

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА
«Ускорение фотонов Крабовидной Туманностью.
Постановка ограничения на масштаб нарушения лоренц-инвариантности»

Выполнил студент
443 группы:
Голенев Евгений Александрович

подпись студента

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук
Сатунин Пётр Сергеевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите
Зав. кафедрой _____
подпись зав. кафедрой

Москва
2020

Оглавление

Введение	2
1 Модель без лоренц нарушения	3
1.1 Матричный элемент	3
1.2 Импульсы	4
1.3 Фазовый объём	5
1.4 Сечение	5
2 Модель с Лоренц-нарушением	7
2.1 Модификация модели	7
2.2 Матричный элемент	8
2.3 Сечение	8
2.4 Результаты	9
Список использованных источников	12

Введение

Модели с нарушением Лоренц-инвариантности представляют интерес для рассмотрения по нескольким причинам [1]. Они могут быть использованы для построения теории квантовой гравитации и устранения ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля. Отклонение от стандартной квантовой электродинамики параметризуется посредством введения параметра Лоренц-нарушения M_L . Значения данного параметра в настоящий момент ограничено порядками $10^{12} - 10^{14}$ ГэВ ([3], [4]). Эффекты Лоренц-нарушения должны проявляться при высоких значениях энергий, потому для проверки таких моделей используются экспериментальные данные астрофизических наблюдений. В данной работе будет посчитано сечение процесса Комптоновского рассеяния для электронов больших энергий и определены ограничения на масштаб нарушения Лоренц-инвариантности.

Глава 1

Модель без лоренц нарушения

1.1 Матричный элемент

Рассмотрим процесс комптоновского рассеяния. Этому процессу соответствует две диаграммы:

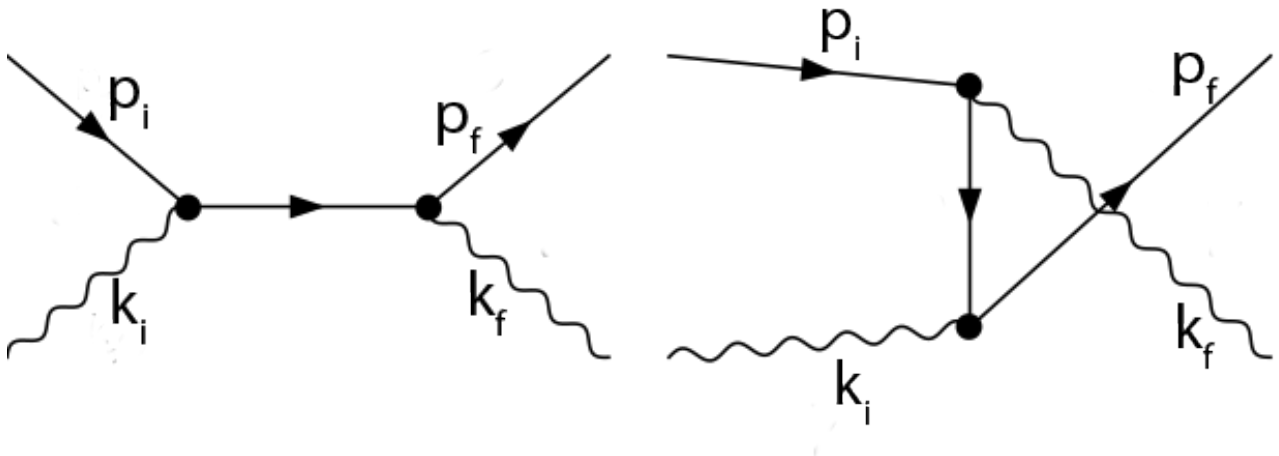


Рис. 1.1: Комптоновское рассеяние

Для дальнейших вычислений запишем матричный элемент диаграмм из рис. 1.1.

$$M = -iu(p_f, m_e)(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\gamma(p_f - k_i) + m_e)}{(p_f - k_i)^2 - m_e^2} (-ie\gamma^\nu) u(p_i, m_e) -$$
$$-iu(p_f, m_e)(-ie\gamma^\mu) \frac{i(\gamma(k_i + p_i) + m_e)}{(k_i + p_i)^2 - m_e^2} (-ie\gamma^\nu) u(p_i, m_e); \quad (1.1)$$

В результате вычисления квадрата модуля матричного элемента M имеем:

$$\begin{aligned}
|M|^2 = 4e^4 & \left(\frac{k_i^2((k_i, p_f) - (k_i, p_i) + 3m_e^2) - (k_i, p_f)(p_f^2 - 2(k_i, p_i) + m_e^2) + (m_e^2 - p_f^2)(k_i, p_i) + m_e^2 p_f^2 + m_e^4}{(-2(k_i, p_f) + k_i^2 + p_f^2 - m_e^2)^2} + \right. \\
& + \frac{k_i^2((k_i, p_f) - (k_i, p_i) + 3m_e^2) + (k_i, p_f)(2(k_i, p_i) + p_i^2 - m_e^2) + (p_i^2 + m_e^2)((k_i, p_i) + m_e^2)}{(2(k_i, p_i) + k_i^2 + p_i^2 - m_e^2)^2} - \\
& \left. - \frac{2(m_e^2(-(k_i, p_f) + (k_i, p_i) + p_f^2 + p_i^2) + k_i^2(-2(k_i, p_f) + 2(k_i, p_i) + m_e^2))}{(2(k_i, p_f) - k_i^2 - p_f^2 + m_e^2)(2(k_i, p_i) + k_i^2 + p_i^2 - m_e^2)} \right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Импульсы

Определим импульсы частиц таким образом, чтобы электрон до рассеяния имел импульс ориентированный вдоль оси x . Тогда импульсы начальных и конечных состояний запишутся следующим образом:

$$p_i^i = (p, 0, 0), \tag{1.3}$$

$$k_i^i = (\omega \cos(\theta), \omega \sin(\theta), 0), \tag{1.4}$$

$$p_f^i = \left(\frac{p + \omega \cos(\theta)}{2}(1 + x), \frac{\omega \sin(\theta)}{2}(1 + x) + r \cos(\phi), r \sin(\phi) \right), \tag{1.5}$$

$$k_f^i = \left(\frac{p + \omega \cos(\theta)}{2}(1 - x), \frac{\omega \sin(\theta)}{2}(1 - x) - r \cos(\phi), -r \sin(\phi) \right); \tag{1.6}$$

Где p_i, k_i - начальные импульсы электрона и фотона, а p_f, k_f - конечные. Параметр x в выражениях (1.5), (1.6) определяет распределение начального импульса электрона p_i между электроном и фотоном. При $x = 1$ вся энергия после рассеяния достаётся электрону.

Определим нулевую компоненту импульса электрона. Т.к. мы рассматриваем релятивистский случай, то $p \gg m_e$. Разложив энергию электрона по m_e мы получим что:

$$p_i^0 = \sqrt{p^2 + m_e^2} \approx p + \frac{m_e^2}{2p} \tag{1.7}$$

Раскладывая аналогично p_f^0 по малому параметру $1/p$ получим:

$$p_f^0 = (p + \omega \cos(\theta)) \frac{1 + x}{2} + \frac{\omega r \sin(\theta) \cos(\phi)}{p} + \frac{r^2 + m_e^2}{p(1 + x)}; \tag{1.8}$$

Где мы можем пренебречь вторым слагаемым в силу малости ω/p .

Аналогично получаем k_f :

$$k_f^0 = (p + \omega \cos(\theta)) \frac{1 - x}{2} + \frac{r^2}{p(1 - x)}. \tag{1.9}$$

Зная нулевые компоненты импульсов мы теперь можем получить скалярные произведения фигурирующие в квадрате матричного элемента (1.2):

$$(p_i, k_i) = p\omega \left(1 - \cos(\theta) + \frac{m_e^2}{2p^2} \right), \tag{1.10}$$

$$(p_f, k_i) = (1 + x)p\omega \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \omega r \cos(\phi) \sin(\theta); \tag{1.11}$$

После подстановки полученных скалярных произведений в квадрат матричного элемента мы получаем его в явном виде:

$$\begin{aligned}
|M|^2 = & (e^4(-4m_e^2 p^2 r^3 \omega^2 \sin^3(\theta) \cos^3(\phi) + 8m_e^4 p^2 r^2 \sin^2(\theta)(p + \omega) \cos^2(\phi) + \\
& + 4p^3 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) (m_e^4(2p^2(x-1)^2 + 2p(x^2 - 2x - 3)\omega + 3(x+1)\omega^2) - \\
& - m_e^2 p r \omega \sin(\theta) \cos(\phi)(16px + 3(x^2 + 2x + 5)\omega) + 12p^2 r^2(x+1)\omega^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)) + \\
& + p \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (4m_e^2 p^2 r^2 \omega \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)(8p + 3(x+1)\omega) - 4m_e^4 p r \sin(\theta) \cos(\phi)(4p^2(x-1) + \\
& + 4p(x-1)\omega + 3\omega^2) + m_e^6(-8p^2(x-1) - 4p(x+1)\omega + (x+1)\omega^2) - \\
& - 16p^3 r^3 \omega^2 \sin^3(\theta) \cos^3(\phi)) + m_e^6 r \sin(\theta)(8p^2 + 4p\omega - \omega^2) \cos(\phi) + \\
& + 4p^5 \omega \sin^6\left(\frac{\theta}{2}\right) (m_e^2(x+1)(8p(x-1) + (x^2 + 2x + 13)\omega) - 4pr(3x^2 + 6x + 7)\omega \sin(\theta) \cos(\phi)) + \\
& + 2m_e^8 p + 16p^7(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)\omega^2 \sin^8\left(\frac{\theta}{2}\right)) / (p\omega^2(m_e^2 + 4p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)))^2 (p(x+1) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \\
& - r \sin(\theta) \cos(\phi))^2
\end{aligned} \tag{1.12}$$

1.3 Фазовый объём

Фазовый объём определим как:

$$\int d\Pi = \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2p_f^0} \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 2k_f^0} (2\pi)^4 \delta^4(p_i + k_i - p_f - k_f) \tag{1.13}$$

Произведём переход к новым переменным интегрирования (r, φ, x) и снимем интеграл по $d^3 k_f$ дельта-функцией:

$$\begin{aligned}
\int d\Pi &= \int \frac{d^3 p_f}{16\pi^2 p_f^0 k_f^0} \delta^0(p_i^0 + k_i^0 - p_f^0 - k_f^0) = \\
&= \int \frac{dx d\varphi dr}{32\pi^2} \delta^0\left((1+x) \left(\frac{\omega(1-\cos(\theta))}{p} + m_e^2 - \frac{m_e^2}{1+x}\right) - r^2\right)
\end{aligned} \tag{1.14}$$

1.4 Сечение

Для получения сечения рассеяния нам необходимо проинтегрировать матричный элемент (1.12) по переменным (r, φ, x) . В числителе $|M|^2$ содержатся слагаемые являющиеся полиномом третьей степени по $\cos(\varphi)$. Интегрируя по отдельности эти слагаемые имеем:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(m_e^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2} &= \frac{2\pi \csc^4(\theta/2)}{(m_e^2 - 2p^2 \cos(\theta) + 2p^2)^2}, \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi) d\varphi}{(m_e^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2} &= 0, \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\varphi) d\varphi}{(m_e^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2} &= \frac{\pi \csc^4(\theta/2)}{(m_e^2 - 2p^2 \cos(\theta) + 2p^2)^2}, \\
\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3(\varphi) d\varphi}{(m_e^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Используя (1.15) при интегрировании (1.12) по φ и r получаем выражение для сечения $\frac{d\sigma}{dx}$:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{e^4 p (m_e^2 p \omega \sin^2(\theta/2)(8p + \omega(x+1)) + 2m_e^4(p + \omega) + 4p^3(x+1)\omega^2 \sin^4(\theta/2))}{4\pi\omega^2(m_e^2 - 2p^2 \cos(\theta) + 2p^2)^2} \tag{1.16}$$

Чтобы получить полное сечение выражение (1.16) необходимо проинтегрировать по x . Из условия $r > 0$ и выражения (1.14) следует что x должен удовлетворять условию

$$-m_e^2(1-x)^2/4 + \omega(1-\cos(\theta))p(1-x^2)/2 > 0$$

В результате получаем что:

$$x \in \left[\frac{m_e^2 - 4p\omega \sin^2(\theta/2)}{m_e^2 + 4p\omega \sin^2(\theta/2)}, 1 \right].$$

Для расчёта нижней границы области интегрирования по x используем следующие значения параметров:

$$p = 10^{15} eV, \omega = 10^{-1} eV, m_e = 0.511 \times 10^6 eV$$

, а $\theta = \pi$ - угол, при котором нижняя граница интегрирования принимает наименьшее значение. Проинтегрируем (1.16) по полученной области:

$$\sigma = \frac{e^4 p (m_e^2 p \omega \sin^2(\theta/2) (16p + 2\omega) + m_e^4 (4p + 4\omega) + 8p^3 \omega^2 \sin^4(\theta/2))}{4\pi \omega^2 (m_e^2 - 2p^2 \cos(\theta) + 2p^2)^2} \quad (1.17)$$

Глава 2

Модель с Лоренц-нарушением

2.1 Модификация модели

Для того чтобы добавить Лоренц-нарушение в модель, модифицируем дисперсионное соотношение:

$$E^2 = k^2 \pm \frac{k^4}{M_L^2}, \quad (2.1)$$

где M_L - масштаб Лоренц-нарушения. Учитывая, что $k \ll M_L$ получаем, что:

$$E \simeq k \pm \frac{k^3}{2M_L^2}.$$

Введём соответствующую поправку только для фотонов. Скалярное произведение (1.9) получит добавку:

$$k_f^0 = (p + \omega \cos(\theta)) \frac{1-x}{2} + \frac{r^2}{p(1-x)} \mp \frac{p^3(x-1)^3}{16M_L^2}. \quad (2.2)$$

Сумма по поляризациям, после введения Лоренц-нарушения, примет следующий вид [5]

$$\sum_{s=1,2} \varepsilon_\mu^{*(s)}(k) \varepsilon_\nu^{(s)}(k) = -g_{\mu\nu} \mp \frac{k_0^2}{M_L^2} u_\mu u_\nu, \quad (2.3)$$

где $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$.

2.2 Матричный элемент

Учитывая (2.2) и (2.3) при вычислении $|M|^2$ получим следующее выражение для квадрата матричного элемента:

$$\begin{aligned}
|M|^2 = & (e^4(16p^7(8M_L^2 + p^2(x-1)^2)(x^3 + 3x^2 + 7x + 5)\omega^2 \sin^8(\theta/2) + \\
& + 4p^5\omega((x+1)(8(x-1)^2(x+1)(p(x-1) - 2\omega)p^4 + m_e^2(8(8p(x-1) + (x^2 + 2x + 13)\omega)M_L^2 + \\
& + p^2(x-1)^2(x^2 + 2x + 13)\omega)) - 4pr(8M_L^2 + p^2(x-1)^2)(3x^2 + 6x + 7)\omega \cos(\varphi) \sin(\theta)) \sin^6(\theta/2) + \\
& + 4p^3((8(2p^2(x-1)^2 + 3(x+1)\omega^2 + 2p(x^2 - 2x - 3)\omega)M_L^2 + 3p^2(x-1)^2(x+1)\omega^2)m_e^4 + \\
& + p^4(x-1)^2(2p^2(x+1)(x-1)^2 - 2(3x^2 + 2x - 1)\omega^2 + p(5x^3 + 5x^2 + 3x - 13)\omega)m_e^2 + \\
& + 12p^2r^2(8M_L^2 + p^2(x-1)^2)(x+1)\omega^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) - pr\omega(12(x-1)^3(x+1)p^5 - \\
& - 24(x-1)^2(x+1)\omega p^4 + 3m_e^2(x^4 + 2x^2 - 8x + 5)\omega p^2 + 128m_e^2 M_L^2 x p + \\
& + 24m_e^2 M_L^2(x^2 + 2x + 5)\omega) \cos(\varphi) \sin(\theta)) \sin^4(\theta/2) - p((8M_L^2(8(x-1)p^2 + 4(x+1)\omega p - (x+1)\omega^2) - \\
& - p^2(x-1)^2(x+1)\omega^2)m_e^6 + p^4(x-1)^2(8(x^2 - 1)p^2 + (-x^3 + 3x^2 + x + 29)\omega p + \\
& + 2(x^2 - 2x - 3)\omega^2)m_e^4 + 4pr(4(x-1)^2((x^2 - 1)p^2 + (2x^2 + x + 1)\omega p - 2x\omega^2)p^4 + \\
& + m_e^2(8(4(x-1)p^2 + 4(x-1)\omega p + 3\omega^2)M_L^2 + 3p^2(x-1)^2\omega^2)) \cos(\varphi) \sin(\theta)m_e^2 + \\
& + 16p^3r^3(8M_L^2 + p^2(x-1)^2)\omega^2 \cos^3(\varphi) \sin^3(\theta) - 4p^2r^2\omega(4(x-1)^2(p(x-1) - 2\omega)p^4 + \\
& + m_e^2(8(8p + 3(x+1)\omega)M_L^2 + 3p^2(x-1)^2(x+1)\omega)) \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta)) \sin^2(\theta/2) + m_e^2(2p((x-1)^2(xp + \\
& + p - 2\omega)p^3 + 8m_e^2 M_L^2)m_e^4 + r((x-1)^2(8(x+1)p^2 - (x^2 - 4x + 3)\omega p + 2(x-3)\omega^2)p^4 + \\
& + m_e^2(8M_L^2(8p^2 + 4\omega p - \omega^2) - p^2(x-1)^2\omega^2)) \cos(\varphi) \sin(\theta)m_e^2 - 4p^2r^3(8M_L^2 + \\
& + p^2(x-1)^2)\omega^2 \cos^3(\varphi) \sin^3(\theta) + 4p^2r^2((x-1)^2(2(x+1)p^2 + (3x\omega + \omega)p - 2\omega^2)p^3 + \\
& + 16m_e^2 M_L^2(p + \omega)) \cos^2(\varphi) \sin^2(\theta))) / (8M_L^2 p \omega^2 (m_e^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2 (p(x+1) \sin^2(\theta/2) - \\
& - r \cos(\varphi) \sin(\theta))^2)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.3 Сечение

Чтобы получить сечение рассеяния проинтегрируем (2.4) по φ, r, x . Интегрирование по φ, r снимем аналогично Лоренц-инвариантному случаю, воспользовавшись выражениями (1.15). Для интегрирования по x определим пределы, как и в прошлый раз, из органичения, накладываемого дельта функцией.

$$8m_e^2 M_L^2(x-1) + p(x+1)(16M_L^2\omega + p^3 \pm (x-1)^3) - 16M_L^2 p(x+1)\omega \cos(\theta) > 0 \tag{2.5}$$

Полное выражение, ввиду его громоздкости, приводить не будем.

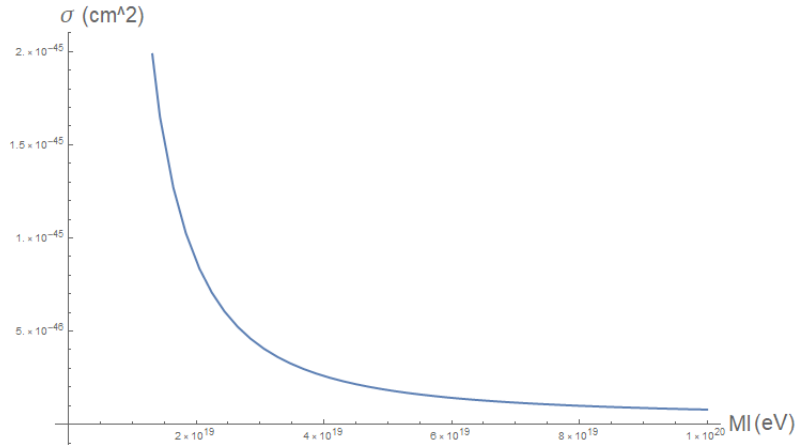


Рис. 2.1: Зависимость сечения от масштаба Лоренц-нарушения

при $p = 10^{14} eV, \omega = 10^{-1} eV$, в выражении (2.5) взят знак плюс.

2.4 Результаты

Результат полученный для Лоренц-инвариантного случая демонстрирует согласие с работами других авторов [7]. Графики были построены при $\omega = 10^{-1}eV, p = 10^{14}eV$.

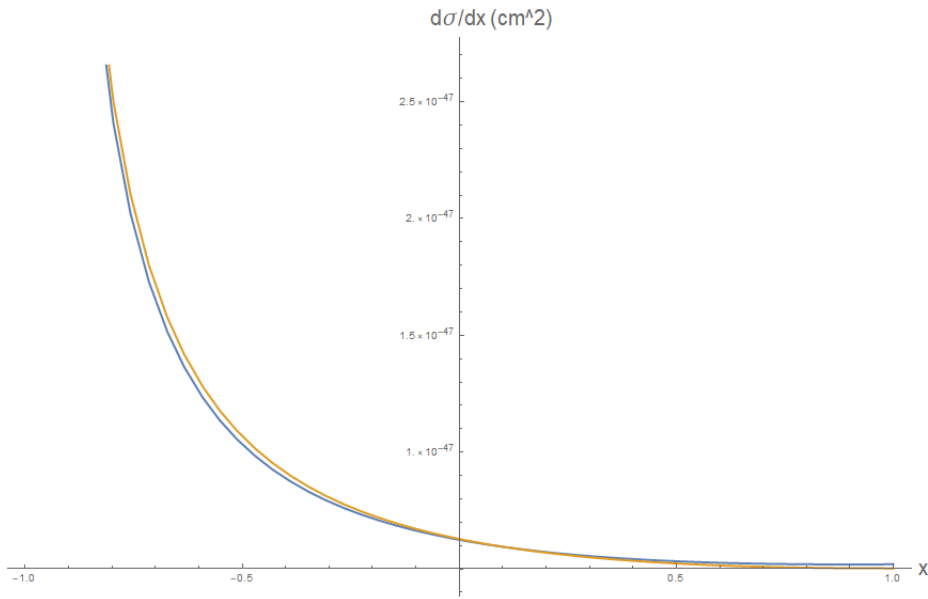


Рис. 2.2: Сравнение $\frac{d\sigma}{dx}$ полученного в данной работе (синяя кривая) с [7] (оранжевая кривая).

Было получено сечение $\frac{d\sigma}{dx}$ как для Лоренц-инвариантного случая, так и для случая с Лоренц-нарушением. В пределе при $M_L \rightarrow \infty$, как и ожидалось, наблюдается стремление $\frac{d\sigma}{dx}$ с Лоренц-нарушением к выражению (1.16).

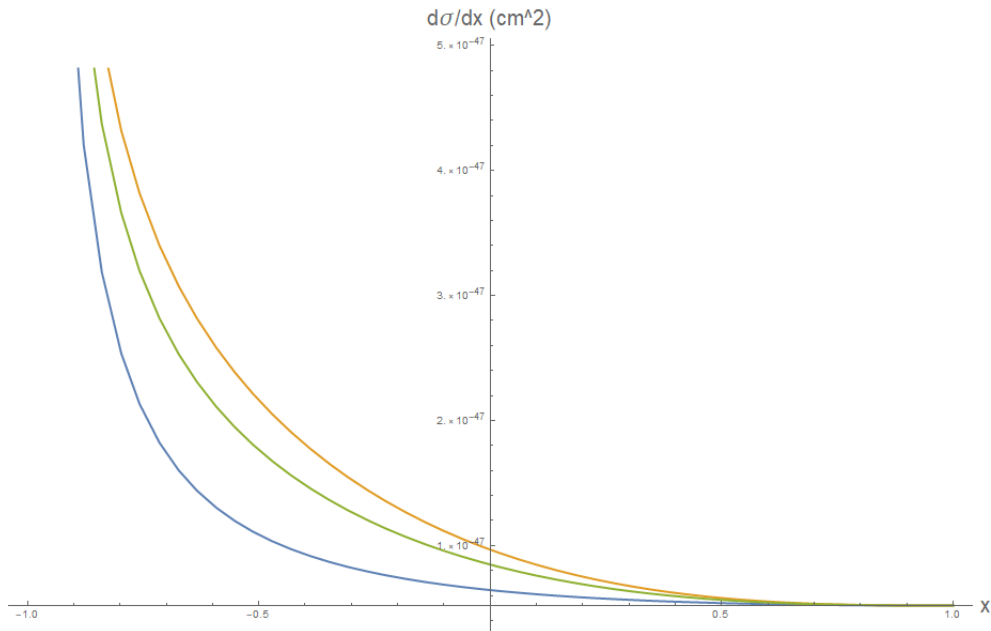


Рис. 2.3: Зависимость сечения $\frac{d\sigma}{dx}$ от x для различных M_L при $\omega = 10^{-1}eV, p = 10^{14}eV$. Синяя кривая - Лоренц-инвариантный случай, зелёная - ЛН при $M_L = 10^{21.1}eV$, оранжевая - $M_L = 10^{21}eV$

Так-же была установлена зависимость вида сечения от знака перед членом Лоренц-нарушения:

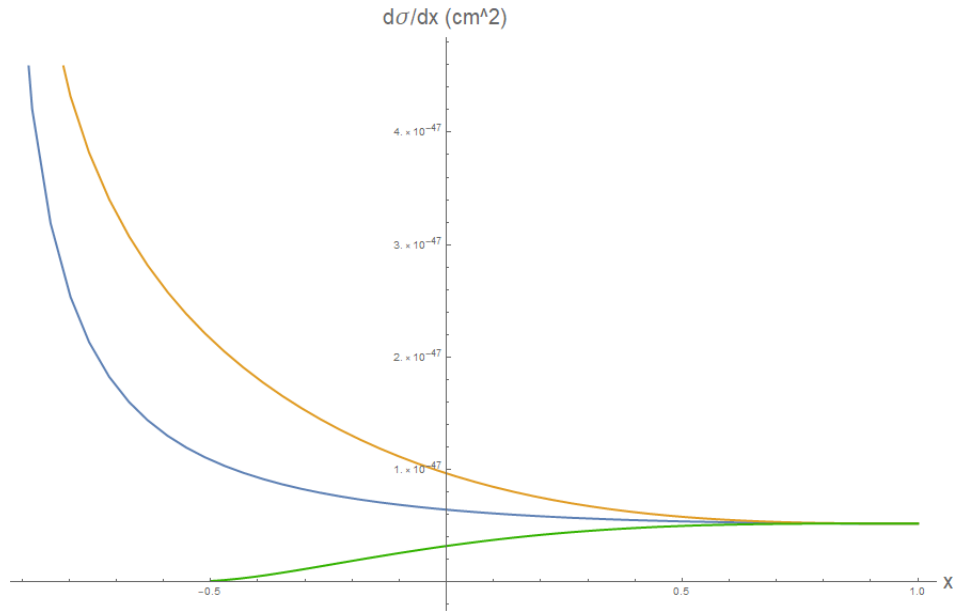


Рис. 2.4: Зависимость вида кривой сечения от знака члена ЛН. $M_L = 10^{21} eV$, $p = 10^{14} eV$, $\omega = 10^{-1} eV$. Синяя кривая - ЛИ случай, зелёная - знак (+), оранжевая - (-)

Исследована зависимость полного сечения рассеяния от знака члена Лоренц-нарушения. При больших значениях M_L кривые стремятся к общему пределу.

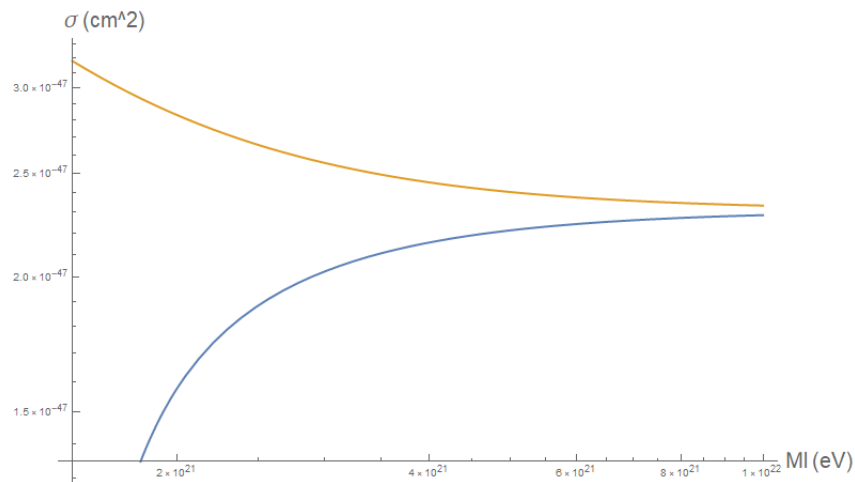


Рис. 2.5: Зависимость вида кривой сечения от знака члена ЛН. $p = 10^{14} eV$, $\omega = 10^{-1} eV$. Синяя кривая - (-), оранжевая - (+)

Исходя из вида кривых ожидаемое значение параметра M_L имеет порядок $\sim 10^{12} GeV$.

Заключение

В работе было получено аналитическое выражение для полного сечения процесса комптоновского рассеяния для электронов высоких энергий в рамках теории с нарушенной Лоренц-инвариантностью. Так же была исследована зависимость итогового сечения от знака добавки Лоренц-нарушения. Полученные результаты позволяют оценивать энергетический масштаб нарушения Лоренц-инвариантности и энергетический масштаб квантовой гравитации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lorentz violation at high energy: concepts, phenomena and astrophysical constraints, Ted Jacobson, Stefano Liberati, David Mattingly, *AnnalsPhys.*321:150-196,2006, arXiv:astro-ph/0505267v2 ;
2. Modern tests of Lorentz invariance, David Mattingly, *Living Rev.Rel.*8:5,2005,arXiv:gr-qc/0502097 ;
3. The 2014 TeV Gamma-ray Flare of Mrk 501 Seen with H.E.S.S.: Temporal and Spectral Constraints on Lorentz Invariance Violation, H.E.S.S. Collaboration, *The Astrophysical Journal*, 2019, Volume 870, Number 2,arXiv:1901.05209 ;
4. New constraints on Lorentz Invariance violation from Crab Nebula spectrum beyond 100 TeV, Petr Satunin, *Eur.Phys.J. C*79 (2019) no.12, 1011,arXiv:1906.08221 ;
5. On calculation of cross sections in Lorentz violating theories, Grigory Rubtsov, Petr Satunin, Sergey Sibiryakov, *Phys.Rev. D*86 (2012) 085012,arXiv:1204.5782 ;
6. New Developments in FeynCalc 9.0, Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig, Frederik Orellana, *Comput. Phys. Commun.*, 64, 345-359, 1991,arXiv:1601.01167 ;
7. Simple analytical approximations for treatment of inverse Compton scattering of relativistic electrons in the black-body radiation field, Dmitry Khangulyan, Felix A. Aharonian, Stanislav R. Kelner, *Astrophys.J.* 783 (2014) 100,arXiv:1310.7971.