0)]^2 | n \rangle$

Перед изложением результатов укажем, каким образом следует производить сопоставление квантовой задачи с классической. Рассмотрим потенциал общего вида:

$$V(t, x) = -\alpha x^2 + \beta x^4 - fx \cos \nu t \quad \alpha, \beta > 0$$

$\alpha$   $\beta$ -некоторые размерные коэффициенты. Перепишем это выражение, используя глубину потенциала  $V_0 > 0$  и положение минимума  $x_0 > 0$ .  $\min V(x) = V(x_0) = -V_0$ .

$$V(x) = V_0(-2(x/x_0)^2 + (x/x_0)^4) - fx \cos \nu t$$

При сопоставлении классического и квантового случая необходимо иметь в виду следующее. В классическом случае величины  $x_0$ ,  $V_0$  и масса частицы  $m$  размерно независимы, поэтому они

могут быть одновременно положенными равными 1 (или любой другой константе). В квантовом случае мы полагаем  $m = 1$ ,  $\hbar = 1$ , поэтому произвольной константе может быть положена лишь одна из величин  $x_0$  или  $V_0$ , другая же становится при этом безразмерным параметром, определяющим "степень квантовости квазиклассическому случаю соответствует  $V_0 \gg 1$ . Положим  $x_0 = 1$  и запишем потенциал в виде:

$$V(t, x) = V_0(-2x^2 + x^4) - fx \cos \nu t$$

Однако, данное выражение всё ещё неудобно для сопоставления квантового случая с классическим. Дело в том, что если при  $V_0 = 1$  классическая система обнаруживает хаотическое поведение при некоторых параметрах  $(f, \nu)$  то при  $V_0 \neq 1$  хаотическое поведение может проявляться при других параметрах  $(f', \nu')$  поэтому нужно переопределить эти параметры так, чтобы наличие хаоса при параметрах  $(f, \nu)$  не зависело от  $V_0$ . Для этого можно изменить потенциал следующим образом:

$$V(t, x) = V_0(-2x^2 + x^4) - V_0 f x \cos \nu \sqrt{V_0} t$$

Действительно, пусть  $\xi(t)$  решение уравнения движения при  $V_0 = 1$ :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 4(\xi - \xi^3) + f \cos \nu t$$

тогда решение  $x(t)$  при произвольном  $V_0$  может быть выражено с помощью замены переменной через  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 4V_0(x - x^3) + fV_0 \cos \nu \sqrt{V_0} t \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} &= 4(x - x^3) + f \cos \nu \tau \quad \tau = \sqrt{V_0} t \\ x(t) &= \xi(\sqrt{V_0} t) \end{aligned}$$

Таким образом, если при  $V_0 = 1$  движение неустойчиво с показателем Ляпунова  $\lambda$ , то при  $V_0 \neq 1$  движение также неустойчиво с показателем Ляпунова  $\sqrt{V_0} \lambda$ .

В качестве начальных состояний  $|n\rangle$  брались стационарные состояния гамильтониана:

$$\hat{H}(0) = \frac{\hat{p}^2}{2} + V_0(-2x^2 + x^4) + V_0$$

Согласно ранее полученным классическим результатам, хаос должен наблюдаться при  $f = 1.44$ ,  $\nu = \sqrt{2}$ . Вычисления проводились при  $V_0 = 12.5$  и  $V_0 = 0.125$ . В первом (квазиклассическом) случае наблюдалось незначительное влияние внешней силы на  $c_1$ , соответствующий уровень энергии  $E_1 = 4.74$ . В [15] указано, что в случае рассматриваемого потенциала может

наблюдаться экспоненциальный рост  $c_n(t)$  и в том случае, когда классический аналог хаоса не обнаруживает. Это связано с наличием участка потенциала, на котором функция  $V(x)$  выпукла вверх.

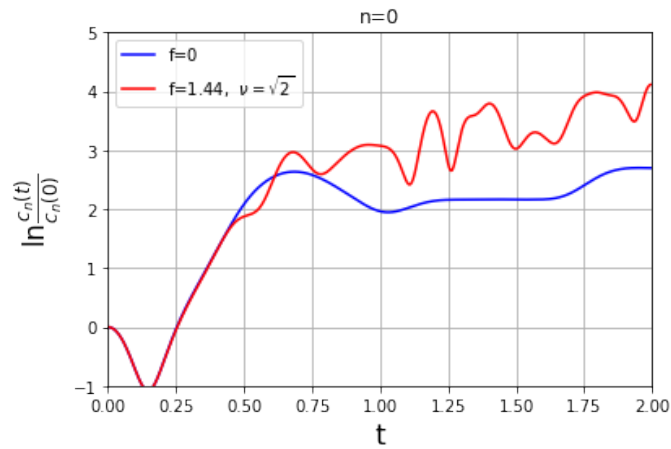


Рис. 22: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров  $V_0 = 12.5$

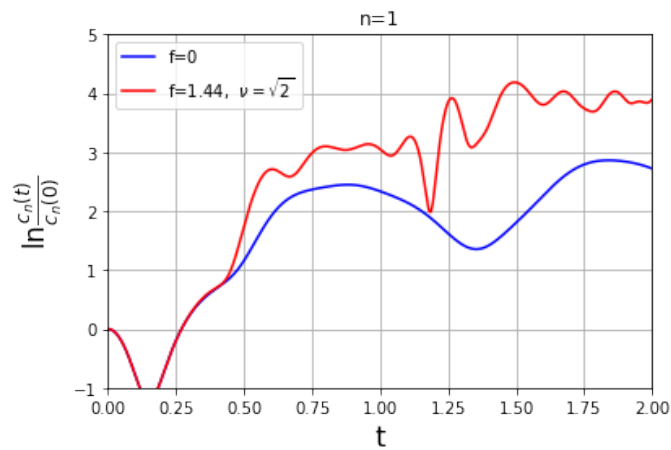


Рис. 23: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров  $V_0 = 12.5$

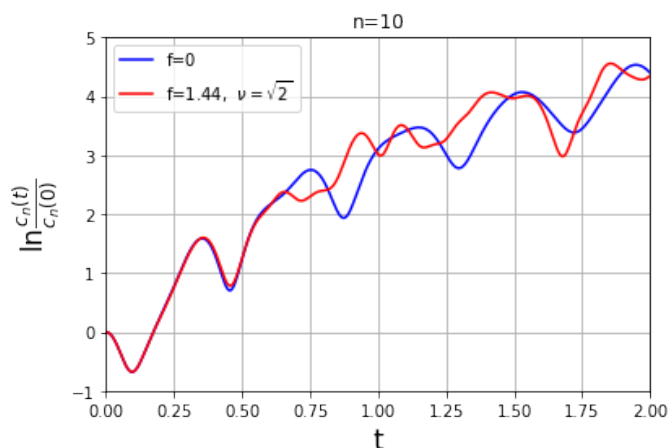


Рис. 24: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров  $V_0 = 12.5$

При  $V_0 = 0.125$  влияние внешней силы никак не сказывается на  $c_n(t)$ : графики  $c_n(t)$  при  $f = 0$  и при  $f = 1.44$  полностью совпадают. Не наблюдается также и экспоненциального роста, соответствующего неустойчивости. Как было указано выше, при  $V_0 < 1$  начинают сказываться квантовые эффекты и классическое представление о частице, как о локализованном объекте уже неприменимо. Этим можно объяснить различие результатов при  $V_0 = 12.5$  и  $V_0 = 0.125$ . Однако при всех указанных несовершенствах применяемых здесь численных методов, достоверность результатов вызывает сомнение, для её проверки необходимо использовать более точные методы.

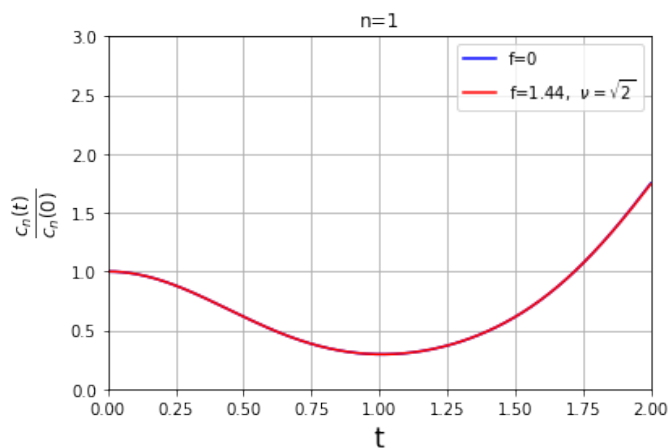


Рис. 25: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров (графики совпадают)  $V_0 = 0.125$

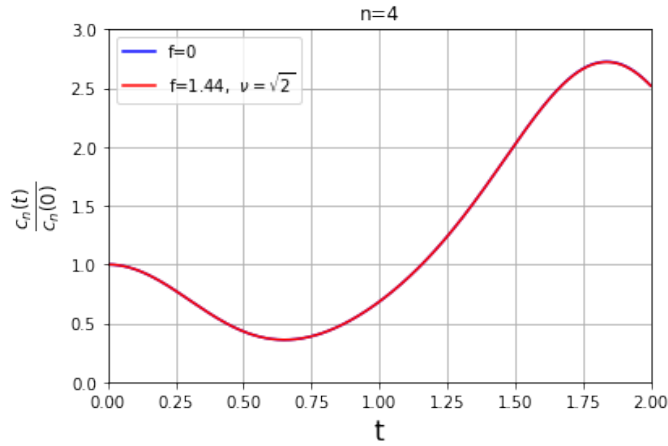


Рис. 26: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров (графики совпадают)  $V_0 = 0.125$

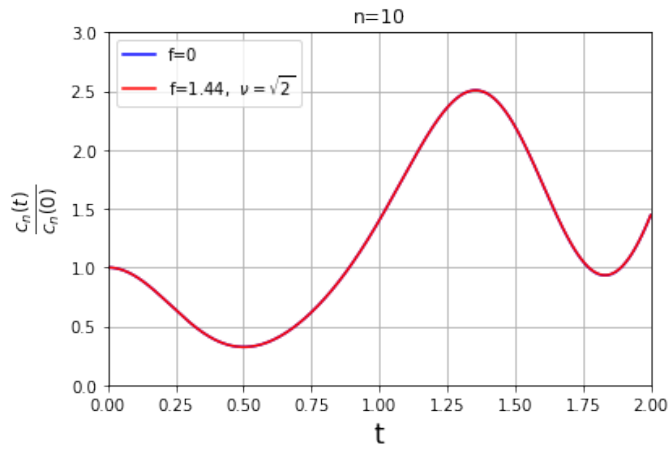


Рис. 27: поведение  $c_n(t)$  при различных значениях параметров (графики совпадают)  $V_0 = 0.125$

## 7 Приложение: описание алгоритма вычислений

В случае, когда гамильтониан явно не зависит от времени, величины  $c_n(t) = - \langle n | [\hat{x}(t), \hat{p}(0)]^2 | n \rangle$  вычисляются по алгоритму, описанному в [14]. При этом оператор эволюции вычисляется по известной формуле

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t)$$

Если же гамильтониан  $\hat{H}$  зависит от времени, необходимо вычислять оператор эволюции по общей формуле (17). Приведённый в [14] алгоритм для постоянного  $\hat{H}$  был усовершенствован для расчётов с произвольной зависимостью  $\hat{H}(t)$  следующим образом.

В момент времени  $t = 0$  частица находится в  $n$ -м стационарном состоянии, соответствующем гамильтониану

$$\hat{H}(0) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V(0, x)$$

Найдём собственные функции данного оператора. Они должны удовлетворять уравнению

$$\hat{H}(0)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

Зададим координатную сетку  $x \rightarrow x_j$ . Тогда волновая функция  $\psi_n(x)$  представится в виде столбца, а оператор  $\hat{H}(0)$  (а также  $\hat{x}$   $\hat{p}$ )-в виде матрицы:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x_j \\ \psi_n(x) &\rightarrow \psi_{nj} = \psi_n(x_j) \\ \hat{H} &\rightarrow H_{ij} \quad \hat{x} \rightarrow x_{ij} \quad \hat{p} \rightarrow p_{ij} \end{aligned}$$

после этого уравнение принимает вид:

$$\sum_j H_{ij}\psi_{nj} = E_n\psi_{ni}$$

т.е. сводится к задаче поиска собственных векторов и собственных значений матрицы  $H_{ij}$ . Найдём первые  $Q$  собственных значений и собственных векторов. Введём матрицу  $\Phi = |\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_Q|$

Вычислим далее матричные элементы операторов  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$

$$\langle n|\hat{x}|m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\hat{x}\psi_m(x)dx$$

что с использованием аппроксимации запишется в виде:

$$\langle n|\hat{x}|m \rangle = \sum_{ij} h\psi_{ni}x_{ij}\psi_{mj} = h\Phi^T X \Phi \quad X = (x_{ij})$$

и аналогично для оператора импульса В дальнейшем для краткости обозначим  $x_{nm} = \langle n|\hat{x}|m \rangle$  и будем использовать индексы  $n, m$  для нумерации соответствующих функций, а индексы  $i, j$ -по отношению к координатной сетке.

Разобьём интервал  $(0, t)$  точками  $t_k = k\tau$  на равные промежутки длиной  $\tau$ . Оператор  $\hat{U}(t, 0)$  можно представить в виде:

$$\hat{U}(t, 0) = \hat{U}(t, t_{n-1})\hat{U}(t_{n-1}, t_{n-2})\dots\hat{U}(t_1, 0)$$



Для получения зависимости  $\hat{x}(t)$  будем последовательно вычислять  $\hat{x}(t_k)$  в различные моменты времени:

$$\hat{x}(t_{k+1}) = \hat{U}^\dagger(t_{k+1}, t_k) \hat{x}(t_k) \hat{U}(t_{k+1}, t_k)$$

Алгоритм вычислений на  $k$ -ом временном шаге следующий:

- 1) Вычисляется матрица оператора  $\hat{U}(t_{k+1}, t_k)$  в координатном базисе (на сетке):  $U_{ij}$
- 2) Выполняется переход в базис функций:  $U_{nm} = h \sum_{ij} U_{ij} \psi_{ni} \psi_{mj} = (h\Phi^T U \Phi)_{nm}$
- 3) Вычисляется оператор матрица оператора  $\hat{x}$  на данном временном шаге в базисе функций:  $x_{nm}(t_k) = \sum U_{nl}^\dagger(t_k) x_{lr}(t_{k-1}) U_{rm}(t_k)$
- 4) вычисляется произведение  $\hat{f} = \hat{x}(i\hat{p})$   $f_{nm} = \sum_l x_{nl} i p_{lm}$
- 5) вычисляется коммутатор  $\hat{b} = [\hat{x}, i\hat{p}] = \hat{f} + \hat{f}^\dagger$   $b_{nm} = f_{nm} + f_{mn}^*$
- 6) вычисляется искомая величина  $c_n = \sum_m |b_{nm}|^2$

## 7.1 Аппроксимация квантовомеханических операторов

Будем рассматривать операторы координаты, импульса и энергии в координатном представлении, где они имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x \\ \hat{p} &= -i\partial_x \\ \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2} + V(x) = -\frac{\partial_x^2}{2} + V(x) \end{aligned}$$

зададим координатную сетку на некотором интервале  $(-L, L)$

$$x_j = -L + jh, \quad 0 \leq j \leq N \quad N = \left[ \frac{2L}{h} \right] + 1$$

аппроксимируем первую и вторую производную от функции следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \\ \partial_x^2 f(x) &= \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

этому соответствует следующее представление операторов в виде матриц:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_j \delta_{ij} \\ ip_{ij} &= \frac{1}{2h} (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}) \\ H_{ij} &= -\frac{1}{2h^2} (\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}) + \delta_{i,j} \left( \frac{1}{h^2} + V(x_j) \right) \end{aligned}$$

## 7.2 Аппроксимация оператора эволюции

При построении аппроксимации оператора эволюции будем использовать способ, указанный в [9] Оператор  $\hat{U}(t_{k+1}, t_k)$  может быть представлен в виде:

$$\hat{U}(t_{k+1}, t_k) = \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{U}^{(r)}(t_{k+1}, t_k) \quad \hat{U}^{(r)}(t_{k+1}, t_k) = \exp \left( \sum_{n=1}^r \tau^n A_n \right)$$

Где  $A_n$ -антиэрмитовы операторы, содержащие интегралы от коммутаторов гамильтониана  $\hat{H}(t)$  в различные моменты времени. Будем использовать приближение первого порядка (схема Кранка-Николсона). Приведём явный вид  $A_1$

$$A_1 = -i \int_0^1 d\xi \hat{H}(t_k + \xi\tau)$$

Если оператор  $\hat{H}$  имеет вторую производную по времени, то справедлива следующая аппроксимация:

$$\hat{U}(t_{k+1}, t_k) = \exp \left( -i\tau \hat{H}(t_k + \tau/2) \right) + O(\tau^3) \quad (23)$$

Для дальнейшего вычисления экспоненты применим так называемую аппроксимацию Паде [10]. Аппроксимация Паде аналитической функции

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad (24)$$

состоит в нахождении дробно-рациональной функции вида:

$$[L/M] = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)}$$

Такой, чтобы её разложение в ряд Тейлора с центром в нуле совпадало с максимально возможным количеством членов разложения (24). Ошибка аппроксимации составляет  $O(z^{L+M+1})$  аппроксимация Паде [1/1] для экспоненты имеет вид:

$$e^z = \frac{2+z}{2-z} + O(z^3)$$

С её помощью (23) может быть записано в виде ( $\hat{I}$ -единичный оператор):

$$\hat{U}(t_{k+1}, t_k) = \left( \hat{I} + i\frac{\tau}{2} \hat{H}(t_k + \tau/2) \right)^{-1} \left( \hat{I} - i\frac{\tau}{2} \hat{H}(t_k + \tau/2) \right) + O(\tau^3) \quad (25)$$

Главным достоинством этого выражения является унитарность оператора  $\hat{U}(t_{k+1}, t_k)$ , которая обеспечивает устойчивость и сходимость численной схемы [9]

### 7.3 Программная реализация алгоритма вычислений

Для решения проблемы собственных значений используются функции `dstebz` и `dstein` библиотеки Intel MKL. Функция `dstebz` использует алгоритм деления пополам поиска заданного количества ( $Q$ ) собственных значений. По найденным собственным значениям функция `dstein` находит собственные векторы.

Для повышения производительности программы методами параллельного программирования использовалась технология `openmp`. В рабочем режиме программа запускалась на СК Ломоносов-2.

Распараллеливанию подлежали все операции матричного умножения в итерационном процессе. Каждый процесс при вычислении результата матричного умножения  $C = A \times B$  вычислял определённый набор строк матрицы.

Распараллеливанию подлежал и поиск обратной матрицы в (25). Матрица, которую необходимо обратить является симметричной трёхдиагональной. Поэтому для поиска обратной матрицы был следующим образом использован метод прогонки. Набор индексов  $0 \leq j < N$  распределялся по процессам и для обрабатываемой матрицы  $A$  методом прогонки решалась система уравнений:

$$Ax_j = e_j$$

Где  $e_j$ -столбец канонического базиса  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$   $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$   $e_{N-1} = (0, \dots, 1)^T$ .  $x_j$  представляет собой  $j$ -й столбец матрицы  $A^{-1}$

## 8 Заключение

В ходе рассмотрения модельных задач были выделены некоторые особенности квантовых систем, классические аналоги которых обнаруживают неустойчивость. Была показана связь между линейным ростом сложности в квантовой задаче о перевёрнутом маятнике и неустойчивостью в аналогичной классической задаче. В ходе численных расчётов для той же самой модели было установлено, что экспоненциальный рост ОТОС в квантовой задаче происходит при тех же самых параметрах, при которых наблюдается неустойчивость в классической задаче. Было исследовано поведение классического нелинейного осциллятора при различных параметрах переменной внешней силы, обнаружены хаотические режимы. Вычислены ОТОС для соответствующей квантовой задачи, результаты различаются для квантового и квазиклассического случая. Модель нелинейного осциллятора требует дальнейшего исследования и проведения более точных вычислений.

## Список литературы

- [1] Эльсгольц Л. Э. "Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление": М.: Эдиториал УРСС 2000-320 с
- [2] Данилов Ю. А. "Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение": Учебное пособие Предисл. Г. Г. Малинецкого. Изд. 2-е, испр. — М.: Ком Книга, 2006. 208 с. (Синергетика: от прошлого к будущему.)
- [3] Табор М. "Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике" М.: УРСС, 2001.
- [4] Мун Ф. "Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров": Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - 312 с.
- [5] Заславский Г. М. Сагдеев Р. З. "Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса.": М.: Наука, 1988"
- [6] Шустер Г. "Детерминированный хаос": М.: Мир, 1988
- [7] Арнольд В. И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения": М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы 1971- 240 с
- [8] Арнольд В. И. "Математические методы классической механики": 5-е изд. М.: УРСС, 2003.
- [9] С. И. Веницкий И. В. Пузырин А. В. Селин "Численное решение нестационарного уравнения Шрёдингера с повышенной точностью": Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1998
- [10] Дж. Бейкер П. Грейвс-Моррис "Аппроксимации Паде": : Пер. с англ. - М.: Мир, 1986.
- [11] А. А. Самарский "Теория разностных схем": М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы 1977
- [12] О. Д. Тимофеевская О. А. Хрусталёв "Лекции по квантовой механике": М.: Ленард 2017
- [13] А. П. Исаев В. А. Рубаков "Теория групп и симметрий"
- [14] K. Hashimoto, K. Murata and R. Yoshii, "Out-of-time-order correlators in quantum mechanics," JHEP 1710, 138 (2017)
- [15] Koji Hashimoto, Kyoung-Bum Huh, Keun-Young Kim, and Ryota Watanabe, "Exponential growth of out-of-time-order correlator without chaos: inverted harmonic oscillator," (2020) arXiv:2007.04746v2 [hep-th] 29 Jul 2020

- [16] Dmitrii A. Trunin, "Pedagogical introduction to SYK model and 2D Dilaton Gravity"arXiv:2002.12187v1 [hep-th]
- [17] R. A. Jefferson and R. C. Myers, Circuit complexity in quantum field theory, JHEP 10 (2017) 107, [arXiv:1707.08570[hep-th]].
- [18] Tibra Ali, Arpan Bhattacharyya, S. Shajidul Haque, Eugene H. Kim, Nathan Moynihan, Jeff Murugan, "Chaos and Complexity in Quantum Mechanics"arXiv:1905.13534v2 [hep-th]