Амплитуды рассеяния в квантовой теории поля

Выполнил студент 443 группы
Медведев Алексей Сергеевич

Научный руководитель: ак. РАН, д.ф.-м.н., профессор
Рубаков Валерий Анатольевич

Научный консультант: к.ф.-м.н., с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Демидов Сергей Владимирович.

МГУ им. М.В.Ломоносова.
Физический факультет.

Москва, 2021 г.

Введение

Амплитуды

Вычисление амплитуд в Квантовой Теории Поля является одним из самых трудоемких шагов на пути к нахождению физических величин, явно измеряемых на эксперименте. Стандартный подход к вычислениям амплитуд заключается в применении правил Фейнмана. В данной работе рассматривается метод рассчета древесных амплитуд с помощью редукционной формулы Лемана-Симанчика-Циммермана (ЛСЦ).

Цели работы:

- Разработать схему выхода за порог в скалярных теориях.
- В качестве примера рассмотеть рассеяние $2 \to n$ в ϕ^4 .
- Построить схему вычисления амплитуд для неабелевых калибровочных теорий.
- Продемонстрировать разработанную схему на примере 3-х и 4-х частичных амплитуд.

Редукционная формула

Рассмотрим общий вид ЛСЦ:

$$A_{m\to n} = \langle p_1,\dots,p_n|\, S\,|k_1,\dots,k_m\rangle = \lim_{p_i^2\to m^2}(-i)G_{m+n}(k_1,\dots,k_m,p_1,\dots,p_n)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{m+n}\frac{1}{(-i)G_2(p_i)}\times\prod_{j=1}^{m}v^-(k_j)\times\prod_{k=1}^{m}v^+(p_k), \quad (1)$$

где $v^{\pm}$– решения свободных уравнений, связанные с поляризацией конечных и начальных частиц соотвественно.
Для $n+m$–точечной функции Грина перейдем в координатное представление и запишем функцию Грина в координатном представлении через производящий функционал:

$$G_{n+m}(k_1,..k_m,p_1\dots,p_n) = \int d^4x_1\dots d^4x_{n+m}e^{-\sum\limits_{i=1}^{m}ik_ix_i}e^{\sum\limits_{j=1}^{n}ip_jx_j}G_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+m}), \quad (2)$$

Редукционная формула в скалярных теориях

$$-iG_{n+m}(x_1,\ldots,x_{n+m}) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times \ldots \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n+m})} Z[j]\Big|_{j=0}. \qquad (3)$$

В итоге, получим общий вид ЛСЦ в скалярных теориях, когда все частицы находятся на массовой поверхности и имеют произвольные импульсы:

$$A_{m\to n} = \lim_{p^2_{i,j}\to m^2} \prod_{i=1}^{m}(k_i^2 - m^2) \prod_{j=1}^{n}(p_j^2 - m^2) \int d^4x_1 \ldots d^4x_{n+m} e^{-\sum\limits_{i=1}^{m} ik_i x_i} \times$$
$$\times e^{\sum\limits_{j=1}^{n} ip_j x_j} (-i)^{2(n+m)-1} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times \ldots \times \frac{\delta}{\delta j(x_{n+m-1})} \langle\Omega|\, \phi(x_{n+m})\, |\Omega\rangle \Big|_{j=0}. \qquad (4)$$

Можно показать, что матричный элемент $\langle\Omega|\, \phi(x_{n+m})\, |\Omega\rangle$ в древесном приближении удовлетворяет классическому уравнению движения с источником $j(x)$, поэтому введем обозначение $\langle\Omega|\, \phi(x_{n+m})\, |\Omega\rangle = \phi^j(x)$.

Древесные амплитуды $1 \to n$ на пороге

Рассмотрим теорию $\frac{\phi^4}{4!}$ и процесс, в котором одна виртуальная частица распадается на n конечных, которые находятся на пороге (Рассм. в [2]). Поскольку у всех конечных частиц известный конечный 4-импульс, равный ω, то источник в ЛСЦ удобно выбрать в виде $j(x_i) = j_0 e^{i\omega t}$. В таком случае формула ЛСЦ (4) принимает вид:

$$A_{1\to n} = (-1)^n \lim_{p_i^2 \to m^2} (\omega^2 - m^2)^n \frac{\partial^n}{\partial j_0^n} \int d^4x e^{-imnt} \phi^j(x) \Big|_{j_0=0}, \qquad (5)$$

где вариационная производная заменяется обыкновенной с помощью соотношения:

$$\int d^4 x_i e^{i\omega t_i} \frac{\delta}{\delta j(x_i)} = \frac{\partial}{\partial j_0}.$$

В силу выбранной кинематики, мы в праве рассмотреть пространственно-однородные решения, поэтому (52) принимает вид:

$$\ddot{\phi}^j(t) + m^2 \phi^j(t) + \frac{\lambda}{6} \phi^j(t)^3 = j_0 e^{i\omega t}. \qquad (6)$$

Древесные амплитуды $1 \to n$ на пороге

Такое уравнение можно, в принципе, решать по теории возмущений. Так, в нулевом приближении получим одно из частных решений:

$$\phi^j(t)^{(0)} = z(t) = \frac{j_0}{m^2 - \omega^2} e^{i\omega t}. \tag{7}$$

Но, можно заметить, что данное (но уже однородное) уравнение имеет первый интеграл, причем энергия системы, исходя из условия $\phi^j(t)|_{\lambda \to 0} = z(t)$ равна 0:

$$\frac{(\dot{\phi}^j(t))^2}{2} + \frac{m^2 \phi^j(t)^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\phi^j(t)^4 = 0. \tag{8}$$

Интегрируя это уравнение, можно получить явное решение (6) (в режиме $\omega \to m, j \to 0)$:

$$\phi^j(t) = \frac{z(t)}{1 - \frac{\lambda}{48m^2} z^2(t)}. \tag{9}$$

Древесные амплитуды $1 \to n$ на пороге

Для получения окончательного ответа заметим, что

$$(m^2 - \omega^2)e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial j_0} = \frac{\partial}{\partial z(t)}.$$

И окончательно получим:

$$A_{1\to n} = \frac{\partial^n}{\partial z(t)^n}\phi^j(x)\bigg|_{z=0} = n!\left(\frac{\lambda}{48m^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(2\pi)^4\delta(k_1 - (p_1 + .. + p_n)). \tag{10}$$

Стоит отметить, что явное применение правил Фейнмана для решения такой задачи является затруднительным, поскольку приводит к большим техническим сложностям. Тем не менее, для небольшого n вполне легко проделать соответствующее вычисление и убедиться, что (10) совпадает с ответом, полученным по правилам Фейнмана.

Древесные амплитуды $1 \to n$ за порогом

На примере рассеяния $1 \to n$ в теории $\frac{\phi^4}{4!}$ построим схему вычисления амплитуд за порогом в скалярных теориях. Полученная схема будет применима, в принципе, для любой скалярной теории. Редукционная формула (4) в данном случае принимает вид:

$$A_{1\to n} = (-1)^n \lim_{p_i^2 \to m^2} \prod_{i=1}^{n} (p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 \ldots d^4x_{n+1} e^{-ik_1x_{n+1}} e^{ip_1x_1+\ldots+p_nx_n} \times \\ \times \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times \ldots \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \phi^j(x_{n+1}) \Big|_{j=0}. \tag{11}$$

Общая техника нахождения амплитуд за порогом заключается в том, чтобы найти решение уравнения (52) по теории возмущений. Нужный порядок теории возмущений находится по числу конечных частиц: $k = \frac{n-1}{2}$.

Древесные амплитуды $1 \to n$ за порогом

Уравнение движения необходимо решать с источником, который будет содержать в себе информацию о импульсах всех конечных частиц. В данном случае выберем источник в виде:
$j(x) = j_1 e^{ip_1 x} + \ldots + j_n e^{ip_n x}$. Первые 3 порядка теории возмущений для уравнения (2.11) с таким источником, которые вносят вклад в амплитуды $1 \to 3$, $1 \to 5$ и $1 \to 7$, имеют вид:

$$\phi^j(x)^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{j_k}{m^2 - p_k^2} e^{ip_k x} = \sum_{k=1}^{n} z_k e^{ip_k x}, \tag{12}$$

$$\phi^j(x)^{(1)} = \frac{\lambda}{3!} \sum_{1 \le k_1 \le k_2 \le k_3}^{n} M_{k_1 k_2 k_3} \frac{z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}}{\Delta^2_{k_1 k_2 k_3} - m^2} e^{ix\Delta_{k_1 k_2 k_3}}, \tag{13}$$

$$\phi^j(x)^{(2)} = \frac{\lambda^2}{2!3!} \sum_{1 \le k_1 \le \ldots \le k_5}^{n} M_{k_1 \ldots k_5} \frac{z_{k_1} \ldots z_{k_5}}{(\Delta^2_{k_1 \ldots k_5} - m^2)(\Delta^2_{k_3 k_4 k_5} - m^2)} e^{ix\Delta_{k_1 \ldots k_5}}, \tag{14}$$

Древесные амплитуды $1 \to n$ за порогом

$$\phi^j(x)^{(3)} = \sum_{1\le k_1 \le \ldots \le k_7}^{n} M_{k_1\ldots k_7} \frac{z_{k_1}\ldots z_{k_7}}{(\Delta^2_{k_1\ldots k_7} - m^2)} \left(\frac{1}{3!(\Delta^2_{k_2k_3k_4} - m^2)(\Delta^2_{k_5k_6k_7} - m^2)} + \frac{1}{2!(\Delta^2_{k_3\ldots k_7} - m^2)(\Delta^2_{k_5k_6k_7} - m^2)} \right) e^{ix\Delta_{k_1\ldots k_7}} \frac{\lambda^3}{2!3!}, \tag{15}$$

где: $\Delta_{k_1\ldots k_f} = p_1 + \ldots + p_f$ и $M_{k_1\ldots k_f} = \frac{f!}{\prod_{i=1}^{f}(\text{duplicate indexes})!}$. Для всех различных конечных импульсов $M_{k_1\ldots k_f} = f!$.

Более высокие порядки теории возмущений находятся с помощью реккурентного соотношения:

$$\phi^j(x)^{(k)} = \frac{\lambda}{3!} \sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{k-1} M_{n_1n_2n_3} \phi^j(x)^{(n_1)} \phi^j(x)^{(n_2)} \phi^j(x)^{(n_3)}, \tag{16}$$

где $n_1 + n_2 + n_3 = k - 1$.

Древесные амплитуды $1 \to n$ за порогом

ЛСЦ с формальным решением:

$$A_{1\to n} = \lim_{p_i^2 \to m^2} \prod_{i=1}^{n} (p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 \dots d^4x_{n+1} e^{-ik_1x_{n+1}} e^{ip_1x_1 + \dots + p_nx_n} \times \\ \times \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times \dots \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \phi^j(x_{n+1})^{(k)}\Big|_{j=0}. \quad (17)$$

Делая замену:

$$\int d^4x_i (p_i^2 - m^2) e^{ip_ix_i} \frac{\delta}{\delta j(x_i)} = \frac{\partial}{\partial z_i}. \quad (18)$$

выписываем окончательный ответ для амплитуды:

$$A_{1\to n} = \frac{\partial}{\partial z_1} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial z_n} \phi^j(x_{n+1})^{(k)}\Big|_{z=0} (2\pi)^4 \delta(k_1 - (p_1 + \dots + p_n)). \quad (19)$$

Древесные амплитуды $2 \to n$ на пороге

В качестве примера вычисления амплитуды с помощью построенной схемы, рассмотрим рассеяние $2 \to n$ в теории $\frac{\phi^4}{4}$, когда все частицы находятся на массовой поверхности. Редукционная формула принимает вид:

$$A_{2\to n} = (i) \lim_{p_i^2 \to m^2} \prod_{i=1}^{2} (k_i^2 - m^2) \times (\omega^2 - m^2)^n \int d^4x_1 \ldots d^4x_{n+2} e^{-ik_1 x_{n+1} - ik_2 x_{n+2}} \times$$
$$\times e^{i\omega(t_1+\ldots+t_n)} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times \ldots \times \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \times \frac{\delta}{\delta j(x_{n+1})} \phi^j(x_{n+2}) \Big|_{j=0}. \qquad (20)$$

Источники: $j(t) = j_0 e^{i\omega t}$ – для конечных, $j(x) = j_1 e^{-ik_1 x}$ – для начальных частиц. Уравнение движения на $\phi^j(x)$ в древесном приближении:

$$(\partial^2 + m^2)\phi^j(x) + \lambda \phi^j(x)^3 = j_0 e^{i\omega t} + j_1 e^{-ik_1 x}. \qquad (21)$$

Древесные амплитуды $2 \to n$ на пороге

Решение ищем в виде: $\phi^j(x) = \phi_0(t) + \phi_1(x)$, где $\phi_0(t)$ есть решение (9), а $\phi_1(x)$ имеет первый порядок по источнику j_1. Тогда уравнение на $\phi_1(x)$:

$$(\partial^2 + m^2 + 3\lambda\phi_0(t)^2)\phi_1(x) = j_1 e^{-ik_1x}. \tag{22}$$

Функция Грина $D(x,y)$ для дифференциального оператора в (22):

$$D(\tau_1, \tau_2, \vec{p}) = \frac{1}{W_\omega}\Big(f^+(\tau_1)f^-(\tau_2)\theta(\tau_2 - \tau_1) + f^+(\tau_2)f^-(\tau_2)\theta(\tau_1 - \tau_2)\Big), \tag{23}$$

где $f^-(\tau)$, $f^+(\tau)$ – пара ЛНЗ решений уравнения Шредингера с потенциалом Пешля-Теллера, ограниченные при $\tau \to \pm\infty$:

$$f^+(\tau) = e^{\omega\tau}\left(\omega^2 - 3\omega th(\tau) + 2 - \frac{3}{ch^2(\tau)}\right), \tag{24}$$

$$f^-(\tau) = e^{-\omega\tau}\left(\omega^2 + 3\omega th(\tau) + 2 - \frac{3}{ch^2(\tau)}\right), \tag{25}$$

а их вронскиан $W_\omega = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4)$.

Древесные амплитуды $2 \to n$ на пороге

Ненулевые амплитуды: $2 \to 2$ и $2 \to 4$, поскольку полюса функции Грина $\Rightarrow$ решения только $\omega = 1, 2$.
Подстановка (24)–(25) в (23) и интегрирование дают:

$$\phi_1(\vec{x}, \tau) = j_1 \int d^4 y e^{-ik_1 y} D(x, y) = j_1 e^{-ik_1 \vec{x}} (-i) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau' \frac{e^{k_1^0 (\tau - \tau')}}{2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4)}$$
$$\left(e^{\omega(\tau - \tau')} \left[\frac{\omega^2 - 4}{4} + 3(th(\tau) - \frac{\omega}{2})^2 \right] \left[\frac{\omega^2 - 4}{4} + 3(th(\tau') + \frac{\omega}{2})^2 \right] \theta(\tau' - \tau) + \right.$$
$$\left. \left(e^{\omega(\tau' - \tau)} \left[\frac{\omega^2 - 4}{4} + 3(th(\tau') - \frac{\omega}{2})^2 \right] \left[\frac{\omega^2 - 4}{4} + 3(th(\tau) + \frac{\omega}{2})^2 \right] \theta(\tau - \tau') \right) \right. \tag{26}$$

Древесные амплитуды $2 \to n$ на пороге

Несмотря на то, что рассчитать амплитуды $2 \to 2$ и $2 \to 4$ легко с помощью диаграммной техники, явно продемонстрируем, что в разработанной схеме получается правильный результат. Рассмотрим процесс $2 \to 4$. Реально вычислять интегралы полностью не нужно, поскольку от них требуется полюсная часть для ЛСЦ! Тогда необходимая для амплитуды часть (26):

$$\phi_1(\vec{x},\tau) = (-i\lambda) j_1 \frac{9e^{-ik_1\vec{x}}}{2W_2}\phi_0^2(\tau)\Bigg(\int\limits_{\tau}^{+\infty} d\tau' e^{k_1^0(\tau-\tau')} e^{-\omega\tau'}(th(\tau') + \frac{\omega}{2})^2 + \int\limits_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{-k_1^0(\tau-\tau')} e^{\omega\tau'}(th(\tau') - \frac{\omega}{2})^2\Bigg)\Bigg|_{\omega\to 2}. \qquad (27)$$

Раскладвая $th(x) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-2x} + \ldots)$ получим ответ для полюсной части при $\omega = 2$:

Древесные амплитуды $2 \to n$ на пороге

$$\phi_1(\vec{x},\tau) = (-i\lambda) j_1 \lim_{\omega\to 2m} \frac{9e^{-ik_1\vec{x}+k_1^0\tau}}{2W_\omega}\phi_0^2(\tau)\frac{8\omega}{(k_1^0)^2-\omega^2}. \qquad (28)$$

Возвращаясь обратно к Минковскому времени и применяя полученную за порогом формулу (19), получим:

$$\begin{aligned} A_{2\to 4} &= (i)\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^4 \frac{\partial}{\partial z_1}(6\lambda\phi_0^2 z_1)\Big|_{z_0=0}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-4(m,\vec{0})) = \\ &= i\frac{\lambda^2}{8m^2}48\times 6\times(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-4(m,\vec{0})) = \\ &= i4!\frac{\lambda^2}{8m^2}\times 12\times(2\pi)^4\delta(k_1+k_2-4(m,\vec{0})). \qquad (29) \end{aligned}$$

Этот ответ совпадает с полученным с помощью правил Фейнмана.

Калибровочные теории

Рассмотрим теорию Янга-Миллса, с калибровочной группой $SU(N)$:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{30}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}}[A_\mu, A_\nu]$, $A_\mu = A_\mu^a T^a$, $a = 1, \ldots, N^2 - 1$.
Зафиксируем калибровку (Gervais-Neveu gauge):

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \frac{ig}{\sqrt{2}}(A^\mu)^2 - \omega(x). \tag{31}$$

Тогда слагаемое в лагранжиане, фиксирующее калибровку:

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_\mu^\mu\right)^2, \qquad H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \frac{ig}{\sqrt{2}}A_\mu A_\nu, \tag{32}$$

а полный лагранжиан:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} - H_{\mu\nu}H^{\nu\mu} - H_\mu^\mu H_\nu^\nu\right). \tag{33}$$

Калибровочные теории

Запись в терминах полей:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{\nu a} - i\sqrt{2}\partial^\mu A^{\nu a} A_\nu^b A_\mu^c B_{abc} + \frac{g^2}{4}\left(A^{\mu a} A^{\nu b} A_\nu^c A_\mu^d\right) C_{abcd}, \tag{34}$$

где

$$B_{abc} = \mathrm{Tr}\left(T_a T_b T_c\right), \qquad C_{abcd} = \mathrm{Tr}\left(T_a T_b T_c T_d\right).$$

В такой калибровке пропагартор имеет вид:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}\delta^{ab}, \tag{35}$$

где $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$.
Лагранжиан (34) приводит к следующему уравнению движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^{\nu a} + i\sqrt{2}g\left(\partial^\mu\left(A^{\nu b} A_\mu^c\right) - A_\mu^b \partial^\mu A^{\nu c} - \partial^\nu A^{\mu b} A_\mu^c\right) B_{bc}^a + \\ + \frac{g^2}{2}\left(A_\mu^b A^{\mu c} A^{\nu d} + A^{\nu b} A^{\mu c} A_\mu^d\right) C_{bcd}^a = 0 \tag{36}$$

Формула ЛСЦ и калибровочные теории

Вернемся к формуле ЛСЦ (в которой уже произведен переход в координатное представление для функции Грина и разложение через вариационные производные по производящему функционалу):

$$A_n\left(p_1,\epsilon_1(p_1),\ldots,p_n,\epsilon_n(p_n)\right)=(i)^n\lim_{p_i^2\to 0}\prod_{i=1}^{n}\left(D^{a_ib_i}_{\mu_i\nu_i}(p_i)\right)^{-1}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\times$$
$$\times e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}p_jx_j}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)}\times\ldots\times\times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j^{a_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})}\left\langle\Omega\right|A^{\mu_na_n}(x_n)\left|\Omega\right\rangle\Big|_{j=0}\prod_{i=1}^{n}\epsilon^{b_i}_{\nu_i}. \tag{37}$$

Подстановка пропагатора (35) дает:

$$A_n\left(p_1,\epsilon_1(p_1),\ldots,p_n,\epsilon_n(p_n)\right)=(i)\lim_{p_i^2\to 0}\prod_{i=1}^{n}p_i^2\epsilon^{\mu_i\,a_i}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\times$$
$$\times e^{i\sum\limits_{j=1}^{n}p_jx_j}\frac{\delta}{\delta j^{a_1}_{\mu_1}(x_1)}\times\ldots\times\times\frac{\delta}{\delta j^{a_{n-1}}_{\mu_{n-1}}(x_{n-1})}\left\langle\Omega\right|A^{\mu_na_n}(x_n)\left|\Omega\right\rangle\Big|_{j=0}. \tag{38}$$

Здесь матричный элемент $\left\langle\Omega\right|A^{\mu_na_n}(x_n)\left|\Omega\right\rangle$ удовлетворяет (36) с $j(x)$.

Схема вычисления амплитуд

Решим (36) в нулевом порядке ТВ с источником вида: $J^{\nu a}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} j^{\nu a} e^{ip_i x}$. Тогда:

$$A^{\nu a} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{j^{\nu a}}{p_i^2} e^{ip_i x} = -\sum_{i=1}^{n-1} z_i^{\nu a} e^{ip_i x}, \qquad z_i^{\nu a} = \frac{j^{\nu a}}{p_i^2}. \tag{39}$$

Переходя от вариационных производных в (38) к обычным через:

$$\int d^4 x_k e^{ip_k x_k} p_k^2 \frac{\delta}{\delta j^{a_k}_{\mu_k}(x_k)} = \frac{\partial}{\partial z^{a_k}_{k\mu_k}}, \tag{40}$$

получим:

$$A_n(p_1, \epsilon_1, \dots, p_n, \epsilon_n) = (i) \lim_{p_n^2 \to 0} p_n^2 \prod_{i=1}^{n} \epsilon^{a_i}_{\mu_i} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}_{1\mu_1}} \times \dots \times \frac{\partial}{\partial z^{a_{n-1}}_{n-1\mu_{n-1}}} A^{\mu_n a_n}(x_n)\Big|_{z=0}. \tag{41}$$

3-частичные амплитуды

Для вычисления 3-частичных амплитуд решим (36) с источником во первом порядке ТВ:

$$A^{\nu a}_{(1)}(x) = -\sqrt{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(z_i^{\nu\, b} z_{j\,\mu}^{\ c}\Delta^{\mu}_{ij} - z_{i\,\mu}^{\ b} p_j^{\mu} z_j^{\nu\, c} - z_i^{\mu\, b} p_i^{\nu} z_{j\,\mu}^{\ c}\right)\frac{e^{i\Delta_{ij}x}}{\Delta^2_{ij}} B^a_{bc}. \tag{42}$$

Подстановка данного решения в схему дает полную амплитуду:

$$A_3 = ig\sqrt{2}\Big(\big((\epsilon^1\epsilon^2)(\epsilon^3 p_1) + (\epsilon^2\epsilon^3)(\epsilon^1 p_2) + (\epsilon^3\epsilon^1)(\epsilon^2 p_3)\big)B_{123} + \\ + \big((\epsilon^3\epsilon^1)(\epsilon^2 p_1) + (\epsilon^1\epsilon^2)(\epsilon^3 p_2) + (\epsilon^2\epsilon^3)(\epsilon^1 p_3)\big)B_{132}\Big). \tag{43}$$

Слагаемое при B_{123} можно переписать с помощью спинорно-спирального формализма:

$$A_3[1^-, 2^-, 3^+] = ig\frac{\langle 12\rangle^3}{\langle 23\rangle\langle 31\rangle}B_{123}, \tag{44}$$

4-точечные амплитуды

Решение в 2 порядке ТВ:

$$A^{\nu a}_{(2)} = 2\sum_{i,j,k}\Bigg[\left(z_i^{\nu b}\Pi^{de}_{\mu jk}\Delta^{\mu}_{ijk} - z^{b}_{i\mu}\Pi^{\nu de}_{jk}\Delta^{\mu}_{jk} - z_i^{\mu b}\Pi^{de}_{\mu jk}p_i^{\nu}\right)\frac{B_{cde}}{\Delta^2_{jk}} + \\ + \left(\Pi^{\nu de}_{ij} z^{c}_{\mu k}\Delta^{\mu}_{ijk} - \Pi^{de}_{\mu ij} z_k^{\nu c} p_k^{\mu} - \Pi^{\mu de}_{ij} z^{c}_{\mu k}\Delta^{\nu}_{ij}\right)\frac{B_{bde}}{\Delta^2_{ij}}\Bigg]\frac{e^{i\Delta_{ijk}x}}{\Delta^2_{ijk}}B^{a}_{bc} - \\ - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\left(z^{b}_{\mu i} z_j^{\mu c} z_k^{\nu d} + z_i^{\nu b} z_j^{\mu c} z^{d}_{\mu k}\right)\frac{e^{i\Delta_{ijk}x}}{\Delta^2_{ijk}}C^{a}_{bcd}. \quad (45)$$

Здесь введено обозначение:

$$\Pi^{\nu bc}_{ij} = z_i^{\nu b} z^{c}_{j\mu}\Delta^{\mu}_{ij} - z^{b}_{i\mu} p_j^{\mu} z_j^{\nu c} - z_i^{\mu b} p_i^{\nu} z^{c}_{j\mu}. \quad (46)$$

При подстановке данного решения в схему получается сложное выражение для амплитуды, тем не менее, его можно упростить, зафиксировав надлежащим образом калибровочные импульсы в векторах поляризации.

4-точечные амплитуды

Выражение для векторов поляризации:

$$\epsilon_+^\mu(p,q) = -\frac{\langle q|\,\gamma^\mu|p]}{\sqrt{2}\langle qp\rangle}, \qquad \epsilon_-^\mu(p,q) = -\frac{\langle p|\,\gamma^\mu|q]}{\sqrt{2}[qp]}. \tag{47}$$

Для векторов поляризации выберем такие калибровочные импульсы: $q_1 = q_2 = p_3, q_3 = q_4 = p_2$. Но тогда $\epsilon^{a_1}\epsilon^{a_2} = \epsilon^{a_2}\epsilon^{a_3} = \epsilon^{a_1}\epsilon^{a_3} = \epsilon^{a_2}\epsilon^{a} = \epsilon^{a_3}\epsilon^{a} = 0$. Кроме того, нетрудно убедиться, что $\epsilon^{a_3}p_2 = \epsilon^{a_2}p_3 = 0$.

Рассмотрение одного из слагаемых, дающих вклад в полную амплитуду приводит к частному случаю формулы Парка-Тейлора:

$$A_4[1^-,2^-,3^+,4^+] = ig^2\frac{\langle 12\rangle^4}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle\langle 34\rangle\langle 41\rangle}B^4_{b3}B_{b12}. \tag{48}$$

Итоги

- Исследована связь древесных амплитуд, рассчитываемых с помощью формулы ЛСЦ и классических решений.
- На простейшем примере рассеяния $1 \to n$ на пороге предемонтрирована связь решений и амплитуд.
- Разработана схема выхода за порог в скалярных теориях.
- Найдены древесные амплитуды для рассеяния $2 \to n$ с помощью разработанной схемы.
- Для случая теории Янга-Миллса с калибровочной группой $SU(N)$ была построена схема вычисления древесных амплитуд с помощью формализма классических решений.
- Вычислены 3-х и 4-х-частичные амплитуды в теории Янга-Миллса, используя разработанную схему. Полученные ответы совпали с формулой Парка-Тейлора.

Литература

- H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmerman – Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, Nuovo Cimento 1(1), 205 (1955).
- Brown L.S. – Summing tree graphs at threshold. Phys.Rev., 1992, vol.D46, p.4125.
- Либанов М.В., Рубаков В.А., Троицкий С.В. – Многочастичные процессы и квазиклассика в бозонных теориях поля. "Физика элементарных частиц и атомного ядра" 1997, том 28, вып.3.
- Voloshin M.B. – Multiparticle amplitudes at zero energy and momentum in scalar theory. Nuclear Physics, 1992, B383, 233-248.
- Elvang H., Huang Y. – Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity, Cambridge University Press, 2015.

Приложение 1. ЛСЦ и классические уравнения движения

Найдем уравнение, которому уровлетворяет $\langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle$ в (4). Рассмотрим выражение вида $\frac{1}{Z[j]}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)}$. Ведем обозначение:

$$\frac{1}{Z[j]}\frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i(S+\int d^4yj(y)\phi(y))}\phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS+\int d^4yj(y)\phi(y))}} = \phi^j(x). \tag{49}$$

Для общего случая скалярной теории известно уравнение, которому удовлетворяет производящий функционал:

$$(\partial^2+m^2)\frac{1}{i}\frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} - \mathcal{L}'_I\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]Z[j] = j(x)Z[j]$$

Тогда в обозначении (49) это уравнение - уравнение движения на $\phi^j(x)$:

$$(\partial^2+m^2)\phi^j(x) + \frac{1}{Z[j]}\mathcal{L}'_I\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]Z[j] = j(x) \tag{50}$$

Приложение 2. Амплитуды в теории ϕ^4

Рассмотрим в качестве примера теорию ϕ^4. Для нее уравнение (50) запишется в виде:

$$(\partial^2+m^2)\phi^j(x)+\frac{\lambda}{6}\left(\phi^j(x)^3-3i\hbar\phi^j(x)\frac{\delta\phi^j(x)}{\delta j(x)}-\hbar^2\frac{\delta^2\phi^j(x)}{\delta j(x)^2}\right)=j(x). \quad (51)$$

Уравнение на матричный элемент в интересующем нас древесном приближении получается из (51) стремлением $\hbar$ к 0:

$$(\partial^2+m^2)\phi^j(x)+\frac{\lambda}{6}\phi^j(x)^3=j(x), \quad (52)$$

и совпадает с уравнением движения для поля ϕ с источником.

Приложение 3. Выделение несвязных частей

В (4) мы увидели, что для рассчета амлитуд необходимо проварьировать матричный элемент $\langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle = \phi^j(x)Z[j]$. Убедимся, что в действительности для рассчета амплитуд нам необходимо варьировать только часть с $\phi^j(x)$. Для простоты рассмотрим n–точечную амплитуду:

$$A_n = (-i)^n \lim_{p_i^2\to m^2} \prod_{i=1}^{n}(p_i^2 - m^2) \int d^4x_1 ... d^4x_n e^{ip_1x_1+...+p_nx_n} \times \\ \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)} \times ... \times \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\left[\phi^j(x_n)Z[j]\right]\Bigg|_{j=0}. \qquad (53)$$

Известно, что производящий функционал в произвольной теории с взаимодействием имеет вид:

$$Z[j] = exp\left[-i\int d^4xV\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right)\right]exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yj(x)G(x-y)j(y)\right]. \qquad (54)$$

Приложение 3. Выделение несвязных частей

В случае теории ϕ^4 в первом порядке теории возмущений имеем:

$$Z[j] = \left(1 - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\left[-3iG^2(0) - 6iG(0)(\phi_0^j)^2(x) + {\phi_0^j}^4(x)\right] + \right.$$
$$\left. + \mathcal{O}(\lambda^2)\right) Z_0[j], \quad (55)$$

где $Z_0[j] = exp\left[\frac{i}{2}\int d^4xd^4yj(x)G(x-y)j(y)\right]$.
В древесном приближении $\phi^j(x)$:

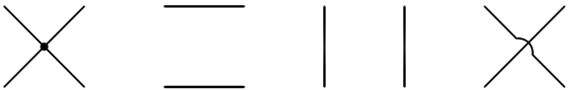
$$\phi^j(x) = \phi_0^j(x) - \frac{\lambda}{6}\int d^4yG(x-y){\phi_0^j}^3(x) + \mathcal{O}(\lambda^2). \qquad (56)$$

И во всех формулах $\phi_0^j(x) = \int d^4yG(x-y)j(y)$.
Явно вычислим подинтегральное выражение в (53) для n=4:

Приложение 3. Выделение несвязных частей

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_2}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_3}\left[\phi^j(x_4)Z[j]\right]\Big|_{j=0} = \left(\frac{1}{i}\right)^3\frac{\delta}{\delta j_1}\frac{\delta}{\delta j_2}\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))+$$
$$+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_3}(\phi^j(x_4))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_2)) + \left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_4))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_3))+$$
$$+\left(\frac{1}{i}\right)^2\frac{\delta}{\delta j_2}(\phi^j(x_3))\frac{\delta}{\delta j_1}(\phi^j(x_4)). \quad (57)$$

Диаграммное представление этого выражения изображено ниже.



Диаграммное представление

Видно, что вклад в амплитуду дает только первое слагаемое в (13), а остальные соответствуют несвязным диаграммам.

Приложение 3. Выделение несвязных частей

Отсюда сразу можно сделать вывод, что при рассчете n–точечной амплитуды по формуле (53) при n – нечетном интересующая нас часть с производными имеет вид:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\times\ldots\times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\phi^j(x_n)\Big|_{j=0}. \tag{58}$$

При четном числе линий отличными от нуля являются слагаемые, в которых на поле падает нечетное число производных. Но эти слагаемые являются несвязными частями в амплитудах из-за множителей связанных с варьированием производящего функционала:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\times\ldots\times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\phi^j(x_n)\Big|_{j=0}+\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_1)}\phi^j(x_2)\times$$
$$\times\ldots\times\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x_{n-1})}\phi^j(x_n)\Big|_{j=0}+(\text{all transpositions}). \tag{59}$$

Приложение 4. Функция Грина

1) Перейдем в евклидово время:

$$\tau = it + \frac{1}{m}\log(z_0) + \frac{1}{2m}\log\left(\frac{\lambda}{8m^2}\right) - \frac{i\pi}{2},$$

или

$$\left(\frac{\lambda}{8m^2}\right)^{\frac{1}{2}} z(t) = ie^{m\tau}.$$

2) Разложим функцию Грина $D(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению $(\partial^2 + m^2 + 3\lambda\phi_0(t)^2)D(x, y) = \delta^4(x - y)$ в интеграл Фурье по пространственным компонентам:

$$D(x, y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} D(\tau_1, \tau_2, \vec{p}).$$

Приложение 4. Функция Грина

Тогда искомая функция Грина $D(\tau_1, \tau_2, \vec{p})$ является функцией Грина для ОДУ ($m = 1$):

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \underbrace{(\vec{p})^2 + 1}_{\omega^2} - \frac{6}{ch^2(\tau)} \right) u(\tau) = 0. \tag{60}$$

Заменой $th(\tau) = x$ (60) сводится к уравнению на присоединенные функции Лежандра. В общем виде пара линейно независимых решений:

$$f^+(\tau) = e^{\omega\tau} \left(\omega^2 - 3\omega th(\tau) + 2 - \frac{3}{ch^2(\tau)} \right), \tag{61}$$

$$f^-(\tau) = e^{-\omega\tau} \left(\omega^2 + 3\omega th(\tau) + 2 - \frac{3}{ch^2(\tau)} \right), \tag{62}$$

Их вронскиан: $W_\omega = 2\omega(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4)$.

Приложение 5. 4-частичная амплитуда в калибровочной теории

$$
\begin{aligned}
A_4 = ig^2 \Bigg[2 \Bigg[& B^a_{a_1 c} B_{c a_2 a_3} \Big((\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2} p_4)(\epsilon^{a_3} p_2) + 2(\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2} p_3)(\epsilon^{a_3} p_2) - \\
& - (\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_3} p_4)(\epsilon^{a_2} p_3) - 2(\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2} \epsilon^{a_3})(p_2 p_3) - \\
& - (\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2} \epsilon^{a_3})(p_2 p_4) + (\epsilon^a \epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3} p_2)(\epsilon^{a_1} \Delta_{23}) - (\epsilon^a \epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2} p_3)(\epsilon^{a_1} \Delta_{23}) - \\
& - (\epsilon^a p_2)(\epsilon^{a_2} \epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_1} \Delta_{23}) + (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1} \epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3} p_2) - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1} \epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2} p_3) - \\
& - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1} p_2)(\epsilon^{a_2} \epsilon^{a_3}) \Big) \frac{1}{\Delta_{23}^2} + B^a_{b a_3} B_{b a_1 a_2} \Big((\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_3} p_4)(\epsilon^{a_2} p_1) - \\
& - (\epsilon^a \epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3} p_4)(\epsilon^{a_1} p_2) - (\epsilon^a p_1)(\epsilon^{a_1} \epsilon^{a_2})(\epsilon^{a_3} p_4) + (\epsilon^{a_1} p_3)(\epsilon^a \epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2} p_1) - \\
& - (\epsilon^{a_1} p_2)(\epsilon^a \epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_2} p_3) - (\epsilon^a \epsilon^{a_3})(\epsilon^{a_1} \epsilon^{a_2})(p_1 p_3) + (\epsilon^{a_2} \Delta_{12})(\epsilon^{a_1} \epsilon^{a_3})(\epsilon^a \Delta_{12}) - \\
& - (\epsilon^{a_1} p_2)(\epsilon^{a_2} \epsilon^{a_3})(\epsilon^a \Delta_{12}) - (\epsilon^{a_3} p_1)(\epsilon^{a_1} \epsilon^{a_2})(\epsilon^a \Delta_{12}) \Big) \frac{1}{\Delta_{12}^2} \Bigg] - \\
& - (\epsilon^a \epsilon^{a_1})(\epsilon^{a_2} \epsilon^{a_3}) C_{abcd} \Bigg] + \text{perms of } (a_1, a_2, a_3). \qquad (63)
\end{aligned}
$$

Приложение 6. Спирально-спинорный формализм

Данный раздел целиком опирается на обзор [5].

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=\pm} \left(a^s_{\vec{p}} u_s(p) e^{-ipx} + b^{s\dagger}_{\vec{p}} v_s(p) e^{ipx} \right), \qquad (64)$$

Введем обозначения для четырехкомпонентных решений $v_\pm$ и $\bar{u}_\pm$:

$$\bar{u}_-(p) = (0, \langle p|_{\dot{a}}) \qquad \bar{u}_+(p) = ([p|^a, 0), \qquad (65)$$

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} |p]_a \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \qquad (66)$$

В таких обозначениях уравнения Вейля имеют вид:

$$p^{\dot{a}b}|p]_b = 0, \qquad p_{a\dot{b}}\, |p\rangle^{\dot{b}} = 0, \qquad [p|^b p_{b\dot{a}} = 0, \qquad \langle p|_{\dot{b}}\, p^{\dot{b}a} = 0, \qquad (67)$$

причем $p_{a\dot{b}} = p_\mu (\sigma^\mu)_{a\dot{b}}$.

Приложение 6. Спирально-спинорный формализм

1) Произведение спиноров:

$$\bar{u}_+(p_1)v_-(p_2) = 0; \qquad \bar{u}_-(p_1)v_-(p_2) = \langle 1|_{\dot{a}}\,|2\rangle^{\dot{a}} = \langle 12\rangle = -\langle 21\rangle. \quad (68)$$

$$\bar{u}_-(p_1)v_+(p_2) = 0; \qquad \bar{u}_+(p_1)v_+(p_2) = [1|^a|2]_a = [12] = -[21]. \quad (69)$$

2) Квадрат модуля суммы импульсов ($p_i^2 = 0$):

$$(p+q)^2 = 2pq = -\langle pq\rangle[pq] \quad (70)$$

3) Тождество Фирца:

$$\langle 1|\,\gamma^\mu\,|2]\,\langle 3|\,\gamma_\mu\,|4] = -2\langle 13\rangle[24]. \quad (71)$$

4) Свертка с импульсом:

$$\langle 1|\,\gamma^\mu\,|2]p_\mu = \langle 1p\rangle[p2]. \quad (72)$$

5) Тождество Шутена:

$$\langle pq\rangle\langle rs\rangle + \langle ps\rangle\langle qr\rangle + \langle pr\rangle\langle sq\rangle = 0. \quad (73)$$