

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

«ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПРИРОДУ ЦЕНТРАЛЬНОГО
СВЕРХМАССИВНОГО ОБЪЕКТА НАШЕЙ ГАЛАКТИКИ»

Выполнил студент
204 группы
Лобков Дмитрий Сергеевич

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Троицкий Сергей Вадимович

МОСКВА

2021

Содержание

1	Введение	2
2	Имеющиеся результаты	3
2.1	Наблюдения SgrA*	3
2.2	Видимое движение SgrA*	3
2.3	Ускорение SgrA*	4
2.4	Ограничение массы SgrA*	5
3	Построение новой модели	6
3.1	Принципы новой модели	6
3.2	Теорема Гаусса для случая гравитационного поля	6
3.3	Движение внутри шара	7
3.4	Движение радиоисточника с учётом ближайших звезд	9
4	Результаты расчетов	11
4.1	Ограничения на размеры шара	11
4.2	Численные результаты	11
5	Заключение	13

1 Введение

Как известно, в центре нашей галактики, Млечного Пути, находится компактный радиоисточник Стрелец A^* (в дальнейшем будем писать $SgrA^*$). Данный объект представляет особый интерес для изучения, так как по сей день точно не установлено, является ли $SgrA^*$ супермассивной чёрной дырой или чем-то другим. Существуют аргументы, как подтверждающие, так и ставящие под сомнения, что $SgrA^*$ есть СМЧД: 1) близкое соответствие между фокусами звездных орбит и инфракрасным положением $SgrA^*$; 2) очень высокая плотность вещества при имеющихся размерах и массе – признаки, присущие черным дырам. Однако, факт того, что у объекта чрезвычайно низкая болометрическая светимость для СМЧД, не позволяет окончательно убедиться в природе Стрельца A^* (см. [1]). В данной работе предложена модель центрального объекта нашей галактики, изучение которой основывается на известных принципах классической физики (законы сохранения, теорема Гаусса для гравитационного поля). С помощью модели, речь о которой пойдет ниже, были получены новые ограничения на массу радиоисточника.

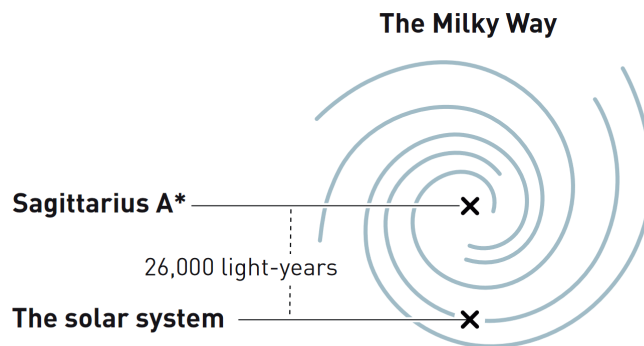


Рис. 1: Млечный Путь, наша галактика, вид сверху. Она имеет форму плоского диска диаметром около 100 000 световых лет. Её спиральные рукава состоят из газа, пыли и нескольких сотен миллиардов звезд. Одна из этих звезд - наше Солнце. Источник: nobelprize.org

2 Имеющиеся результаты

2.1 Наблюдения SgrA*

В данной работе мы будем ссылаться на данные, опубликованные в статье [3], собранные с помощью радиointерферометра VLBA Национальной радионастрономической обсерватории в период с 1995 по 2013 годы. В течении 18 лет измерялись положения SgrA* относительно двух внегалактических компактных радиоисточников J1745–2820 и J1748–2907. Измерения проводились на самой высокой астрометрически полезной частоте VLBA 43 ГГц, чтобы минимизировать эффекты сильного межзвездного рассеяния в направлении центра Галактики. По ходу обработки снятых измерений были получены различные характеристики компактного радиоисточника: скорость движения, ускорение, амплитуда его отклонения от центра масс системы, и самое главное - ограничения на массу SgrA*, чему и посвящены статьи [1], [3], а также данная работа. Далее будут кратко описаны полученные результаты, модель, предлагаемая в [1] для получения ограничений на массу радиоисточника.

2.2 Видимое движение SgrA*

В то время как орбитальное движение Солнца (вокруг галактического центра) усложняет оценку "внутриплоскостной" компоненты скорости движения SgrA*, оценить же "внеплоскостную" составляющую скорости радиоисточника намного проще, для этого необходимо вычесть Z -компоненту скорости Солнца из наблюдаемого движения радиоисточника. В 1998 году учеными Hipparcos, Dehnen, Binney была оценена Z -компонента движения Солнца, и эта оценка составила 7.17 ± 0.38 км/с.

Положение SgrA* на небе относительно двух фоновых источников показано на рисунке 2. В настоящее время наблюдения занимают период в 18 лет, и линейные тенденции, описанные в статье [1], продолжают. Полученные в [3] оценки компонент скоростей радиоисточника занесены в таблицу.

Величина	$\mu_l(mas/yr)$	$\mu_b(mas/yr)$
Видимая скорость	-6.411 ± 0.008	-0.219 ± 0.0078
Влияние Солнца	-6.396 ± 0.057	-0.197 ± 0.018
Разница	-0.015 ± 0.058	-0.022 ± 0.019
	$\mu_l(km/s)$	$\mu_b(km/s)$
Разница (предполагая $R_0 = 8.15\text{кпк}$)	-0.58 ± 2.23	-0.85 ± 0.75

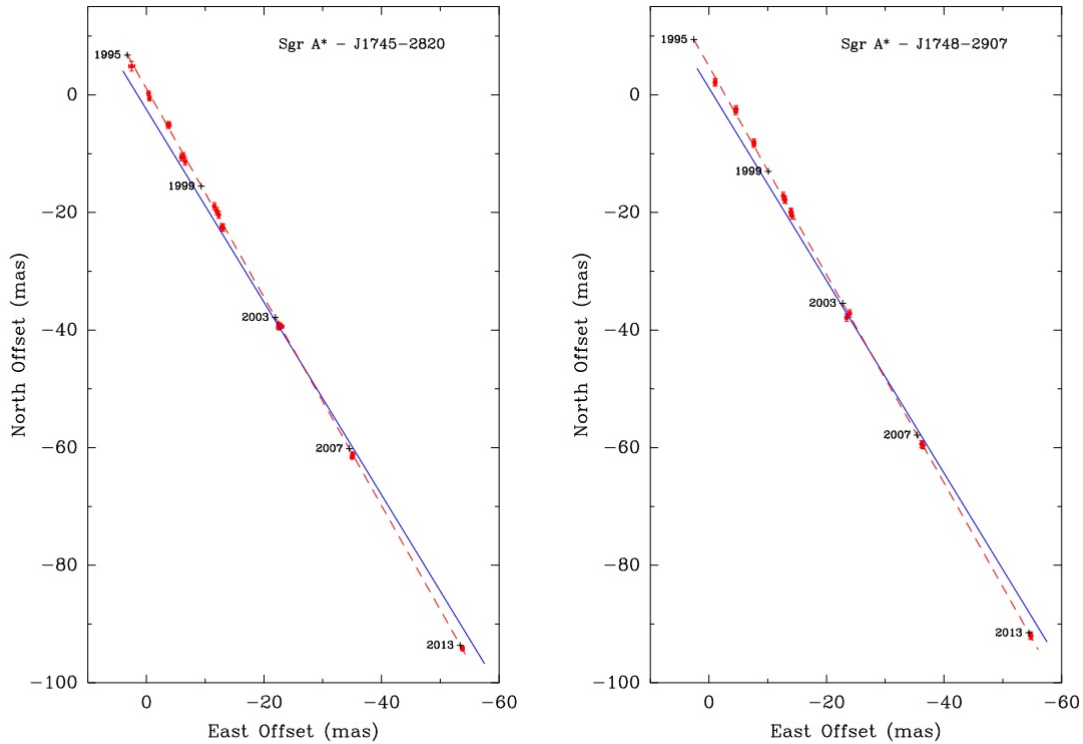


Рис. 2: Положение Sgr A* относительно J1745–2820 (левая панель) и J1748-2907 (правая панель) на небе. Reid, Brunthaler, 2004

2.3 Ускорение SgrA*

Ожидаемое ускорение радиоисточника на орбите вокруг галактического центра в настоящее время необнаружимо мало: $w \approx 10^{-7} mas/y^2$ или в более привычных единицах $w \approx 6 \times 10^{-6} km/(s \cdot y)$. Таким образом, в отличие от измерений скорости, которые требуют точного знания и вычитания орбитального вклада Солнца, любое измерение ускорения может быть непосредственно отнесено к Sgr A*. Поскольку движение Sgr A* по небу кажется прямолинейным, наши данные могут быть использованы для установления верхнего предела любого кажущегося ускорения Sgr A*.

2.4 Ограничение массы SgrA*

Исследуя орбиты звёзд, находящихся от SgrA* в пределах 100 а.е. от центра, было заключено, что масса центрального объекта должна быть равна примерно $4 \times 10^6 M_{\odot}$. Используя ограничения на движение радиоисточника, можно понять, какая доля всей массы (указана выше) приходится именно на радиоисточник. В силу того, что "внутриплоскостная" компонента скорости имеет большую ошибку нежели "внеплоскостная" (из-за ошибок измерения R_0 и ошибок угловых размеров на небе Θ_0), оценки проводились именно благодаря "внеплоскостным ограничениям". Совместив ограничения на "внеплоскостную" компоненты скорости с фактами: 1) в пределах 100 а.е должна находиться центральная масса в $4 \times 10^6 M_{\odot}$ (Schodel, Ghez, 2003); 2) SgrA* не должен покидать эту область (Menten, 1997; Reid, 2003); 3) В области нескольких парсек движется от 10^6 до 10^7 звезд; мы сможем найти нижнее ограничение массы радиоисточника.

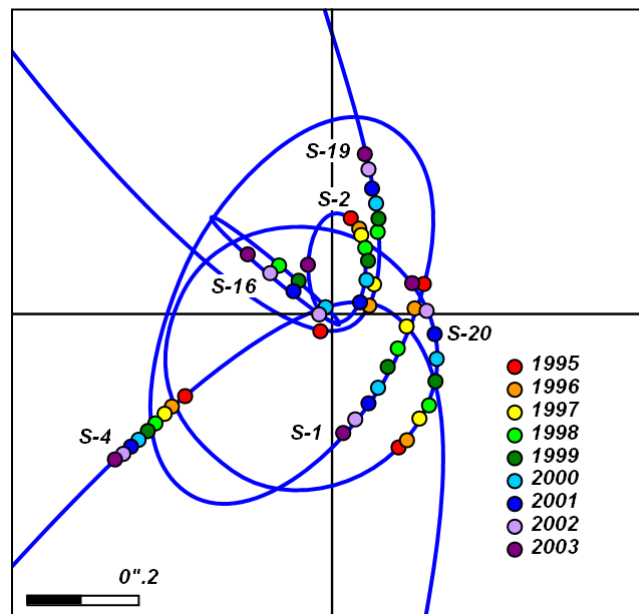


Рис. 3: Траектории звёзд, ближайших к центру Галактики по данным наблюдений 1995—2003 годов. Источник: wikipedia

Дальнейшее исследование параметров SgrA* в [1] проводится для двух случаев: 1) радиоисточник "колеблется" в пределах 4 а.е (< 4 а.е.); 2) "Колебания" со смещением $r : 4 < r < 100$ (в а.е.). Случай > 100 а.е не рассматривается. Важно отметить то, что в [1] "невидимая" масса, в которой движется радиоисточник не имеет четких границ, у неё неизвестная плотность вещества (т.е мы не знаем, по какому закону она изменяется в зависимости от

расстояния) и непонятная природа (в [1] выдвигается предположение, что это может быть темная материя). Как было сказано выше, больше всего нас интересует "внеплоскостное" движение SgrA* в пределах < 4 а.е.

В статье [1] приведен вывод аналитической формулы, благодаря которой была получена оценка массы радиоисточника. Модель выбирается довольно простая: в центре масс в начальный момент времени располагается сам радиоисточник, вокруг которого, начиная с некоторого минимального расстояния движутся звезды, поскольку звезд очень много, выбирается некоторая характерная звездная масса m и предполагается, что плотность звездной массы вокруг радиоисточника равномерно распределена и убывает обратно расстоянию. В статье [3] проводится более тонкая оценка засчет компьютерного моделирования движения более 10^6 звезд, находящихся от SgrA* на расстоянии нескольких парсек. По мере набора данных ([1], [3]) нижнее ограничение массы радиоисточника увеличивается с $0.4 \times 10^6 M_{\odot}$ до $1 \times 10^6 M_{\odot}$.

3 Построение новой модели

3.1 Принципы новой модели

Наша задача заключается в том, чтобы оценить массу радиоисточника в той модели, которая не приведена в [1], тем самым дополнив рассуждения авторов. В данной модели мы будем опираться на следующие утверждения:

1. Радиоисточник все время движется внутри массивного шара.
2. Шар имеет четкие границы, постоянную плотность.
3. В начальный момент времени $t_0 = 0$ радиоисточник находится в начале координат - центре тяжелого шара.

3.2 Теорема Гаусса для случая гравитационного поля

При исследовании движения радиоисточника внутри массивного шара нам потребуется применить одну из ключевых теорем анализа, теорему Гаусса-Остроградского, сформулируем:

Theorem 3.1 (Гаусс). Пусть тело V ограничено замкнутой поверхностью S . Тогда для любого векторного поля \vec{F} выполняется равенство:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} d\vec{S}$$

то есть интеграл от дивергенции векторного поля \vec{F} , распространённый по объёму V , равен потоку вектора через поверхность S .

Для случая гравитационного поля \vec{g} (приводим без вывода):

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM$$

3.3 Движение внутри шара

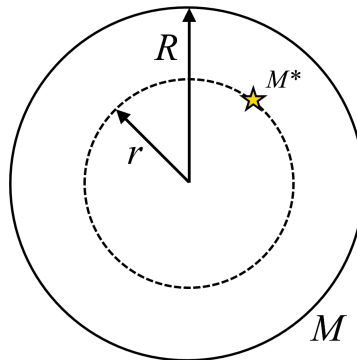


Рис. 4: Движение точечной массы M_* внутри шара M

Пусть точечная масса M_* находится на расстоянии r от центра шара (см.рис), по теореме Гаусса можем найти "напряженность" гравитационного поля:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM,$$

расписывая скалярное произведение, получим:

$$g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi GM \Rightarrow g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{GM}{R^3} r,$$

тогда сила, действующая на точечную массу равна:

$$F(r) = M_* g(r) = \frac{GM M_*}{R^3} r = -\frac{\partial U}{\partial r},$$

откуда можем найти:

$$U(r) = -\frac{GMM_*r^2}{2R^3} = -\frac{kr^2}{2}.$$

Лагранжиан движения:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} (k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2).$$

В частном случае центрально-симметричного поля ($k_1 = k_2 = k_3 = k$) движение происходит в одной плоскости, как и во всяком центральном поле, с одинаковыми частотами по всем координатам $\omega = \sqrt{\frac{k}{M_*}}$

Уравнение колебания по оси x : $x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) = a \cos \varphi$

Уравнение колебания по оси y : $y(t) = b \cos(\omega t + \beta) = b \cos(\varphi + \delta)$

Из одного уравнения вытягиваем $\cos \varphi$, из другого $\sin \varphi$, составив сумму их квадратов, получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta,$$

это эллипс с центром в начале координат. При $\delta = 0$ или π траектория станет отрезками прямой.

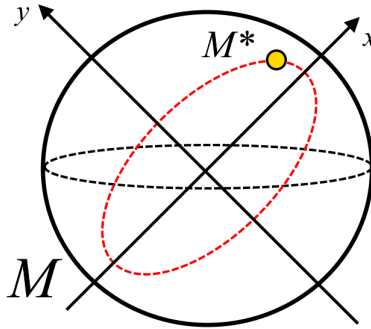


Рис. 5: Движение точечной массы M_* внутри шара M по эллиптической траектории

Замечание. При дальнейшем решении задачи будем считать колебания радиоисточника одномерными (что согласуется во многом с наблюдениями), а также учтем п.3 из 3.1.

Замечание. Поскольку в нашем случае есть сила, которая растет с расстоянием от центра ($\sim r$), а в обычном случае (см.[1]) - сила, падающая с расстоянием от центра ($\sim \frac{1}{r^2}$), то под действием той же внешней силы со стороны звезд источник данной массы будет отлетать от центра на меньшее расстояние в "нашем" случае, чем в статье. Это значит, что в нашем случае ожидаются более слабые ограничения на массу источника - источник может быть легче, чем нижнее ограничение в статьях [1], [2], [3].

В дальнейшем нам понадобится выражение для среднего квадрата скорости, получим:

$$x = a \cos \omega t \Rightarrow V = \dot{x} = -a\omega \sin \omega t,$$

тогда:

$$V^2 = \dot{x}^2 = a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t,$$

по определению среднего:

$$\langle V^2 \rangle = \frac{a^2 \omega^2}{2} \Rightarrow M_\star^2 \langle V^2 \rangle = \frac{G M M_\star^2 a^2}{2 R^3},$$

запомним это соотношение.

3.4 Движение радиоисточника с учётом ближайших звезд

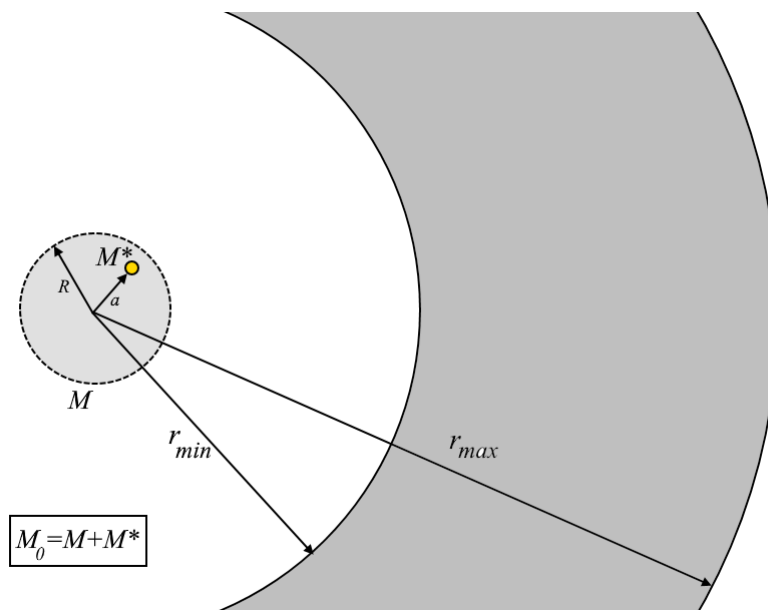


Рис. 6: Движение точечной массы M_* внутри шара M с добавлением равномерного распределения звездной массы

Как упоминалось ранее, пусть в начальный момент времени радиоисточник находится в начале координат (центр масс системы), звездная масса распределена в среднем во времени и в пространстве равномерно, убывает обратно расстоянию. Система консервативна и центр масс покоится.

Напомним еще раз: пусть M_0 - общая масса радиоисточника и «unseen mass», M_\star - масса радиоисточника, M - масса шара. Эти три массы связаны соотношением: $M_0 = M_\star + M$. Итак, в силу консервативности системы:

$$M_\star \vec{V} + \sum_i m_i \vec{v}_i = 0, \quad (1)$$

где m_i - массы i -й звезды. Перенеся сумму в правую часть:

$$M_\star \vec{V} = - \sum_i m_i \vec{v}_i, \quad (2)$$

возводя в квадрат (2), получаем:

$$M_\star^2 V^2 = \sum_i m_i^2 v_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} m_i m_j (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j), \quad (3)$$

взяв среднюю величину от случайного распределения звездных скоростей, получаем:

$$M_\star^2 \langle V^2 \rangle = \sum_i \langle m_i^2 v_i^2 \rangle. \quad (4)$$

Для простоты возьмем единственную характеристическую звездную массу m и заменим суммирование в уравнении (4) интегралом:

$$\sum_i \langle m_i^2 v_i^2 \rangle = m^2 \int_r v^2(r) \left(\frac{dN}{dr} \right) dr, \quad (5)$$

где $\left(\frac{dN}{dr} \right) dr$ - число звезд на промежутке от r до $r + dr$. Для распределения плотности звездной массы $\rho(r) = \rho_0 (r/r_0)^{-\alpha}$ получаем:

$$\left(\frac{dN}{dr} \right) dr = \frac{\rho}{m} 4\pi r^2 dr = N_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2-\alpha} d \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (6)$$

где $N_0 = 4\pi r_0^3 \frac{\rho_0}{m}$. Для круговых звездных орбит с фиксированным централь-

ным потенциалом:

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r}, \quad (7)$$

где $M(r) = M_0 + \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr$.

Подставим уравнения (6), (7) в (5) и получим итоговую формулу:

$$\boxed{\frac{MM_*^2 a^2}{2R^3} = m^2 N_0 \left[(M + M_*) \cdot \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{3-\alpha} \cdot \frac{r^{5-\alpha}}{5-\alpha} \right]_{r_{min}}^{r_{max}}}, \quad (8)$$

Из уравнения (8) видно, что массу радиоисточника мы будем ограничивать в зависимости от размеров шара, в котором он колеблется, принимая величину отклонения постоянной и равной 4 а.е.

4 Результаты расчетов

4.1 Ограничения на размеры шара

Ранее было оговорено, что мы рассматриваем такое движение радиоисточника внутри массивного шара, при котором он не будет вылетать за его границы, то есть нам надо понять с какого размера шара (в радиусах Шварцшильда) радиоисточник не будет вылетать за пределы шара. Найдем радиус Шварцшильда для тела массой $4 \times 10^6 M_\odot$:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 1.2 \times 10^{10} \text{ м.}$$

Сравнивая эту величину с 4 а.е. заключаем, что размеры шара должны быть больше 50ти радиусов Шварцшильда ($R \geq 50R_s$)

4.2 Численные результаты

Были проведены численные расчеты и получено нижнее ограничение массы радиоисточника в зависимости от размера шара R . Также попытаемся ограничить массу сверху. Очевидно соотношение:

$$V < V_{max} = a\omega,$$

поскольку мы рассматриваем случай, когда радиоисточник всё время находится внутри шара, тогда $a \leq nR_s$, тогда:

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\omega^2 a^2}{2} \leq n^2 R_s^2 \omega^2,$$

раскрывая все формулы, можем видеть, что:

$$M_\star \leq M_0 - \frac{1}{n} \frac{c^2 a}{\sqrt{8G}}.$$

Ниже приведен график, на котором изображены кривые нижнего ограничения массы (сплошная красная) и кривая ограничивающая метод, который мы применили (пунктирная красная).

Важно отметить, что кривая, ограничивающая наш метод, не пересекается с кривой ограничения на промежутке $50R_s \leq R \leq 1500R_s$, что говорит о том, что наш метод работает, но эта кривая не может утверждать о том, что масса радиоисточника не может быть больше, чем она ограничивает.

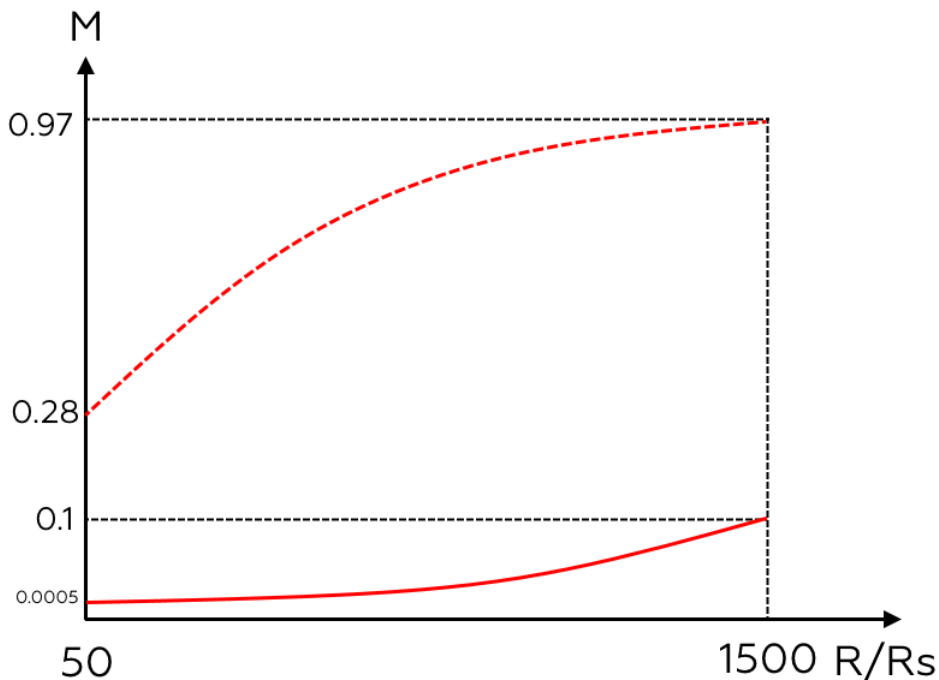


Рис. 7: График зависимости нижнего ограничения массы радиоисточника (сплошная красная линия), а также кривая, ограничивающая метод (пунктирная красная)

Мы получили ограничение массы радиоисточника:

$R = 50R_s$	$M \geq 2500M_\odot$
$R = 1500R_s$	$M \geq 400000M_\odot$

Видно, что нижняя граница массы радиоисточника уменьшилась, что соответствует нашему предположению, которое описано выше, а также "физике" нашей модели.

5 Заключение

В данной работе была предложена новая модель центрального сверхмассивного объекта нашей галактики: массивный шар с четкими границами, в котором колеблется радиоисточник, не вылетая за границы шара. Пространство вокруг шара заполнено звездной массой, плотность которой равномерно распределена в пространстве и убывает обратно расстоянию от центра системы.

Вывод аналитической формулы, связывающей имеющиеся наблюдательные данные, основывался на классических фундаментальных законах физики, например, закон сохранения импульса, теорема Гаусса для гравитационного поля. С помощью полученной формулы была оценена нижняя граница массы радиоисточника в зависимости от размеров массивного шара. Как и ожидалось, эта граница меньше, нежели та, что обсуждалась в статьях [1]-[3]. Также полученная "верхняя кривая" указывает на то, что наш метод справедлив в области $50R_s \leq R \leq 1500R_s$, однако, важно еще раз отметить, что масса радиоисточника, может находиться на графике в области, выше пунктирной линии.

Список литературы

- [1] M. J. Reid, A. Brunthaler. *The Proper Motion of Sgr A*: II. The Mass of Sgr A**, 2004//arXiv:astro-ph/0408107v1
- [2] S.V.Troitsky. *Supermassive dark-matter Q-balls in galactic centers?*, 2016//arXiv:1510.07132v2
- [3] M. J. Reid, A. Brunthaler. *The Proper Motion of Sagittarius A*: III. The Case for aSupermassive Black Hole*, 2020//arXiv:2001.04386