

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА физики частиц и космологии

МАГИСТЕРСКАЯ РАБОТА

**Влияние гексадекаполя на ограничение космологических
параметров по данным крупномасштабной структуры
Вселенной**

Выполнил студент 243м группы:
Долгих Константин Александрович

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук Белокуров Владимир Викторович

Научный консультант:
к.ф.-м.н. Чудайкин Антон Сергеевич



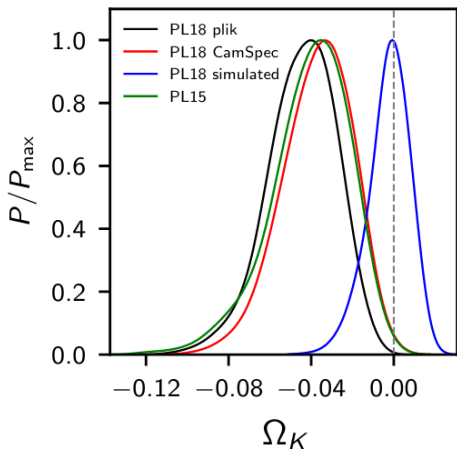
Москва
2021

Содержание

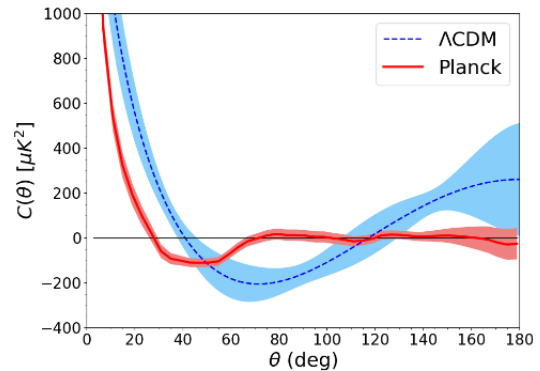
1	Введение	2
2	Теория возмущений в космологии	4
2.1	Стандартная космологическая теория возмущений	4
2.2	Контрчлены	6
2.3	Космологическая теория возмущений на временных рас- слоениях	7
2.4	Связь с наблюдениями	9
2.5	Переход в RSD и эффект Кайзера	9
2.6	«Пальцы Бога»	10
2.7	Эффект Алкока-Пачинского	11
2.8	ИК-пересуммирование	11
3	Численный метод	12
3.1	Принцип правдоподобия	12
3.2	Метод Монте-Карловских Марковских цепей	13
3.3	Используемое ПО и данные	14
4	Используемые данные	15
5	Результаты	16
5.1	Параметры и их априорные ограничения	16
5.2	Тесты на симуляциях	17
5.3	Анализ реальных данных	21
6	Заключение	27
7	Дополнение: величины в космологической теории возму- щений	32

1. Введение

На данный момент основным источником ограничений на космологические параметры считается космическая обсерватория Планк, измеряющая анизотропию реликтового излучения (СМВ). Однако данные СМВ имеют ряд особенностей и недостатков: большие области на небесной сфере оказываются нескоррелированы, что противоречит стандартной космологической модели [1], аномальная по сравнению с предсказаниями Λ CDM модели линзирование, заниженная квадрупольная компонента, космологические параметры, полученные из разных частей спектра, не согласуются друг с другом ($> 2\sigma$), что в совокупности приводит к ряду искажений. Также это ставит вопрос о том, есть ли какие-либо неучтённые эффекты в данных Планка. [2] В частности, несколько лет назад была опубликована работа, где были проанализированы данные Planck в модели с произвольной пространственной кривизной, и утверждается, что данные Планка отдают предпочтение ненулевой кривизне с достоверностью 99% [3].



Ограничения на кривизну Вселенной по данным Planck согласно [3]



Несогласие угловой двухточечной корреляционной функции у СМВ и Λ CDM [1]

Также результат анализа данных Planck находится в напряжении с результатами наблюдений крупномасштабной структуры Вселенной, которые проводятся такими коллаборациями как KiDS, DES, BOSS. В частности, например, величина $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3}$ при анализе Planck получается существенно выше аналогичных измерений у обсерваторий [19] на уровне статистической значимости $2.5 - 3\sigma$. Также возникают некоторые вопросы с параметром Хаббла ("Хаббловский кризис"), расхождения по

которому превышают 3σ .

Ввиду обозначенных расхождений в экспериментальной космологии актуальной задачей является поиск альтернативных источников космологической информации. В частности, одним из перспективных направлений является изучение крупномасштабной структуры Вселенной. Ранее данные барионных акустических осцилляций (БАО) использовались в совместном анализе вместе с данными СМВ, однако полная форма спектра игнорируется, хотя в ней содержится заведомо больше космологической информации. На данный момент, по результатам обработки данных BOSS SDSS ограничения, получаемые из полной формы спектра, на параметры Λ CDM сопоставимы с ограничениями, получаемыми от БАО, и такой анализ уступает Планку, но это вызвано недостаточной статистикой. Ожидается, что со временем полная форма спектра будет давать больше информации, так как измерений будет больше и это уменьшит статистическую ошибку: сейчас поступают данные от обсерватории DESI и BOSS, а в будущем планируется получение данных от обсерватории LSST и от ещё не запущенного космического аппарата Euclid, который будет способен промерить спектры 50 миллионов галактик. Точность анализа барионных акустических осцилляций близка к пределу и в будущем не даст ощутимого увеличения точности даже с будущими измерениями. Теоретическое описание полной формы спектра затруднено в силу гравитационной неустойчивости. Уже на $k \sim 0.1 h\text{Mpc}^{-1}$ спектр плохо описывается линейной теорией из-за чего спектр необходимо обрезать, поэтому были развиты теории возмущений: стандартная космологическая теория возмущений (СТВ) и её альтернатива – теория возмущений на временных расслоениях. Здесь будет использована теория возмущений на временных расслоениях (ТВВР), особенности которой будут изложены ниже. Основным объектом ТВВР являются физические наблюдаемые величины и благодаря этому в ней отсутствуют инфракрасные расходимости, это облегчает пересуммирование инфракрасных вкладов в каждом порядке по теории возмущений. Учёт однопетлевой поправки по теории возмущений позволяет исследовать спектр до $k \sim 0.2 - 0.3 h\text{Mpc}^{-1}$.

Непосредственно измерение спектра производится в пространстве красных смещений, где помимо изотропного монопольного вклада P_0 появляются анизотропные вклады высших порядков $P_{2,4,\dots}$. Исторически обычно анализируются только первые две компоненты, но были основания полагать [17], что включение в рассмотрение гексадекаполя может дать улучшение на 30%. Однако в работе [17] проводился так называемый альфа-анализ, который является модельно независимым. В данной рабо-

те проверяется полученный в [17] результат и изучается влияние высшей компоненты разложения P_4 энергетического спектра галактик на ограничения космологических параметров в Λ CDM модели и её расширениях (модели с тёмной энергией с постоянным уравнением состояния и с динамической тёмной энергией) с помощью Монте-Карловских Марковских цепей.

2. Теория возмущений в космологии

Для теоретического описания структур во Вселенной используется эйлерова теория возмущений на основе гидродинамики идеальной жидкости.

2.1. Стандартная космологическая теория возмущений

Исторически первым подходом описания сгущивания тёмной материи стала так называемая стандартная теория возмущений (СТВ или SPT). В её основе лежит гидродинамика идеальной жидкости в гравитационном потенциале.

Для начала вспомним гидродинамику идеальной жидкости [4]:
уравнение непрерывности: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$,
уравнение Эйлера: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\nabla \Phi$,
уравнение Пуассона: $\Delta \Phi = -4\pi G \rho$.

Стандартный подход, применённый в расширяющейся Вселенной [5], приводит нас к следующей модификации [7]:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla [(1 + \delta) \vec{u}] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \mathcal{H} \vec{u} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla \phi \quad (2)$$

Где $\delta(\vec{x}, \tau)$ – контраст плотности, определяется из

$$\rho(\vec{x}, \tau) = \bar{\rho}(\vec{x}, \tau)(1 + \delta(\vec{x}, \tau)),$$

$\vec{u}(\vec{x}, \tau)$ – поле собственных скоростей, $\mathcal{H} \equiv aH$ – конформный параметр Хаббла, $H(\tau)$ – параметр Хаббла, ϕ – космологический гравитационный потенциал, который связан с обычным следующим соотношением:

$$\phi(\vec{x}, \tau) \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} x^2 + \Phi(\vec{x}, \tau), \quad (3)$$

τ – конформное время $a d\tau = dt$. С учётом уравнения (2.3) из литературы [6] в терминах конформного времени

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \Omega_m \delta \quad (4)$$

получаем аналог уравнения Пуассона для гравитационного поля:

$$\Delta\phi = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta(\vec{x}, \tau), \quad (5)$$

где Ω_m – плотность материи.

В литературе также используется линейный фактор роста: $D(\tau) = \delta(\vec{x}, \tau)/\delta(\vec{x}, 0)$.

Также часто используются величины $\eta = \log D(\tau)$, $f = \frac{d \ln D(\eta)}{d \ln a(\eta)}$ и $\theta(\vec{x}, \tau) = \nabla \vec{u}(\vec{x}, \tau)$. Для последнего в Фурье-образе аналог записывается так: $\Theta_\eta(\vec{k}) = \frac{\nabla \vec{u}(\eta, \vec{k})}{f a H}$.

Часто все уравнения переписывают в Фурье-пространстве:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(\eta, \vec{k}) - \Theta_\eta(\vec{k}) &= \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \alpha(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \Theta_\eta(\vec{q}_1) \delta(\eta, \vec{q}_2) \\ \dot{\Theta}_\eta(\vec{k}) - \frac{3\Omega_m}{2f^2} \delta(\eta, \vec{k}) + \left(\frac{3\Omega_m}{2f^2} - 1 \right) \Theta_\eta(\vec{k}) \\ &= \int d\vec{q}_1 d\vec{q}_2 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \beta(\vec{q}_1, \vec{q}_2) \Theta_\eta(\vec{q}_1) \Theta_\eta(\vec{q}_2) \end{aligned}$$

Где используются обозначения:

$$\alpha(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \equiv \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{k}_1}{k_1^2}, \quad \beta(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \equiv \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)^2 (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)}{2k_1^2 k_2^2} \quad (6)$$

Примечательно, что в Λ CDM-модели коэффициент Ω_m/f^2 близок к 1 и замена $\Omega_m/f^2 \rightarrow 1$ даёт ошибку не более 1% [9], что можно учесть путём разложения по параметру $\Omega_m/f^2 - 1$.

Эти уравнения формально решаются пертурбативным разложением по степеням масштабного фактора $a(\tau)$:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n(\tau) \delta_n(\vec{k}) \quad (7)$$

Интересующая нас двухточечная корреляционная функция в Фурье пространстве задаётся как:

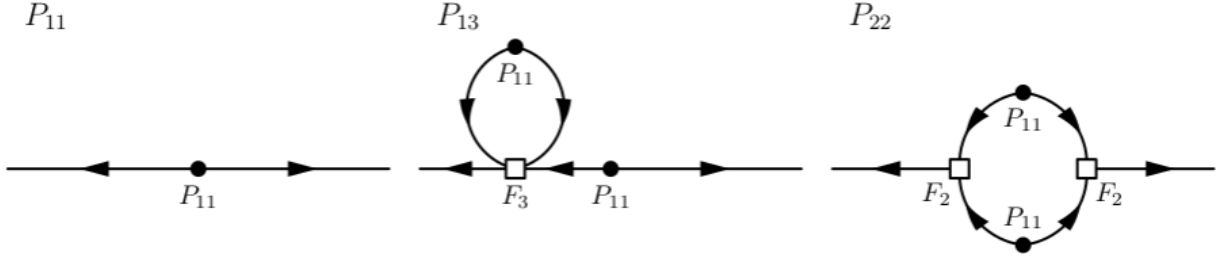
$$\langle \delta_n(\vec{k}_1) \delta_m(\vec{k}_2) \rangle = P_{nm}(k) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (8)$$

и представляет собой простейшую наиболее легко измеряемую величину крупномасштабной структуры Вселенной. Нас интересует выражение: $P_{\text{nn}} = P_{11} + P_{22} + 2P_{31}$, здесь P_{11} – линейный спектр мощности. Члены P_{22} и P_{31} описывают однопетлевую поправку и выражаются через интегральные ядра и линейный спектр (обозначения приведены в Дополнении 7):

$$P_{31}(k) = 3P_{11}(k) \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} F_3^{(s)}(\vec{k}, \vec{q}, -\vec{q}) P_{11}(q) \quad (9)$$

$$P_{22}(k) = 2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} F_2^{(s)}(\vec{k} - \vec{q}, \vec{q})^2 P_{11}(|\vec{k} - \vec{q}|) P_{11}(q) \quad (10)$$

Примечательно, что для космологической теории возмущений можно предложить диаграмматику Фейнмана. Например, упомянутые выше выражения можно схематично изобразить следующим образом:



Важно заметить, что стандартная теория возмущений имеет вычислительные проблемы на инфракрасном и ультрафиолетовом пределах. На верхнем пределе ($q \rightarrow \infty$) однопетлевое приближение не применимо, что может приводить к неправильному ответу. На нижнем пределе ($q \rightarrow 0$) петлевой интеграл принимает очень большие значения, что затрудняет его вычисление. Это приводит к нефизичному результату в инфракрасной области, а в других моделях может приводить к бесконечным величинам. Демонстрация этого факта приведена в литературе [7]. Выражения для ядер F_2 и других приведены также в литературе [7] и выражаются итеративными формулами через δ .

2.2. Контрчлены

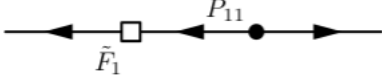
Контрчлены не являются компонентом непосредственно теории возмущений и описывают некоторые эффекты неидеальной жидкости на малых масштабах.

Добавление контрчленов в СТВ описано в литературе ([7],[8]) и выглядит так:

$$P_{\text{nn}} = P_{11} + P_{22} + 2P_{31} + 2P_{\bar{11}} \quad (11)$$

Здесь P_{11} – контрчлен. На языке диаграмм Фейнмана его можно изобразить так:

P_{11}



Здесь $\tilde{F}_1 = -c_s^2 k^2$ – ядро контрчлена, а $P_{11} = -c_s^2 k^2 P_{11}$. Коэффициент c_s^2 аналитически считается плохо и одна из причин – большое значение P_{31} в инфракрасном пределе:

$$\lim_{k \rightarrow 0} P_{31}(k) = -\frac{61}{630} k^2 P_{11}(k) \int_q \frac{P_{11}(q)}{q^2} = -\frac{61}{210} k^2 P_{11}(k) \sigma_d^2, \quad (12)$$

где

$$\sigma_d^2(\Lambda) = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\Lambda dq P_{11}(q)$$

Структура выражений одинакова по степеням k и обычной практикой является переопределение:

$$\sigma_d^2 \rightarrow \sigma_d^2 + \frac{210}{61} c_s^2, \quad (13)$$

что и является настоящим коэффициентом при $k^2 P_{11}(k)$.

2.3. Космологическая теория возмущений на временных расслоениях

Космологическая теория возмущений на временных расслоениях (ТВВР) призвана компенсировать некоторые недостатки SPT (в частности усиления инфракрасных петлевых вкладов), а также может быть применена к другим динамическим системам. Предположения ТВВР [10]:

- в системе выполняется закон сохранения импульса;
- система инвариантна относительно отражения координат;
- известно начальное распределение $\Theta(\eta_0)$ (например, гауссово).

Основа решения – уравнение Лиувилля, которое в самом общем виде можно записать следующим образом:

$$\dot{\Theta}_\eta(\vec{k}) = \mathcal{I}(\Theta_\eta, \eta, \vec{k}), \quad (14)$$

где Θ_η – корреляционная функция поля. Пусть правая часть уравнения раскладывается в ряд Тейлора по полю:

$$\mathcal{I}(\Theta_\eta, \eta, \vec{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int (d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_n) I_n(\eta, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n) \delta\left(\vec{k} - \sum \vec{q}\right) \prod_{j=1}^n \Theta_\eta(\vec{q}_j)$$

Причём

$$I_m(\eta; \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m) = I_m(\eta; -\vec{q}_1, \dots, -\vec{q}_m)$$

Принципиальное отличие ТВВР от СТВ состоит в том, что основной элемент анализа – функция распределения вероятности, а не само поле δ . Для работы с корреляционными функциями воспользуемся производящим функционалом через континуальный интеграл:

$$Z[J; \eta] = \mathcal{N}^{-1} \int [\mathcal{D}\Theta_{\eta_0}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \frac{\Theta_{\eta_0}(\vec{k})\Theta_{\eta_0}(-\vec{k})}{P_{\eta_0}(k)} + \Theta_\eta(\vec{k})J(-\vec{k}) \right\} \quad (15)$$

$$\mathcal{N} = \int [\mathcal{D}\Theta_{\eta_0}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \frac{\Theta_{\eta_0}(\vec{k})\Theta_{\eta_0}(-\vec{k})}{P_{\eta_0}(k)} \right\}, \quad (16)$$

Коррелятор и спектр тогда задаются:

$$\langle \Theta_{\eta_0}(\vec{k}_1)\Theta_{\eta_0}(\vec{k}_2) \rangle = \frac{\delta^2 Z[J; \eta_0]}{\delta J(-\vec{k}_1)\delta J(-\vec{k}_2)} \Big|_{J=0} = P_{\eta_0}(k_1)\delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$$

Замена переменных приводит к:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta] + \int d^3\vec{k} \frac{\delta}{\delta \Theta_\eta(\vec{k})} (\mathcal{I}[\Theta_\eta; \eta, \vec{k}] \mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta]) = 0 \quad (17)$$

$$Z[J; \eta] = \int [\mathcal{D}\Theta_\eta] \mathcal{P}[\Theta_\eta; \eta] \exp \left\{ \int d^3\vec{k} \Theta_\eta(\vec{k}) J(-\vec{k}) \right\} \quad (18)$$

Гравитационное взаимодействие приводит к негауссовому распределению, что в слабонелинейном режиме можно описать с помощью СТВ. Аналогично можно действовать, если нас интересует коррелятор контраста плотности от среднего, а не поля собственных скоростей.

Важным свойством предложенного аппарата является то, что ни один элемент разложения по теории возмущений не содержат инфракрасных сингулярностей даже в общем случае. Строго этот факт доказан в литературе [10]-[11]. Эта особенность облегчает процедуру инфракрасного пересуммирования, о чём будет сказано ниже.

Теория возмущений на временных расслоениях подробно описана в работах [10]-[11](см. также [14]).

2.4. Связь с наблюдениями

Тёмная материя и галактики. Однако изложенная выше теория описывает лишь поведение холодной тёмной материи, которая напрямую не наблюдается. Непосредственно наблюдаются галактики, расположение и движение которых связаны с флуктуациями тёмной материи.

В текущей задаче используется следующее выражение (см. [12]):

$$\delta_g = b_1 \delta + \epsilon - R_*^2 k^2 \delta + \frac{b_2}{2} \delta^2 + b_{\mathcal{G}_2} \mathcal{G}_2 + b_{\Gamma_3} \Gamma_3 \quad (19)$$

где ϵ – дробовой шум, \mathcal{G}_i и Γ_3 – связанные с гравитационным воздействием величины:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(\Phi) &\equiv (\partial_i \partial_j \Phi)^2 - (\partial^2 \Phi)^2 \\ \mathcal{G}_3(\Phi) &\equiv -\partial_i \partial_j \Phi \partial_j \partial_k \Phi \partial_k \partial_i \Phi - \frac{1}{2} (\partial^2 \Phi)^3 + \frac{3}{2} (\partial_i \partial_j \Phi)^2 \partial^2 \Phi \\ \Gamma_3 &\equiv \mathcal{G}_2(\Phi) - \mathcal{G}_2(\Phi_v) \end{aligned} \quad (20)$$

R_*^2 отвечает за члены высших производных. Часть из этих коэффициентов переопределяются друг через друга, но мы не будем на этом останавливаться. Коррелятор $\langle \delta_g(\vec{k}_1) \delta_g(\vec{k}_2) \rangle = P_g(k) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ галактик нас будет интересовать в дальнейшем.

2.5. Переход в RSD и эффект Кайзера

Кроме этого, сам процесс наблюдения галактик с Земли создаёт некоторые эффекты, которые необходимо учитывать. В первую очередь следует сказать о переходе в пространство красных смещений (RSD – redshift space distortions). Это явление вызвано тем, что расстояние до галактики определяется по её наблюдаемому красному смещению. Этот эффект генерирует анизотропию в распределении галактик из-за смеси поля скорости (и его дивергенции) и плотности галактик в реальном пространстве. В плоско-параллельном приближении косинус угла между волновым числом k и лучём зрения z связан формулой:

$$\mu = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{z})}{|\vec{k}|}. \quad (21)$$

Тогда контраст плотности галактик преобразуется как [12]:

$$\delta_g(\vec{k}) \rightarrow \delta_g(\vec{k}) + \int d^3 x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(\exp \left(-i(\vec{k} \cdot \vec{z})(\vec{z} \cdot \vec{v}(x))/(aH) \right) - 1 \right) (1 + \delta_g(\vec{x})), \quad (22)$$

где $\vec{v}(x)$ – поле собственных скоростей.

Поэтому спектр раскладывают по полиномам Лежандра:

$$P_{\ell,g}(k) = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_g^{(RSD)}(k, \mu) L_\ell(\mu). \quad (23)$$

Наиболее интересны первые три ненулевые момента: монополь ($l = 0$), квадруполь ($l = 2$) и гексадекаполь ($l = 4$), потому что только они отличны от нуля в линейной теории и следующие моменты значительно меньше по амплитуде. В принципе петлевые поправки создают мультиполи с $l > 4$, но их амплитуда сильно подавлена[12].

$$\begin{aligned} P_{0,g}(k) = & P_{0,\theta\theta}^{\text{tree}}(k) + P_{0,\theta\theta}^{1\text{-loop}}(k) + b_1(P_{0,\theta\delta}^{\text{tree}}(k) + P_{0,\theta\delta}^{1\text{-loop}}(k)) + b_1^2(P_{0,\delta\delta}^{\text{tree}}(k) + P_{0,\delta\delta}^{1\text{-loop}}(k)) \\ & + 0.25b_2^2\mathcal{I}_{\delta^2\delta^2}(k) + b_1b_2\mathcal{I}_{0,\delta\delta^2}(k) + b_2\mathcal{I}_{0,\theta\delta^2}(k) + b_1b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{I}_{0,\delta\mathcal{G}_2}(k) + b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{I}_{0,\theta\mathcal{G}_2}(k) \\ & + b_2b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{I}_{\delta^2\mathcal{G}_2}(k) + b_{\mathcal{G}_2}^2\mathcal{I}_{\mathcal{G}_2\mathcal{G}_2}(k) + (2b_{\mathcal{G}_2} + 0.8b_{\Gamma_3})(b_1\mathcal{F}_{0,\delta\mathcal{G}_2}(k) + \mathcal{F}_{0,\theta\mathcal{G}_2}(k)) \\ & + c_0P_{0,\nabla^2\delta}(k) + P_{\text{shot}}, \end{aligned} \quad (24a)$$

$$\begin{aligned} P_{2,g}(k) = & P_{2,\theta\theta}^{\text{tree}}(k) + P_{2,\theta\theta}^{1\text{-loop}}(k) + b_1(P_{2,\theta\delta}^{\text{tree}}(k) + P_{2,\theta\delta}^{1\text{-loop}}(k)) + b_1^2P_{2,\delta\delta}^{1\text{-loop}}(k) \\ & + b_1b_2\mathcal{I}_{2,\delta\delta^2}(k) + b_2\mathcal{I}_{2,\theta\delta^2}(k) + b_1b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{I}_{2,\delta\mathcal{G}_2}(k) + b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{I}_{2,\theta\mathcal{G}_2}(k) \\ & + (2b_{\mathcal{G}_2} + 0.8b_{\Gamma_3})\mathcal{F}_{2,\theta\mathcal{G}_2}(k) + c_2P_{2,\nabla^2\delta}(k) \end{aligned} \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} P_{4,g}(k) = & P_{4,\theta\theta}^{\text{tree}}(k) + P_{4,\theta\theta}^{1\text{-loop}}(k) + b_1P_{4,\theta\delta}^{1\text{-loop}}(k) + b_1^2P_{4,\delta\delta}^{1\text{-loop}}(k) \\ & + b_2\mathcal{I}_{4,\theta\delta^2}(k) + b_{\mathcal{G}_2}\mathcal{I}_{4,\theta\mathcal{G}_2}(k) + c_4P_{4,\nabla^2\delta}(k), \end{aligned} \quad (24c)$$

Появившиеся здесь величины приведены в дополнении.

2.6. «Пальцы Бога»

Одним из искажений RSD является эффект "пальцев Бога" (FOG – Fingers of God): при наблюдении с Земли галактики образуют пальцевидные структуры, направленные на нас. Этот эффект обусловлен собственными скоростями галактик, которые отклоняют скорость галактики от чистого Хаббловского потока, вызывая доплеровский сдвиг в дополнение к красному смещению. Поскольку это влияет только на красное смещение, а не на положение на небе, растяжение происходит только радиально. Этот эффект не может быть учтён по теории возмущений, однако эффективно его можно запараметризовать для каждого мультиполя контрчленом, пропорциональным $k^2P_{lin}(k)$ [12]. Коэффициент при нём – свободный параметр.

2.7. Эффект Алкока-Пачинского

При преобразовании наших наблюдаемых, таких как положение небесных тел и красное смещение, в физические координаты мы предполагаем соотношения между красным смещением и расстоянием до луча зрения (т.е. параметром Хаббла), а также между угловым разделением и расстоянием, перпендикулярным лучу зрения, заданным с помощью специальной космологической модели. Поэтому, если мы примем некую "пробную" космологию, отличную от истинной космологии, то она вызовет геометрическое искривление и искусственно введёт анизотропию в кластеризации галактик, независимо от эффекта искажений пространства красных смещений. Это поведение известно как эффект Алкока-Пачинского (AP) и должно быть учтено при измерении космологических параметров. Эффект AP можно запараметризовать величинами, которые не содержат информации о реальной физике. Важность этого эффекта для темы данной работы будет пояснена позднее.

2.8. ИК-пересуммирование

Еще одним компонентом, необходимым для точного описания скопления галактик на больших масштабах, является процедура ИК-пересуммирования. Инфракрасное пересуммирование учитывает приливные эффекты крупномасштабных потоков, которые подавляют и искажают БАО. Этот эффект был отмечен много лет назад, и с тех пор был проведен ряд исследований, направленных на его изучение. В данном случае реализуется процедура ИК-пересуммирования, разработанная в контексте ТВВР. Эта процедура основана на строгих правилах подсчета и даёт возможность учесть эффекты крупномасштабных потоков. Кроме того, она численно стабильна и быстр, что имеет решающее значение в анализе методом Монте-Карло.

В пространстве красных смещений спектр разделяется на БАО (wiggle) и спектр с вычтенным БАО (non-wiggle) и изменяется следующим образом[12]:

$$P_g(k, \mu) \rightarrow P_{\text{nw}}(k, \mu) + P_{\text{nw},1\text{-loop}}(k, \mu) + e^{-k^2 \Sigma_{\text{tot}}^2} P_w(k, \mu) (1 + k^2 \Sigma_{\text{tot}}^2(\mu)) + e^{-k^2 \Sigma_{\text{tot}}^2(\mu)} P_{\text{w},1\text{-loop}}(k, \mu), \quad (25)$$

где обозначено:

$$\Sigma_{\text{tot}}^2(\mu) = (1 + f\mu^2(2 + f))\Sigma^2 + f^2\mu^2(\mu^2 - 1)4\pi \int_0^{k_S} dq P_{\text{nw}}(q) j_2\left(\frac{q}{k_{\text{osc}}}\right), \quad (26)$$

$P_{\text{nw}}(k, \mu) + P_{\text{nw},1\text{-loop}}$ – часть спектра без БАО,

P_{w} – линейная составляющая БАО,

$P_{\text{w},1\text{-loop}}$ – однопетлевая поправка часть спектра с БАО,

$j_2(q)$ – сферическая функция Бесселя второго порядка,

f – определённый в СТВ фактор роста,

а μ – определён выше21.

3. Численный метод

В работе используется численный метод моделирования на основе Монте-Карловских Марковских цепей (МСМС).

3.1. Принцип правдоподобия

Для оценки качества совпадения теоретического спектра и экспериментального используется выражение:

$$\chi^2 = (P_{\text{theory}} - P_{\text{data}})^T C^{-1} (P_{\text{theory}} - P_{\text{data}}), \quad (27)$$

где P_{theory} – вектор, составленный из $P_0(k_i), P_2(k_i), P_4(k_i)$, которые предсказываются теоретической моделью, P_{data} – вектор, составленный из $P_0(k_i), P_2(k_i), P_4(k_i)$, которые либо измерены экспериментально, либо акуратно просимулированы (mocks), C – матрица ковариации, построенная по симуляциям по формуле:

$$C = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (P_{n,\text{mocks}} - \bar{P}_{\text{mocks}}) (P_{n,\text{mocks}} - \bar{P}_{\text{mocks}}), \quad (28)$$

$$\bar{P}_{\text{mocks}} = \frac{1}{N} \sum P_{n,\text{mocks}} \quad (29)$$

или предоставляется вместе с экспериментальными данными.

Набор импульсов k_i в общем случае зависит от используемых данных, типичные значения – от 0.01 до 0.2 h/Мpc. Подробнее это ограничение будет обсуждаться ниже.

3.2. Метод Монте-Карловских Марковских цепей

Теоретический спектр содержит в себе множество параметров (b_1 , b_2 , b_{G_2} , b_{G_3} , P_{shot} и $c_{0,2,4}$). Задача поиска минимума хи-квадрата для такого набора довольно сложная и ресурсоёмкая даже для полинома четвёртой степени. Кроме того, необходимо выяснить не только точку минимума хи-квадрата, но и ограничения на эти параметры.

Для этой цели хорошо подходит метод Монте-Карловских Марковских цепей, который позволяет семплировать любую функцию распределения. Схематично алгоритм Метрополиса-Гастингса выглядит следующим образом:

1. Выбрать в пространстве параметров некоторую произвольную точку x_0 и вычислить правдоподобие L_0 в этой точке.
2. Случайным образом отклониться от точки x_0 и вычислить правдоподобие L_1 в новой точке (назовём её x_1). Переход в новую точку не совсем случаен и величина перескока описывается ковариационной матрицей.
3. Если правдоподобие в старой точке больше, чем в новой, то Марковская цепочка остаётся в старой точке x_0 .
Иначе правдоподобие остаётся в старой точке x_0 с вероятностью $p = \frac{L_0}{L_1}$ и с вероятностью $1 - \frac{L_0}{L_1}$ переходит в точку x_1 .
4. Перейти к п.2.

Строя гистограмму состояний цепочки можно получить распределение изучаемых параметров. Истинное распределение воспроизводится только при $N \rightarrow \infty$. Проверка сходимости алгоритма делается с помощью критерия Гелмана-Рубина[13]: можно считать, что по цепочкам достоверно воспроизводится распределение, если $R - 1 \ll 1$ для всех исследуемых параметров.

Несмотря на то что метод гарантирует сходимость при любом начальном x_0 и любой ковариационной матрице, для экономии времени и вычислительных ресурсов на практике следует выбирать x_0 в окрестности интересующего нас минимума. Ковариационная матрица отражает истинную ковариацию параметров и доля принятых точек составляет 0.2-0.4. Долю принятия (acceptance rate) можно увеличить/уменьшить, домножая ковариационную матрицу на число.

Правдоподобие задаётся выражением:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\chi^2 \quad (30)$$

В ряде случаев необходимо зафиксировать физически верное значение, полученное из других соображений. Тогда Гауссово распределение параметра a можно задать так:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\chi^2 + \frac{(a - \bar{a})^2}{\sigma_a^2} \right) \quad (31)$$

Для величин вблизи их истинных значений можно сделать модификацию χ^2 особым образом и, не подбирая значения параметра, учесть его как если бы минимум по нему уже был подобран с помощью *маргинализации*¹. Для маргинализуемой величины нужно знать среднее и оценку ошибки (или дисперсию). Пусть P зависит от a линейно. Тогда после интегрирования по гауссову распределению по a происходит модификация:

$$\chi_{marg}^2 = (P|_{a=\bar{a}} - P_{data})^T C_{marg}^{-1} (P|_{a=\bar{a}} - P_{data}) + \ln \left(\frac{|C_{marg}|}{|C|} \right), \quad (32)$$

где

$$C_{marg} = C + \sigma_a^2 \frac{\partial P}{\partial a} \cdot \frac{\partial P^T}{\partial a} \quad (33)$$

3.3. Используемое ПО и данные

Космологическая теория возмущений на временных расслоениях реализована в виде модификации известного пакета CLASS – CLASS-PT [14].

Алгоритм MCMC реализован в пакете MontePython[15], который совместим с CLASS и CLASS-PT. MontePython позволяет изменять размер шага для подбора acceptance rate, ковариационную матрицу параметров $-s$ и т.д.. Также в пакете реализована проверка критерия сходимости Гелмана-Рубина[13]. Возможен параллельный запуск нескольких цепочек средствами MPI.

Для отрисовки распределений и получения ограничений параметров используется готовый пакет GetDist [16].

Для анализа используются данные обсерватории BOSS (полная форма спектра и барионные акустические осцилляции), а также симуляции: Nseries (спектр) и Patchy mocks (ошибки и ковариационная матрица на $P(k)$). Симуляции Nseries получены с помощью пакета nbodykit² путём численного решения задачи N-тел с учётом функции окна. В ходе работы

¹ – В русскоязычной литературе такое правдоподобие обычно называется *предельным* или *интегрированным*.

² – nbodykit.readthedocs.io

симуляции не создавались, в открытом доступе опубликованы спектры 84 вариантов симуляций, каждая из которых рассматривает порядка 10^6 материальных точек и имитирует обзор неба размером 7341 квадратных градусов в северном полушарии.

4. Используемые данные

Для анализа использовались реальные данные и их комбинации, а именно:

- **Спектр.** Данные Слоановского цифрового обзора неба (SDSS) BOSS DR12, который измерил красное смещение 1.2 миллиона галактик и покрыл эффективную площадь в 9329 квадратных градусов. Из набора берутся только красные галактики. Использовались полные формы спектров для двух красных смещений $z_{eff} = 0.38$ и $z_{eff} = 0.61$ для южного и северного полушарий. Спектр обрезался по импульсам на $k \in [0.01, 0.2] h\text{Mpc}^{-1}$, так как на больших импульсах однопетлевая теория становится неприменимой (см. результат анализа Nseries).
- **БАО.** Данные барионных акустических осцилляций брались также от Слоановского цифрового обзора неба из реконструированного спектра. Дополнительно в рассмотрение включались другие измерения SDSS такие как 6DF ($z_{eff} = 0.106$), DR7 MGS ($z_{eff} = 0.15$), eBOSS DR16 (излучающие галактики $z_{eff} = 0.845$ и квазары $z_{eff} = 1.48$).
- **Сверхновые** типа Ia, обнаруженные и исследованные методами фотометрии автоматическим американским телескопом Pan-STARRS 1[22].
- **Нуклеосинтез (BBN).** Исследования линий гелия и дейтерия накладывают ограничение на физическую плотность барионов по Гауссу: $\omega_b \sim \mathcal{N}(0.02268, 0.00038^2)$. Существуют и иные анализы[23], которые предлагают немного другие варианты, но отличия не существенны.

5. Результаты

Были основания полагать, что включение в рассмотрение гексадекаполя способно улучшать ограничения до 30% [17].

Для изучения влияния гексадекаполя были построены марковские цепочки на разных диапазонах импульсов (до областей, где перестаёт действовать однопетлевое приближение) с включением и не включением в правдоподобие спектра P_4 до достижения критерия сходимости $R-1 \sim 0.02$.

Любопытна для анализа комбинация σ_8 и Ω_m : $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3}$. С этой величиной связаны некоторые аномалии [19], которые могут указывать на новую физику за пределами стандартной Λ CDM модели.

5.1. Параметры и их априорные ограничения

Пространство исследуемых параметров образуется следующими параметрами:

- b_1 – линейный коэффициент связи между возмущением тёмной материи и обычной (см.19),
- b_2 – квадратичный коэффициент связи между возмущением тёмной материи и обычной (см.19),
- $b_{\mathcal{G}_2}$ – квадратичный коэффициент приливных сил,
- b_{Γ_3} – коэффициенты вершинного оператора,
- $c_{0,2,4}$ – коэффициенты при контрчленах для $P_{0,2,4}$ соответственно,
- P_{shot} – дробовой шум, постоянная величина, не зависит от k .
- a_2 – коэффициент при характерном для пространства красных смещений контрчлене

$$P_{RSDcounterterm} = a_2(k/k_{NL})^2 V/N_{gal}$$

Ограничения, в которых ищется минимум, задавались следующим

образом:

$$\begin{aligned}
b_1 A^{1/2} &\in [1, 4], & b_2 A^{1/2} &\sim \mathcal{N}(0, 1^2), \\
b_{\mathcal{G}_2} A^{1/2} &\sim \mathcal{N}(0, 1^2), & b_{\Gamma_3} &\sim \mathcal{N}(0.65, 1^2), \\
c_0 &\sim \mathcal{N}(0, 30^2), & c_2 &\sim \mathcal{N}(30, 30^2), \\
c_4 &\sim \mathcal{N}(500, 500^2), & P_{shot} &\sim \mathcal{N}(0, 5 \cdot 10^3),
\end{aligned}$$

где $A = \frac{A_s}{A_s(\text{fiducial})}$, а $\mathcal{N}(a_{mean}, \sigma_a^2)$ – Гауссово нормальное распределение. Такие ограничения были использованы ранее в работе [18] и они позволяют искать минимум в физически осмысленной области. Стохастический шум описывается выражением:

$$P_{\text{stoch}} = a_2 \left(\frac{k}{k_{\text{NL}}} \right)^2 \frac{V}{N_{\text{gal}}} \quad (34)$$

Параметр a_2 не использовался как свободный в МСМС-цепочке и был учтён с помощью механизма маргинализации со следующими значениями:

$$\begin{aligned}
a_2 &\sim \mathcal{N}(0, 2^2) \\
k_{\text{NL}} &= 0.45 h \text{Mpc}^{-1}
\end{aligned}$$

Отношение N_{gal}/V – концентрация галактик и в данном случае

$$\frac{V}{N_{\text{gal}}} = 5 \cdot 10^3 [h^{-1} \text{Mpc}]^3$$

5.2. Тесты на симуляциях

Для тестирования модели были взяты симуляции Nseries. Это точные симуляции, полученные путём численного моделирования гравитационного взаимодействия множества частиц, а также в симуляции учтены эффекты связанные с реальным наблюдением галактик, а именно эффект Алкока-Пачинского. Причём fiducial космология для Nseries и реальных наблюдений BOSS очень близки друг к другу. Для уменьшения статистической ошибки 84 смоделированных спектра были усреднены. Ковариационная матрица для данных бралась от симуляций Patchy, так как там больше (>1000) реализаций.

В таблице 1 приведены результаты фитирования симуляций Nseries до $k_{\text{max}} = 0.2 h \text{Mpc}^{-1}$ и $k_{\text{max}} = 0.25 h \text{Mpc}^{-1}$ в обычной ΛCDM модели.

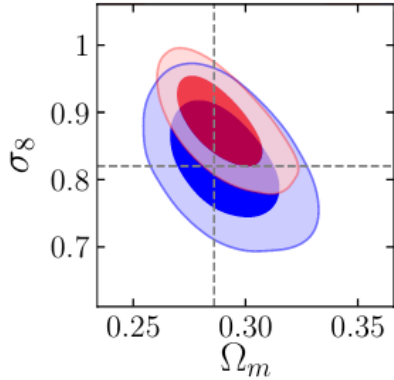
Все величины на уровне менее 1σ совместны с параметрами симуляций и

Param.	fiducial	$P_{0,2} (k_{\max} = 0.2)$	$P_{0,2,4} (k_{\max} = 0.2)$	$P_{0,2} (k_{\max} = 0.25)$	$P_{0,2,4} (k_{\max} = 0.25)$
ω_{cdm}	0.117	$0.125^{+0.010}_{-0.013}$	$0.123^{+0.009}_{-0.011}$	$0.122^{+0.010}_{-0.013}$	$0.119^{+0.007}_{-0.011}$
h	0.7	$0.707^{+0.015}_{-0.016}$	$0.707^{+0.012}_{-0.013}$	$0.706^{+0.015}_{-0.016}$	$0.702^{+0.011}_{-0.013}$
A	1	$0.941^{+0.139}_{-0.202}$	$1.022^{+0.134}_{-0.184}$	$1.013^{+0.153}_{-0.204}$	$1.157^{+0.152}_{-0.175}$
n_s	0.96	$0.920^{+0.071}_{-0.071}$	$0.941^{+0.066}_{-0.064}$	$0.918^{+0.072}_{-0.067}$	$0.950^{+0.061}_{-0.052}$
Ω_m	0.286	$0.297^{+0.017}_{-0.019}$	$0.292^{+0.014}_{-0.016}$	$0.291^{+0.015}_{-0.018}$	$0.289^{+0.011}_{-0.014}$
σ_8	0.82	$0.812^{+0.062}_{-0.067}$	$0.845^{+0.051}_{-0.056}$	$0.828^{+0.058}_{-0.060}$	$0.885^{+0.046}_{-0.045}$

Рис. 1: Фитирование симуляций Nseries до $k_{max} = 0.2h\text{Mpc}^{-1}$ и $k_{max} = 0.25h\text{Mpc}^{-1}$ в обычной ΛCDM модели (сводная таблица)

друг с другом. Для отдельных космологических параметров уменьшение 1σ -интервала составило в среднем 21% (для отдельных параметров около 6%). Наглядно увидеть, как включение в рассмотрение гексадекаполя повлияло на распределения и корреляции параметров, можно ниже^{2, 3}.

Здесь $A = \frac{A_s}{A_s(\text{fiducial})}$. Отклонение A от 1 дальше, чем на 1σ означало бы, что теория не применима. Также выяснилось, что на $k_{max} = 0.25h\text{Mpc}^{-1}$ происходит выход за пределы 1σ интервала от истинного значения:



По этой причине мы не можем доверять результатам на $k_{max} = 0.25h\text{Mpc}^{-1}$. Причём можно заметить, что на $k_{max} = 0.2h\text{Mpc}^{-1}$ с гексадекаполем ограничения лучше, чем на $k_{max} = 0.25h\text{Mpc}^{-1}$ без гексадекаполя. Из этого следует, что лучше сделать более аккуратное ограничение по импульсу. Весь дальнейший анализ строится на спектрах, которые ограничиваются сверху на $k_{max} = 0.2h\text{Mpc}^{-1}$.

Помимо обычной ΛCDM модели рассматривались также модели с ди-

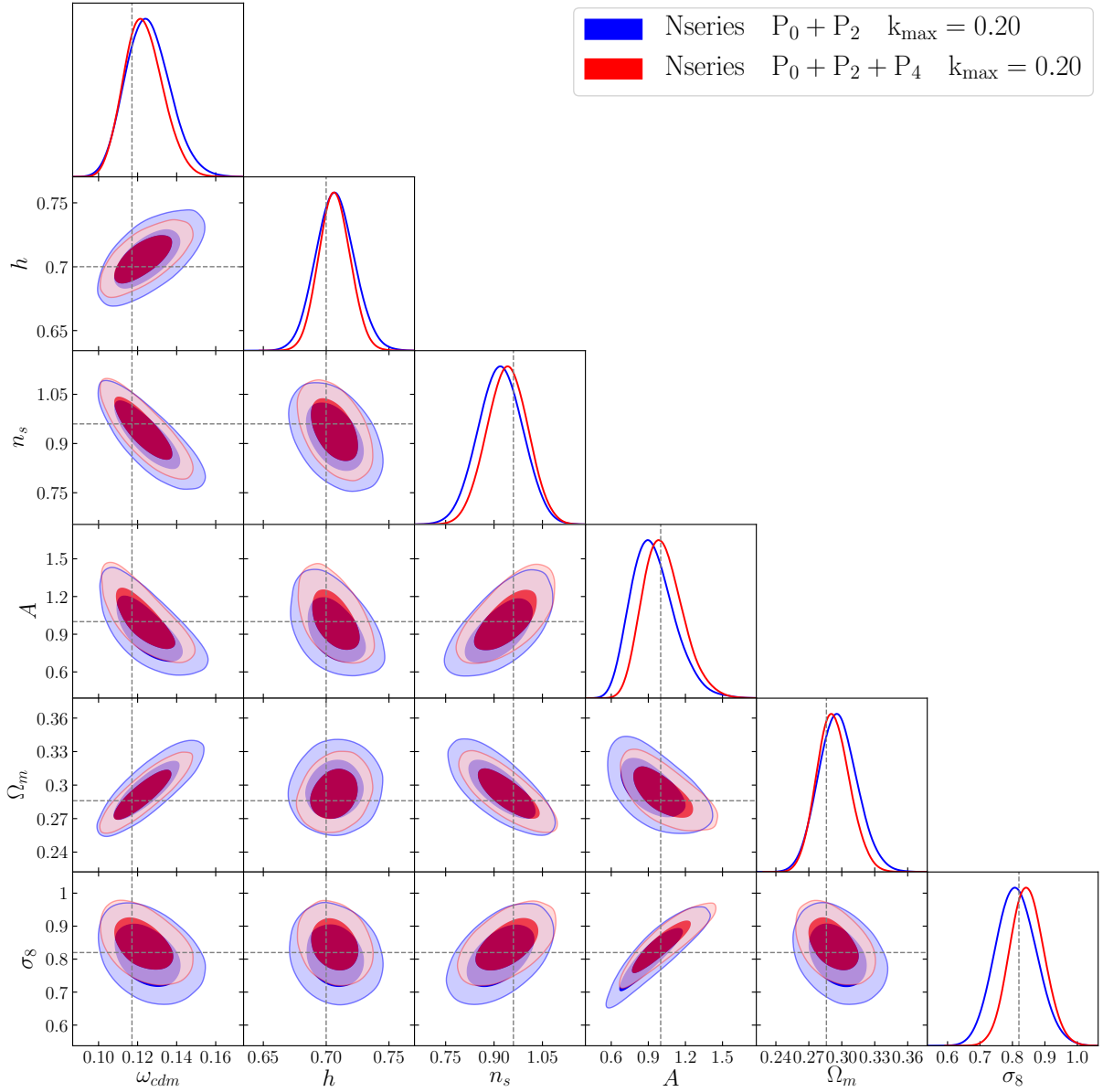


Рис. 2: Фитирование симуляций Nseries до $k_{max} = 0.2h\text{Mpc}^{-1}$ в обычной ΛCDM модели (треугольный график распределений)

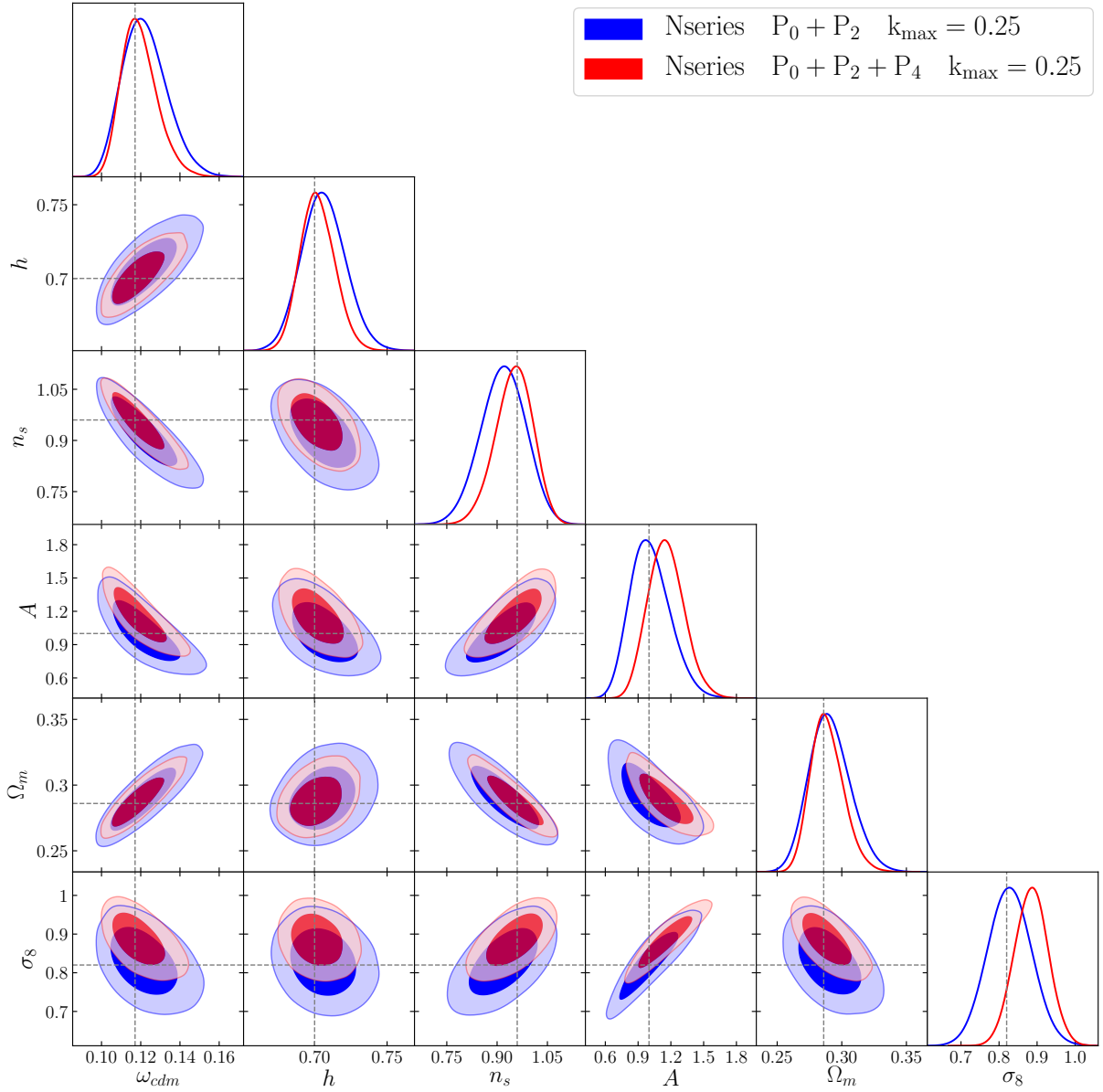


Рис. 3: Фитирование симуляций Nseries до $k_{\max} = 0.25h\text{Mpc}^{-1}$ в обычной ΛCDM модели (треугольный график распределений)

намической тёмной энергией. Соответствующие уравнения Фридмана:

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2 \right) \quad (\Lambda\text{CDM}) \quad (35)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{\text{de}}(1+z)^{3(1+w_0)} \right) \quad (w_0\text{CDM}) \quad (36)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{\text{de}}(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} \exp\left(-3w_a \frac{z}{1+z}\right) \right) \quad (w_0w_a\text{CDM}) \quad (37)$$

Эти модели уже встроены в CLASS.

5.3. Анализ реальных данных

Результаты фитирования данных BOSS полной формы спектра вместе с БАО и ограничением на ω_b с помощью обычной ΛCDM модели приведены ниже и на треугольной диаграмме 5:

Param.	$\Lambda\text{CDM}, P_{0,2}$	$\Lambda\text{CDM}, P_{0,2,4}$
ω_{cdm}	$0.1237^{+0.0077}_{-0.0087}$	$0.1221^{+0.0074}_{-0.0089}$
h	$0.6836^{+0.0096}_{-0.0099}$	$0.683^{+0.0095}_{-0.0099}$
$\ln(10^{10} A_s)$	$2.71^{+0.15}_{-0.15}$	$2.80^{+0.14}_{-0.14}$
n_s	$0.9305^{+0.062}_{-0.064}$	$0.9401^{+0.063}_{-0.062}$
Ω_m	$0.3145^{+0.013}_{-0.014}$	$0.3116^{+0.013}_{-0.014}$
σ_8	$0.691^{+0.043}_{-0.050}$	$0.720^{+0.042}_{-0.047}$
r_d [Mpc]	$145^{+2.4}_{-2.4}$	$145^{+2.4}_{-2.4}$

Видно, что включение гексадекаполя почти не влияет на ограничения (общий объём космологических параметров уменьшился всего на 2%). Гексадекаполь лишь сдвинул σ_8 , этот же эффект был замечен и на симуляциях Nseries. Величина $S_8(P_{0,2}) = 0.708^{+0.046}_{-0.054}$ и $S_8(P_{0,2,4}) = 0.734^{+0.045}_{-0.051}$ соответственно, что совпадает с оригинальным анализом BOSS на уровне 1σ ($S_8(\text{BOSS}) = 0.703 \pm 0.045$) и подтверждает расхождение с анализом Planck ($S_8(\text{Planck}) = 0.834 \pm 0.016$)[19], но включение гексадекаполя привело к смещению от результата BOSS более чем на 0.5σ в сторону Planck 4, расхождение с которым составляет немного больше 2σ . Такая же тенденция получается и на других моделях. Значимость такого расхождения довольно низка, что вызвано большой статистической ошибкой.

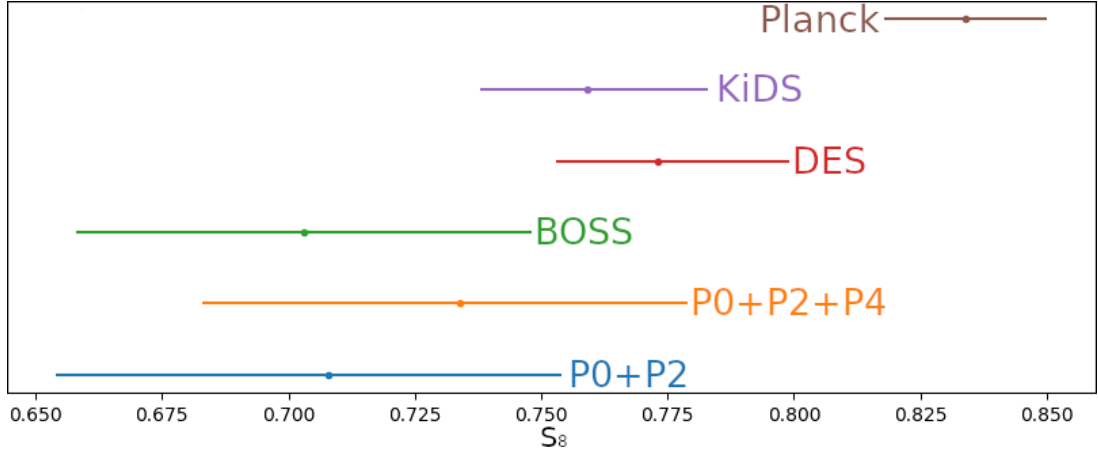


Рис. 4: S_8 , полученная из разных источников[19][20][21]

У w_0w_a CDM модели с динамической тёмной энергией больше свободных параметров, поэтому можно предположить, что выигрыш от гексадекаполя будет лучше. Однако улучшение оказалось не столь значительным:

Param.	w_0w_a CDM, $P_{0,2}$	w_0w_a CDM, $P_{0,2,4}$
ω_{cdm}	$0.1283^{+0.0082}_{-0.01}$	$0.126^{+0.0085}_{-0.01}$
h	$0.6767^{+0.027}_{-0.028}$	$0.6775^{+0.026}_{-0.026}$
$\ln(10^{10} A_s)$	$2.61^{+0.18}_{-0.18}$	$2.72^{+0.17}_{-0.17}$
n_s	$0.904^{+0.067}_{-0.061}$	$0.9191^{+0.066}_{-0.065}$
w_0	$-0.7618^{+0.26}_{-0.36}$	$-0.805^{+0.25}_{-0.34}$
w_a	$-1.141^{+1.4}_{-0.84}$	$-0.9451^{+1.3}_{-0.83}$

Треугольная диаграмма фитирования в рамках этой модели на рисунке 6.

Несмотря на это следует отметить, что $P_{0,2,4}$ уменьшает общий размер двумерного распределения $\omega_0 - \omega_a$ на 19% по сравнению с комбинацией $P_{0,2}$:

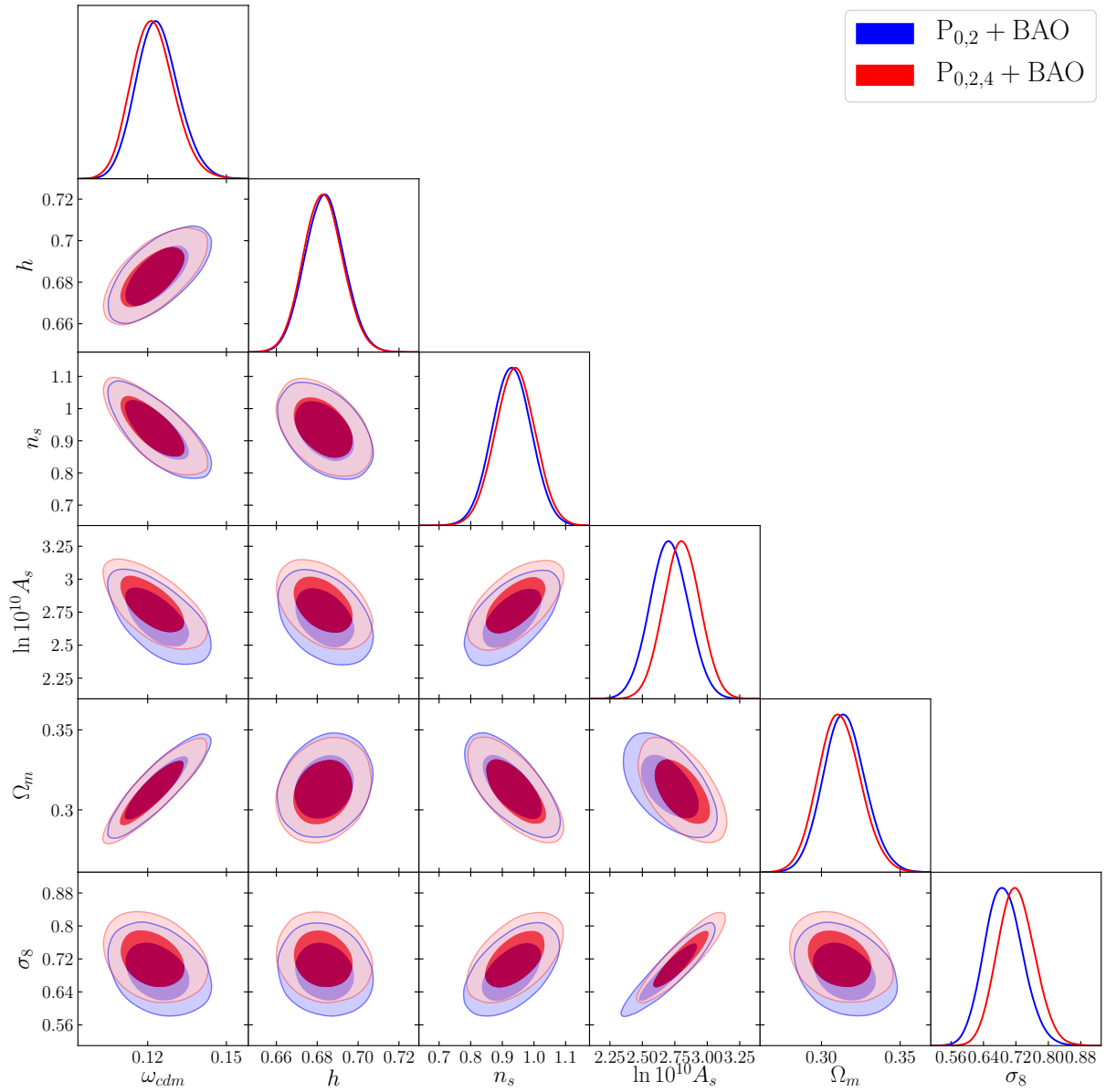


Рис. 5: Результат фитирования данных BOSS в обычной ΛCDM модели

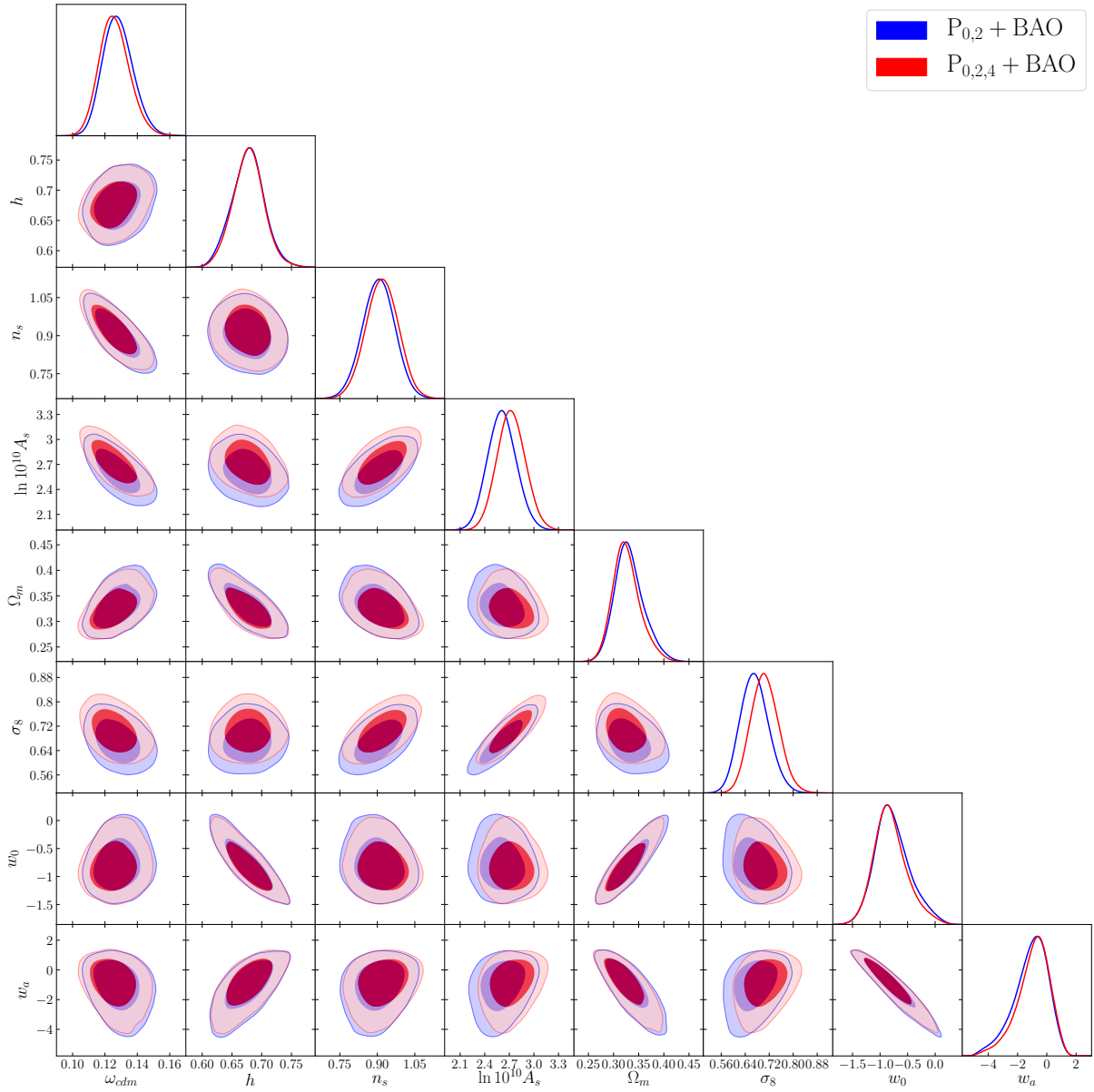
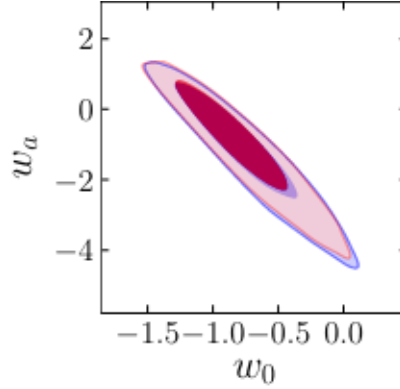


Рис. 6: Результат фитирования данных BOSS в модели с динамической тёмной энергией



Эффект от включения гексадекаполя можно лучше оценить, если мы рассмотрим общий объём всех космологических параметров, который уменьшается на 26%, то есть, пределы 1σ -интервала на одномерном построении могут не полностью отражать информационную содержательность гексадекаполя.

В литературе [17] утверждалось, что включение в рассмотрение гексадекаполя даёт уменьшение ошибок на 30%, однако там проводился так называемый альфа-анализ, который модельно независим. В случае альфа-анализа действительно наблюдается серьёзное улучшение от гексадекаполя. Возникает логичное предположение, что улучшение на самом деле не является физическим и возможно, что это всего лишь артефакт альфа-анализа.

Совместный анализ полной формы спектра, БАО и данных сверхновых. Используя измерения сверхновых, можно улучшить ограничения. В этом фите не исследовался эффект от гексадекаполя, хоть он и был включен, однако этот результат демонстрирует потенциал теоретической модели. Кратко результаты представлены в таблице:

Dataset Param.	FB, Λ CDM	FBS, Λ CDM	FB, w_0 CDM	FBS, w_0 CDM	FB, w_0w_a CDM	FBS, w_0w_a CDM
ω_{cdm}	$0.1269^{+0.0087}_{-0.011}$	$0.1273^{+0.0086}_{-0.011}$	$0.1236^{+0.0082}_{-0.0099}$	$0.1233^{+0.0083}_{-0.0096}$	$0.126^{+0.0085}_{-0.01}$	$0.1252^{+0.0085}_{-0.01}$
h	$0.6948^{+0.015}_{-0.016}$	$0.6945^{+0.013}_{-0.015}$	$0.69^{+0.018}_{-0.021}$	$0.6885^{+0.013}_{-0.014}$	$0.6775^{+0.026}_{-0.026}$	$0.6896^{+0.013}_{-0.014}$
$\ln(10^{10} A_s)$	$2.64^{+0.20}_{-0.20}$	$2.65^{+0.20}_{-0.20}$	$2.77^{+0.17}_{-0.17}$	$2.77^{+0.16}_{-0.16}$	$2.72^{+0.17}_{-0.17}$	$2.72^{+0.17}_{-0.17}$
n_s	$0.9153^{+0.068}_{-0.067}$	$0.9136^{+0.068}_{-0.065}$	$0.9334^{+0.066}_{-0.064}$	$0.9346^{+0.065}_{-0.064}$	$0.9191^{+0.066}_{-0.065}$	$0.9236^{+0.066}_{-0.065}$
Ω_k	$-0.044^{+0.043}_{-0.044}$	$-0.043^{+0.036}_{-0.036}$	—	—	—	—
w_0	—	—	$-1.038^{+0.1}_{-0.082}$	$-1.031^{+0.052}_{-0.048}$	$-0.805^{+0.25}_{-0.34}$	$-0.9826^{+0.099}_{-0.11}$
w_a	—	—	—	—	$-0.9451^{+1.3}_{-0.83}$	$-0.3264^{+0.629}_{-0.479}$
Ω_Λ	$0.733^{+0.044}_{-0.044}$	$0.731^{+0.033}_{-0.033}$	—	—	—	—
Ω_m	$0.3109^{+0.013}_{-0.014}$	$0.3119^{+0.012}_{-0.013}$	$0.3087^{+0.015}_{-0.016}$	$0.3091^{+0.011}_{-0.012}$	$0.3262^{+0.023}_{-0.031}$	$0.3121^{+0.012}_{-0.013}$
Ω_{de}	—	—	$0.692^{+0.015}_{-0.015}$	$0.691^{+0.011}_{-0.011}$	$0.674^{+0.031}_{-0.022}$	$0.688^{+0.012}_{-0.012}$
σ_8	$0.708^{+0.043}_{-0.048}$	$0.708^{+0.043}_{-0.048}$	$0.718^{+0.043}_{-0.048}$	$0.718^{+0.043}_{-0.048}$	$0.705^{+0.044}_{-0.049}$	$0.711^{+0.044}_{-0.049}$
r_d [Mpc]	$146^{+2.4}_{-2.4}$	$146^{+2.4}_{-2.4}$	$146^{+2.4}_{-2.4}$	$146^{+2.4}_{-2.4}$	$146^{+2.4}_{-2.4}$	$146^{+2.4}_{-2.4}$

В таблице обозначено: FB – полная форма спектра + БАО + данные из нуклеосинтеза, FBS – полная форма спектра + БАО + данные из нуклеосинтеза + данные сверхновых. При этом ни в одном из фитов данные микроволнового фона никак **не** использовались. Сравнивая с результатами Planck[2], видно, что полученные ограничения слабее примерно на 20-40%, но всё же конкурентноспособны. Примечательно, что полученный результат также тяготеет к ненулевой кривизне как в анализе Planck[1], но на уровне 2σ Вселенная по-прежнему плоская.

6. Заключение

В ходе работы были рассмотрены проблемы определения космологических параметров, проблемы теоретического описания крупномасштабной структуры Вселенной и способы их решения, были обработаны данные крупномасштабной структуры Вселенной и извлечены ограничения на космологические параметры в Λ CDM-модели и её расширениях с помощью МСМС-цепочек и проанализирован вклад гексадекаполя на эти ограничения.

Краткие выводы:

- Воспроизведён результат работы [17] для альфа-анализа в рамках ТВВР.
- Определены границы применимости однопетлевой ТВВР на симуляциях Nseries.
- Проведён анализ Λ CDM-модели и обнаружено, что гексадекаполь уменьшает общий объём космологических параметров на **2%**.
- Проведён анализ расширения Λ CDM-модели с динамической тёмной энергией и обнаружено, что гексадекаполь уменьшает общий объём на **19%**.
- Замечено, что при включении в рассмотрение гексадекаполя $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m}/0.3$ сдвигается вверх более чем на 0.5σ и это находится в противоречии с Planck на уровне 2.2σ .
- Крупномасштабная структура Вселенной содержит достаточно космологической информации, чтобы получать конкурирующие с микроволновым фоном ограничения на космологические параметры.
- Подтверждены основные положения Λ CDM-модели, а кривизна Вселенной нулевая.

Ранее данные крупномасштабной структуры Вселенной не позволяли получить достаточно хорошие ограничения на космологические параметры и проводился анализ совместно с данными Planck, но оказывается, что с помощью теории возмущений на временных расслоениях из полной формы спектра можно получить сопоставимые ограничения

на параметры. На данный момент они заметно уступают анализу микроволнового фона, но это вызвано относительно небольшой выборкой текущих обзоров неба. Со временем обсерватории проведут больше измерений и эта ошибка будет уменьшаться. На данный момент BOSS продолжает собирать данные, уже начал наблюдения DESI, а в ближайшие годы ожидается ввод в эксплуатацию обсерватории LSST и космического аппарата Euclid, который должен промерить красное смещение около 50 миллионов галактик. Эти данные вместе с разработанной теоретической моделью позволят значительно увеличить точность определения космологических параметров.

Список литературы

- [1] Pablo Fosalba, Enrique Gaztanaga, Explaining Cosmological Anisotropy: Evidence for Causal Horizons from CMB data / arXiv:2011.00910 [astro-ph.CO]
- [2] Planck Collaboration, Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters / arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]
- [3] Eleonora Di Valentino, Alessandro Melchiorri, Joseph Silk, Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology / arXiv:1911.02087 [astro-ph.CO]
- [4] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Гидродинамика. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1978. – (Теоретическая физика : в 10 т. / Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. ; Т. VI).
- [5] Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего большого взрыва. - Москва: URSS. 2008
- [6] Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. – Москва: КРАСАНД, 2010.
- [7] Bernardeau F., Colombi S., Gaztanaga E., Scoccimarro R. Large scale structure of the universe and cosmological perturbation theory / Phys. Rept. 2002. Vol. 367. arXiv:astro-ph/astro-ph/0112551.
- [8] Theodore Steele, Tobias Baldauf, Scoccimarro R. Precise Calibration of the One-Loop Bispectrum in the Effective Field Theory of Large Scale Structure / arXiv:2009.01200 [astro-ph.CO].
- [9] Pietroni Massimo. Flowing with Time: a New Approach to Nonlinear Cosmological Perturbations // JCAP. 2008. Vol. 0810. P. 036. arXiv:astro-ph/0806.0971.
- [10] Diego Blas, Mathias Garny, Mikhail M. Ivanov, Sergey Sibiryakov, Time-Sliced Perturbation Theory for Large Scale Structure I: General Formalism / arXiv:1512.05807 [astro-ph.CO]
- [11] Diego Blas, Mathias Garny, Mikhail M. Ivanov, Sergey Sibiryakov, Time-Sliced Perturbation Theory II: Baryon Acoustic Oscillations and Infrared Resummation / arXiv:1605.02149 [astro-ph.CO]

- [12] Anton Chudaykin, Mikhail M. Ivanov, Measuring neutrino masses with large-scale structure: Euclid forecast with controlled theoretical error / arXiv:1907.06666 [astro-ph.CO]
- [13] Gelman A. and Rubin D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences (with discussion). *Statistical Science*, 7:457–472.
- [14] Anton Chudaykin, Mikhail M. Ivanov, Oliver H. E. Philcox, Marko Simonović, Non-linear perturbation theory extension of the Boltzmann code CLASS / arXiv:2004.10607 [astro-ph.CO]
- [15] MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features / arXiv:1804.07261 [astro-ph.CO]
- [16] GetDist: a Python package for analysing Monte Carlo samples / arXiv:1910.13970 [astro-ph.IM] документация
- [17] F. Beutler et al.(BOSS), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*466, 2242 (2017), arXiv:1607.03150 [astro-ph.CO].
- [18] Digvijay Wadekar, Mikhail M. Ivanov, Roman Scoccimarro, Cosmological constraints from BOSS with analytic covariance matrices / arXiv:2009.00622 [astro-ph.CO]
- [19] E. Di Valentino et al., *Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8* (2020) / arXiv:2008.11285 [astro-ph.CO]
- [20] DES Collaboration, Dark Energy Survey Year 1 Results: Cosmological Constraints from Galaxy Clustering and Weak Lensing / arXiv:1708.01530 [astro-ph.CO]
- [21] Marika Asgari et al., KiDS-1000 Cosmology: Cosmic shear constraints and comparison between two point statistics / arXiv:2007.15633 [astro-ph.CO]
- [22] D. Scolnic et al., The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed Type Ia Supernovae from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from The Combined Pantheon Sample *Astrophys. J.*859, 101 (2018) / arXiv:1710.00845 [astro-ph.CO]
- [23] M. M. Ivanov, M. Simonović, and M. Zaldarriaga, Cosmological Parameters from the BOSS Galaxy Power Spectrum / *JCAP*05, 042 (2020), arXiv:1909.05277 [astro-ph.CO]

[24] Constraints on the curvature of the Universe and dynamical dark energy from the Full-shape and BAO data / arXiv:2009.10106 [astro-ph.CO]

7. Дополнение: величины в космологической теории возмущений

$$\mathcal{I}_{\delta^2}(z, k) \equiv 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} F_2(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}) P_{\text{lin}}(z, |\vec{k} - \vec{q}|) P_{\text{lin}}(z, q), \quad (38)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{G}_2}(z, k) \equiv 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sigma^2(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}) F_2(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}) P_{\text{lin}}(z, |\vec{k} - \vec{q}|) P_{\text{lin}}(z, q), \quad (39)$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_2}(z, k) \equiv 4P_{\text{lin}}(z, k) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sigma^2(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}) F_2(\vec{k}, -\vec{q}) P_{\text{lin}}(z, q), \quad (40)$$

$$\mathcal{I}_{\delta^2\delta^2}(z, k) \equiv 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} P_{\text{lin}}(z, |\vec{k} - \vec{q}|) P_{\text{lin}}(z, q) - 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} P_{\text{lin}}^2(z, q), \quad (41)$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{G}_2\mathcal{G}_2}(z, k) \equiv 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sigma^4(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}) P_{\text{lin}}(z, |\vec{k} - \vec{q}|) P_{\text{lin}}(z, q), \quad (42)$$

$$\mathcal{I}_{\delta^2\mathcal{G}_2}(z, k) \equiv 2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sigma^2(\vec{q}, \vec{k} - \vec{q}) P_{\text{lin}}(z, |\vec{k} - \vec{q}|) P_{\text{lin}}(z, q), \quad (43)$$

$$P_{\nabla^2\delta}(z, k) \equiv -2b_1(z)(R_*^2(z) + c_s^2(z)b_1(z))k^2 P_{\text{lin}}(z, k) \quad (44)$$

где $\sigma^2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \equiv (\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2 / (k_1^2 k_2^2) - 1$, а

$$F_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{k_1 k_2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) + \frac{2}{7} \frac{(\vec{k}_1 \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \quad (45)$$

– стандартное квадратичное ядро в SPT. Остальные ядра выражаются итеративно:

$$F_n(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{G_m(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m)}{(2n+3)(n-1)} \left[(2n+1)\alpha(\vec{k}_1, \vec{k}_2) F_{n-m}(\vec{q}_{m+1}, \dots, \vec{q}_n) + 2\beta(\vec{k}_1, \vec{k}_2) G_{n-m}(\vec{q}_{m+1}, \dots, \vec{q}_n) \right] \quad (46)$$