

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

«ЭФФЕКТ УНРУ»

Выполнил студент

214 группы

Курлянд С.А.

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Березин В.А.

Допущена к защите

Зав. кафедрой _____

МОСКВА

2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	2
1. Квантование полей	4
1.1. Квантование в пространстве Минковского	4
1.2. Квантование в искривленном пространстве	6
2. Эффект Унру	9
2.1. Переход в координаты Риндлера	9
2.2. Ускоренный детектор в пространстве Минковского	14
3. Кратко о глобальном	18
3.1. Детектор в пространстве Минковского 2.0	18
3.2. Колебания нулевых мод	19
4. Наивная идея	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	26
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	27

ВВЕДЕНИЕ

В начале 70-х годов прошлого века начала активно развиваться гипотеза о связи энтропии и горизонта событий черной дыры. Идея о том, что площадь горизонта событий черной дыры в процессе ее эволюции ведет себя так же, как и энтропия, сподвигло к предположению об их равенстве. Эта связь была, в частности, продемонстрирована в работах [5, 12]. Однако, наличие энтропии у черной дыры должно было приводить и к наличию температуры у черной дыры, что, на тот момент, ставило под сомнение такой подход. В 1974 С.Хокинг опубликовал статью [4](более поздняя версия), в которой, основываясь на квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени черной дыры Шварцшильда, он показал наличие у черной дыры с массой m температуры:

$$\Theta_{BH} = \frac{\hbar c^3}{8\pi Gmk}$$

Здесь \hbar - постоянная Планка, c - скорость света, G - гравитационная постоянная, k - постоянная Больцмана.

Важно отметить, что при этом спектр излучения соответствовал планковскому спектру. В свою очередь, излучение черной дыры ведет к потере энергии черной дыры, и как следствие, к ее испарению. Сам факт испарения черных дыр ведет к парадоксу исчезновения информации в черной дыре. Дело в том, что информация о теле, попавшем в черную дыру (такая, например, как спин, барионный, лептонный заряды), в силу наличия горизонтов, никак не может быть извлечена. Так как черная дыра испаряется с характерным тепловым спектром, то в результате уничтожается вся информация об упавшем теле. К обсуждению этой проблемы мы вернемся в заключении данной работы.

Из соображений принципа эквивалентности следовало ожидать, что температура возникает и в случае равноускоренного наблюдателя. Так,

в 1976 году У.Унру [2] обнаружил, что равноускоренный наблюдатель с ускорением a "чувствует" планковский спектр с температурой:

$$T_U = \frac{\hbar a}{2\pi k c}$$

В этой работе мы рассмотрим эффект Унру и различные подходы к нему, и из полученных результатов, основываясь на принципе эквивалентности, сделаем качественные выводы касательно испарения черных дыр. В первой части мы кратко осветим элементы квантовой теории поля в искривленном пространстве. Во второй - рассмотрим существующие способы получения температуры Унру. Третья часть будет посвящена свойствам данного эффекта. В четвертой части будет представлена попытка получения температуры Унру, основанная на подходе Фейнмана.

В используемой системе единиц $\hbar = c = k = 1$, выбранная сигнатура $(+, -, -, -)$.

1. Квантование полей

1.1. Квантование в пространстве Минковского

Рассмотрим скалярное поле $\phi(t, \mathbf{x})$ в пространстве Минковского с метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (1.1)$$

Зададим действие:

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^4x \quad (1.2)$$

где плотность Лагранжиана:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - m^2 \phi^2) \quad (1.3)$$

Здесь $\eta^{\alpha\beta}$ - тензор, обратный $\eta_{\alpha\beta}$. Варьируя действие, можно получить уравнения движения Эйлера-Лагранжа, которые в данном случае принимают вид уравнения Клейна-Гордона:

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad \square = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \quad (1.4)$$

Один из наборов решения данного уравнения можно представить в виде:

$$u_k(t, \mathbf{x}) = (2\omega(2\pi)^3)^{-\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t}, \quad \omega = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad \omega > 0 \quad (1.5)$$

Введем скалярное произведение:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_t (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - (\partial_t \phi_1) \phi_2^*) d^3x \quad (1.6)$$

В этом случае система функций u_k будет ортонормированной:

$$(u_k, u_{k'}) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.7)$$

Чтобы проквантовать поле, следует рассматривать $\phi(t, \mathbf{x})$ в качестве эрмитового оператора. С учетом того, что моды поля u_k и u_k^* образуют ортонормированный базис со скалярным произведением (1.6), можно представить поле $\phi(t, \mathbf{x})$ в виде:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_k (a_k u_k(t, \mathbf{x}) + a_k^\dagger u_k^*(t, \mathbf{x})) \quad (1.8)$$

Введенные операторы, по аналогии с гармоническим осциллятором в классической квантовой механике, играют роль операторов рождения и уничтожения частиц с импульсом \mathbf{k} и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (1.9)$$

Используя эти операторы, можно построить пространство динамических состояний поля - пространство Фока, определяемое как тензорное произведение соответствующих одночастичных состояний. Вакуумное состояние поля $|0\rangle$ определяется:

$$a_k |0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{k} \quad (1.10)$$

В дальнейшем нам понадобятся операторы:

$$N_k = a_k^\dagger a_k, \quad N = \sum_{k=1} N_k \quad (1.11)$$

Эти операторы имеют смысл числа частиц с импульсом \mathbf{k} и полного числа частиц соответственно. В частности, $\langle 0|N_k|0\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k}$, что обозначает полное отсутствие частиц в вакууме Минковского.

1.2. Квантование в искривленном пространстве

В случае искривленного пространства преобразуем плотность Лагранжиана следующим образом ($g_{\alpha\beta}$ - метрический тензор, g - его детерминант):

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}[-g(x)]^{\frac{1}{2}}(g^{\alpha\beta}(x)\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - [m^2 + \xi R(x)]\phi^2) \quad (1.12)$$

В последнем слагаемом, описывающем взаимодействие с гравитационным полем, $R(x)$ - скаляр Риччи, ξ - некоторый параметр (в текущей работе это слагаемое можно опустить, так как рассматривается плоское пространство). Уравнения Эйлера-Лагранжа принимают вид:

$$(\square + m^2 + \xi R(x))\phi = 0, \quad \square = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta \quad (1.13)$$

Скалярное произведение обобщается интегралом по пространственноподобной гиперповерхности:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma} [\phi_1 \partial_\mu \phi_2^* - (\partial_\mu \phi_1) \phi_2^*] (-g(x))^{\frac{1}{2}} d\Sigma^\mu \quad (1.14)$$

По аналогии с пространством Минковского, можно найти набор ортонормированных мод u_k и разложить по ним поле:

$$\phi(x) = \sum_k (a_k u_k(t, \mathbf{x}) + a_k^\dagger u_k^*(t, \mathbf{x})) \quad (1.15)$$

Здесь a_k, a_k^\dagger удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (1.9). Можно по аналогии определить пространство динамических состояний поля, однако теперь возникает неопределенность связанная с отсутствием (в общем случае) симметрии уравнения (1.4). Действительно, в пространстве Минковского нормальные моды (1.3) оказываются связанными с ортогональной системой координат (t, x, y, z) . Элемент длины в пространстве Минковского инвариантен относительно действия группы Пуанкаре, откуда и следует инвариантность уравнения (1.4) (следовательно, и вакуумного состояния) при переходе от одного инерциального наблюдателя к другому. В случае искривленного пространства-времени возможно существование векторных полей Киллинга (поля, по направлению которых производная Ли от метрики равна нулю, а, значит, сохраняется и элемент длины), при этом нетрудно определить полевые моды ассоциируемые с этими полями. Однако, в общем случае, векторные поля Киллинга отсутствуют и нет выделенных направлений для квантования поля, в результате чего нет универсального разбиения на моды и, в частности, возникает неоднозначность в определении вакуумного состояния. Чтобы продемонстрировать это, представим поле $\phi(t, x)$ в виде разложения по другому полному набору нормальных мод:

$$\phi(x) = \sum_k (\bar{a}_k \bar{u}_k + \bar{a}_k^\dagger \bar{u}_k^*) \quad (1.16)$$

Такое разложение определяет новое состояние вакуума $\bar{0}$:

$$\bar{a}_k |\bar{0}\rangle = \bar{0}, \quad \forall \mathbf{k} \quad (1.17)$$

В силу полноты обоих разложений, полевые моды могут быть выражены друг через друга:

$$\bar{u}_i = \sum_k (\alpha_{ik} u_k + \beta_{ik} u_k^*) \quad (1.18)$$

Такое соотношение называется преобразованием Боголюбова, а β_{ik} , α_{ik} - коэффициентами Боголюбова. Нетрудно показать, что если $\beta_{ik} \neq 0$, то вакуум одного поля выражается через полевые моды другого и, в частности:

$$\langle \bar{0} | N_k | \bar{0} \rangle = \sum_i |\beta_{ik}|^2 \quad (1.19)$$

Последнее и обозначает, что замена координат может привести к возникновению частиц в одном вакууме при их полном отсутствии в другом вакууме.

2. Эффект Унру

2.1. Переход в координаты Риндлера

Как уже было сказано ранее, эффект Унру заключается в обнаружении планковского спектра ускоряющимся наблюдателем. Рассмотрим пространство Минковского с метрикой (1.1) Для получения траектории в случае равноускоренного движения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} u^\mu u_\mu = 1 \\ a^\mu a_\mu = -\rho^2 \\ a^\mu = u^\nu u_{;\nu}^\mu \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь u^μ - координаты 4-скорости, a^μ - координаты 4-ускорения, ρ - модуль ускорения. В случае, когда ускорение направлено строго вдоль одной из координат, после несложных преобразований можно получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a^0 = \rho u^1 \\ a^1 = \rho u^0 \end{cases} \quad (2.2)$$

В результате траектория ускоряющегося наблюдателя вдоль x принимает вид:

$$\begin{cases} x = \rho^{-1} \cosh(\rho\tau) \\ t = \rho^{-1} \sinh(\rho\tau) \\ y = \text{const} \\ z = \text{const} \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь τ - собственное время ускоряющегося наблюдателя. Далее рассмотрим двумерный случай. Произведем замену координату:

$$\begin{cases} x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\eta) \\ t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \end{cases} \quad (2.4)$$

$a = \text{const} > 0$. Тогда метрика принимает вид:

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2) \quad (2.5)$$

Такая система координат называется системой координат Риндлера.

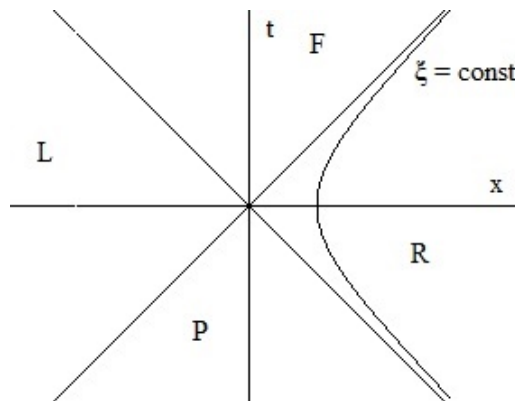


Рис. 2.1: *

Траектория постоянной координаты ξ в пространстве Минковского.

Из вида (2.4) понятно, что наблюдатель с $\xi = \text{const}$ движется с постоянным ускорением в пространстве Минковского, а собственное время наблюдателя $\tau = e^{a\xi}\eta$. Заметим, что такая карта покрывает только четверть пространства Минковского $|x| > t$. Второй клин Риндлера при

$x < |t|$ можно получить, отражая сначала ось t , а затем ось x . Для этого достаточно поменять знаки в уравнениях преобразования координат, при этом в левом клине Риндлера возрастанию t будет соответствовать убывание ξ . Важно отметить, что в пространстве Риндлера возникают горизонты - левый и правые клины Риндлера причинно не связаны. Рассмотрим квантование безмассового скалярного поля в риндлеровской системе координат. Так как поле безмассово, а в двумерном случае метрика (2.5) конформна метрике пространства Минковского, то моды поля имеют вид:

$$u_k(\xi, \eta) = (4\omega\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\xi \pm i\omega\eta}, \quad \omega = |k| \quad (2.6)$$

Здесь — относится к правому клину R, + - к левому L. Введем функции:

$$\begin{cases} u_k^R = (4\omega\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\xi - i\omega\eta}, & \xi, \eta \in R \\ u_k^R = 0, & \xi, \eta \in L \end{cases} \quad \begin{cases} u_k^L = (4\omega\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ik\xi + i\omega\eta}, & \xi, \eta \in L \\ u_k^L = 0, & \xi, \eta \in R \end{cases} \quad (2.7)$$

По отдельности каждый из наборов решений u_k^R, u_k^L не является полным решением в пространстве Минковского. Однако, в совокупности эти моды образуют полную систему в пространстве Минковского. Линии $\eta = const$ (пересекающие обе области L и R) являются поверхностями Коши для всего пространства-времени. Моды (2.7) можно аналитически продолжить и в области, отмеченные на диаграмме литтерами F и P [2] (при этом a становится мнимой). Тогда поле можно представить в виде разложения по этим модам:

$$\phi = \sum_k (b_k^{(1)} u_k^L + b_k^{(1)\dagger} u_k^{*L} + b_k^{(2)} u_k^R + b_k^{(2)\dagger} u_k^{*R}) \quad (2.8)$$

При этом поле можно разложить и по модам пространства Минковского (1.8) (заметим, что в случае двумерного пространства нормирующий

множитель равен $(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}$, что и приводит к возникновению двух вакуумных состояний $|0_M\rangle = 0$ и $|0_R\rangle = 0$, определенных соотношениями (1.9) и

$$b_k^{(1)} |0_R\rangle = b_k^{(2)} |0_R\rangle = 0 \quad (2.9)$$

Прежде всего заметим, что эти вакуумы не являются эквивалентными: полевые моды вакуума пространства Риндлера не преобразуются гладко при переходе из L в R. Действительно, при переходе через точку $(\xi, \eta) = (0, 0)$ показатель экспоненты, согласно (2.7), меняет знак, что и говорит об неаналитичности полевых мод. В противоположность этому, моды пространства Минковского аналитичны всюду, поэтому можно говорить о наличии ненулевых коэффициентов β_{ik} при преобразовании базиса в фоковском пространстве. Чтобы посчитать коэффициенты Боголюбова, можно воспользоваться прямым определением и найти скалярные произведения соответствующих мод. Однако, более изящно можно получить тот же результат, воспользовавшись методом, предложенным Унру. Для этого достаточно заметить, что хоть u_k^R, u_k^L неаналитичны, их линейные комбинации:

$$\begin{cases} u_k^R + e^{-\pi\omega/a} u_{-k}^{*L} \\ u_{-k}^{*R} + e^{\pi\omega/a} u_k^L \end{cases} \quad (2.10)$$

Аналитичны в точке $(\xi, \eta) = (0, 0)$ и обладают теми же свойствами, что и моды пространства Минковского. Из этого следует, что такие линейные комбинации соответствуют вакуумному состоянию пространства Минковского $|0_M\rangle$. Таким образом, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [2sh(\pi\omega/a)(d_k^{(1)}[e^{\pi\omega/2a}u_k^R + e^{-\pi\omega/2a}u_{-k}^{*L}] + d_k^{(2)}[e^{-\pi\omega/2a}u_{-k}^{*R} + e^{\pi\omega/2a}u_k^L]) \\ d_k^{(1)}|0_M\rangle = d_{(k)}^2|0_M\rangle = 0 \end{array} \right. + H.C. \quad (2..11)$$

Здесь Н.С. - эрмитово-сопряженная часть. Отсюда можно получить преобразование Боголюбова и, следовательно, связь между вакуумными состояниями:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_k^{(1)} = [2sh(\pi\omega/a)]^{-1/2}[e^{\pi\omega/2a}d_k^{(2)} + e^{-\pi\omega/2a}d_k^{(1)\dagger}] \\ b_k^{(2)} = [2sh(\pi\omega/a)]^{-1/2}[e^{\pi\omega/2a}d_k^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a}d_k^{(2)\dagger}] \end{array} \right. \quad (2..12)$$

Рассмотрим теперь наблюдателя, движущегося с постоянным ускорением в пространстве Минковского. В пространстве Риндлера такое движение соответствует траектории $\xi = const$. При этом собственное время наблюдателя будет пропорционально координате η , и следовательно, вакуумное состояние риндлеровских наблюдателей будет ассоциироваться с положительно-частотными модами по отношению к η . Согласно (1.19), (2.8) и (2.12) риндлеровский наблюдатель обнаружит:

$$\langle 0_M | b_k^\dagger b_k | 0_M \rangle = e^{-\pi\omega/a} / [2sh(\pi\omega/a)] = (e^{2\pi\omega/a} - 1)^{-1} \quad (2..13)$$

частиц с импульсом k . Такое распределение частиц в точности соответствует планковскому спектру с температурой $T_0 = \frac{a}{2\pi}$. Тогда, согласно соотношению Толмена [6], вытекающего из разности между сохраняющейся и локальной энергиями, наблюдатель с постоянным ускорением будет чувствовать температуру:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{a}{2\pi} e^{-a\xi} \quad (2..14)$$

В метрике (2.5) существует другой, несколько эвристический метод получения температуры. Для этого произведем виковский поворот: $\eta = i\tau$. Тогда линейный элемент с точностью до знака переходит в:

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\tau^2 + d\xi^2)$$

При этом заметим, что если произвести виковский поворот и в пространстве Минковского $t = i\zeta$, то формулы преобразования координат (2.4) принимают вид:

$$\begin{cases} x = a^{-1}e^{a\xi}\cos(a\tau) \\ \zeta = a^{-1}e^{a\xi}\sin(a\tau) \end{cases}$$

Отсюда видно, что координата τ является циклической координатой. Это нагляднее проявляется, если перейти к полярной координате $\rho = a^{-1}e^{a\xi}$:

$$ds^2 = \rho^2 d(a\tau)^2 + d\rho^2$$

При этом получается метрика локально-плоского двумерного евклидова пространства в полярных координатах. Дабы избежать конусной особенности, потребуем, чтобы период $\tau a = 2\pi$ (половина пространства-времени Минковского обращается в евклидову плоскость). Примечательно то, что температура Унру получается связанной с периодом $T = \tau^{-1} = \frac{a}{2\pi}$. На первый взгляд, такой подход кажется случайностью, однако, аналогичные рассуждения приводят к верным результатам и в случае черной дыры Шварцшильда [10, 15].

2.2. Ускоренный детектор в пространстве Минковского

Результат, рассмотренный выше, можно получить и не переходя в другие координаты. Для этого воспользуемся моделью детектора, предложенной Унру и Де Виттом [2]. Такой детектор представляет собой точечную частицу с внутренними уровнями энергии E , связанную монополярным взаимодействием с полем ϕ .

Рассмотрим детектор, движущийся в пространстве Минковского с траекторией $x^\mu(\tau)$, τ - собственное время. Взаимодействие детектора с полем описывается лагранжианом $cm(\tau)\phi(x(\tau))$, где c - константа

связи, m - оператор монопольного момента детектора. Пусть изначально поле находится в вакуумном состоянии $|0_M\rangle$. При движении детектора по произвольной траектории в общем случае следует ожидать переход детектора из основного состояния E_0 в возбужденное $E > E_0$, вместе с тем как поле переходит в возбужденное состояние $|\psi\rangle$. В первом порядке теории возмущения амплитуда перехода в возбужденное состояние будет определяться [1]:

$$ic \langle E, \psi | \int_{-\infty}^{+\infty} m(\tau) \phi(x(\tau)) d\tau | 0_M, E_0 \rangle \quad (2..15)$$

Временная эволюция $m(\tau)$ описывается согласно:

$$m(\tau) = e^{iH_0\tau} m(0) e^{-iH_0\tau}, \quad (2..16)$$

где $H_0 |E\rangle = E |E\rangle$. Факторизуя амплитуду перехода:

$$ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \langle \psi | \phi(x) | 0_M \rangle d\tau \quad (2..17)$$

Пусть поле разложено по модам (1.8), тогда в первом порядке могут происходить переходы только в одночастичные возбужденные состояния $|\psi\rangle = |1_{\mathbf{k}}\rangle$. Тогда, учитывая нормировку (1.5):

$$\langle 1_{\mathbf{k}} | \phi(x) | 0_M \rangle = \int d^3k' (16\pi^3\omega')^{1/2} \langle 1_{\mathbf{k}} | a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0_M \rangle e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x} - i\omega't} = (16\pi^3\omega)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t} \quad (2..18)$$

Чтобы получить вероятность прехода в возбужденное состояние необходимо подставить (2.18) в (2.17), найти квадрат модуля и просуммировать по всем возможным одночастичным состояниям, что дает:

$$c^2 \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 F(E - E_0), \quad (2..19)$$

где F - функция отклика детектора, определяемая:

$$F(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} D^+(x(\tau), x(\tau')) \quad (2..20)$$

Здесь D^+ - положительно-частотная вайтмановская функция Грина [13].

Пусть траектория движения такая, что:

$$D^+(x(\tau), x(\tau')) = d(\Delta\tau), \quad \Delta\tau = \tau - \tau' \quad (2..21)$$

Такая система будет инвариатна относительно временных трансляций. Это означает, что система находится в равновесии и число поглощаемых частиц постоянно. Если скорость поглощаемых частиц отлично от нуля, то вероятность перехода (2.19) будет бесконечна. Чтобы обойти эту ситуацию можно рассматривать адиабатическое выключение при $\tau \rightarrow \pm\infty$ или рассматривать вероятность перехода в единицу собственного времени:

$$c^2 \sum_E |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Delta\tau e^{-iE(\Delta\tau)} D^+(\Delta\tau) \quad (2..22)$$

В случае безмассового скалярного поля функция Вайтмана принимает вид:

$$D^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2[(t-t'-i\varepsilon)^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2]}, \quad (2..23)$$

где ε - малая добавка. Теперь рассмотрим гиперболическую траекторию (2.3), отвечающую постоянному ускорению ρ , функция Вайтмана принимает вид:

$$D^+(\Delta\tau) = -\left[\frac{16\pi^2}{\rho^2}sh^2\left(\frac{\Delta\tau\rho}{2} - i\varepsilon\rho\right)\right]^{-1} \quad (2..24)$$

Раскладывая в ряд гиперболический синус и подставляя в (2.22), получаем для вероятности регистрации частицы детектором в единицу собственного времени:

$$\frac{c^2}{2\pi} \sum_E \frac{(E - E_0) |\langle E|m(0)|E_0\rangle|^2}{e^{\frac{2\pi(E-E_0)}{\rho}} - 1} \quad (2..25)$$

Наличие фактора $[e^{\frac{2\pi(E-E_0)}{\rho}} - 1]^{-1}$ и указывает на планковский характер излучения, регистрируемого детектором, с характерной температурой $T = \frac{\rho}{2\pi}$, что согласуется с полученным ранее выражением (2.14).

3. Кратко о глобальном

3.1. Детектор в пространстве Минковского 2.0

В случае, когда детектор сначала движется с постоянной скоростью, а потом начинает ускоряться, можно использовать подход, изложенный в разделе выше. Это было сделано, в частности, С.Шлихтом [3]. В своей работе Шлихт предложил модифицировать корреляционную функцию, введенную соотношением (2.23). Рассматривая точечный детектор как предел конечного жесткого детектора, где жесткость введена по отношению к собственной системе координат детектора, он получил:

$$\langle 0|\phi(\tau)\phi(\tau')|0\rangle = \frac{1}{4\pi^2[\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau') - i\varepsilon(\dot{\mathbf{x}}(\tau) + \dot{\mathbf{x}}(\tau'))]^2} \quad (3.1)$$

Рассматривая траекторию, гладко переходящую из прямой в гиперболу (переход от постоянной скорости к постоянному ускорению):

$$t(\tau) = \tau - \ln 2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^{2\tau}} - \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}e^{2\tau}}\right), \quad x(\tau) = \frac{1}{2}e^\tau, \quad y(\tau) = 0, \quad z(\tau) = 0 \quad (3.2)$$

Шлихт показал, что детектор регистрирует излучение, приближающееся к тепловому с любой наперед заданной точностью, что является достаточно интересным результатом. Действительно, как было показано ранее, именно возникновение горизонтов в метрике Риндлера приводит к нетождественности вакуумных состояний $|0_M\rangle$ и $|0_R\rangle$. Однако, при траектории детектора, только приближающейся к постоянному ускорению в отсутствие каких-либо горизонтов, спектр все равно оказывается близким к планковскому. Более того, в любой заданный момент

времени последующая траектория детектора может поменяться, а спектр регистрируемого излучения, согласно сегодняшним представлениям, формируется на основе истории движущегося детектора. Однако, результат оказывается все равно таким, как если бы детектор "знал" что будет двигаться с постоянным ускорением.

3.2. Колебания нулевых мод

Необычный подход к получению планковского спектра был предложен Т.Бойером [9]. В своей работе он указал на связь между нулевыми колебаниями поля и тепловым излучением при помощи конформных преобразований в двумерном пространстве, замедляющих время и переводящих нормальные колебательные моды в нормальные.

Такая связь мотивирована рассмотрением эффекта Казимира [14], заключающегося в возникновении сил притяжения между двумя электрически нейтральными параллельными пластинами. Силы Казимира возникают вследствие тепловых колебаний поля, однако они не исчезают даже при стремлении температуры к нулю, что указывает на наличие нулевых колебаний поля.

В пространстве Минковского упомянутые выше конформные преобразования можно записать в простой форме:

$$t \rightarrow t' = \sigma t, \quad x \rightarrow x' = \sigma x, \quad \sigma = const \quad (3.3)$$

Такие преобразования переводят плоские волны с частотой $|k|$ в плоские волны с частотой $\frac{|k|}{\sigma}$, а колебательные моды $\phi(t, x)_k = e^{ikx - i|k|t}$ в колебательные моды $\phi'(t', x')_k = e^{i\frac{k}{\sigma}x' - i\frac{|k|}{\sigma}t'}$. Последние моды могут быть рассмотрены как функции от старых координат $\phi'(t, x)$. Таким образом, конформное отображение можно рассматривать не в смысле преобразования координат и метрики, а в смысле преобразования колебательных мод:

$$\phi(t, x)_k \rightarrow \phi(t, x)_{\sigma k} = \phi(\sigma t, \sigma x)_k \quad (3.4)$$

Аналогичный подход можно реализовать и в координатах Риндлера, что и было сделано Бойером. Далее он показал, что такие преобразования оставляют неизменными спектральную форму нулевых колебаний во всех инерциальных системах отсчета, в то время как в риндлеровской системе координат подобные преобразования ведут к возникновению теплового излучения с ненулевой температурой. Обратным преобразованием координат (из Риндлера в Минковский) Бойер показал, что спектр такого теплового излучения принимает вид планковского излучения нулевых колебательных мод пространства Минковского.

Связь планковского спектра с нулевыми колебательными модами была продемонстрирована и в работе А.Ландулфо, С.Фуллинга и Дж.Матсаса [8], где авторы показали что именно нулевые колебательные моды пространства Риндлера вносят вклад в формирование спектра.

Эта связь интересна тем, что для нулевых колебательных мод длина волны $\lambda \rightarrow \infty$, и поэтому, по сути, они характеризуются глобальной структурой пространства-времени. В свою очередь, раз спектр формируется нулевыми колебаниями, то и спектр определяется глобальной структурой пространства-времени. Такой подход может быть тесно связан с результатами предыдущего раздела - наблюдатель "знает" как будет двигаться дальше в силу того, что планковский спектр - результат глобальной структуры пространства-времени.

4. Наивная идея

Сделаем попытку подойти к эффекту Унру с еще одной стороны. Как известно, квантовая механика может быть изложена в трех различных подходах. Один из них, кардинально отличающийся от остальных, является подходом Фейнмана [7]. Он заключается в суммировании вкладов от амплитуд всех траекторий, приводящих к искомому событию:

$$K(2, 1) = \int_1^2 e^{iS[x]} Dx \quad (4.1)$$

Здесь Dx обозначает интегрирование по всем возможным траекториям, соединяющих события 1 и 2, а $S[x]$ - действие, описывающее систему. Квадрат модуля амплитуды будет определять вероятностью исходного события. Фейнмановский подход можно обобщить и на случай квантовой теории поля, именно этим мы сейчас и воспользуемся.

Рассмотрим для двумерного пространства Минковского переход в координаты Риндлера в следующей форме:

$$\begin{cases} x = \xi \cosh(\eta) \\ t = \xi \sinh(\eta) \end{cases} \quad (4.2)$$

При этом метрика принимает вид:

$$ds^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2 \quad (4.3)$$

В таких координатах траектория $\xi = \text{const}$ соответствует движению с

постоянным ускорением $\alpha = \frac{1}{\xi}$ в пространстве Минковского, при этом собственное время ускоряющегося наблюдателя $\tau = \frac{\eta}{\alpha}$. Основное отличие от (2.5) теперь состоит в том, что при изменении $-\infty < \xi < +\infty$ покрываются оба клина. В таких координатах плотность Лагранжиана (1.12) для безмассового скалярного поля принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{\xi^2}(\phi_{,\eta})^2 - (\phi_{,\xi})^2\right) \quad (4.4)$$

Здесь $g = \det(g_{\mu\nu})$ и в рассматриваемых координатах равен $-\xi^2$. Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \xi \partial_\xi (\xi \partial_\xi \phi) = 0 \quad (4.5)$$

Решение такого уравнения найдем в виде $\phi = e^{-i\omega'\eta}g(\xi)$, где $g(\xi)$ удовлетворяет уравнению:

$$\omega'^2 g(\xi) + \xi \partial_\xi (\xi \partial_\xi g(\xi)) = 0 \quad (4.6)$$

Его решение:

$$g(\xi) = A \sin(\omega' \ln(\xi) + \varphi) \quad (4.7)$$

Здесь A - нормирующий множитель.

Теперь перейдем непосредственно к попытке реализовать идею этой главы. Для этого вспомним, что, раскладывая поле ϕ по набору ортонормированных мод, мы, по сути, представляли поле в виде совокупности независимых осцилляторов с частотами $\omega = |\mathbf{k}|$, а операторы $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$ играли роль числа этих осцилляторов. Рассмотрим один из таких осцилляторов в системе координат (4.2) и подставим характеризующую его моду в плотность Лагранжиана (4.4). Получим:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\xi\left(\frac{\omega'^2 A^2}{\xi^2}e^{2i\omega'\eta}\sin^2(k\ln(\xi)+\phi)+\frac{\omega'^2 A^2}{\xi^2}e^{2i\omega'\eta}\cos^2(k\ln(\xi))\right) = -\frac{\omega'^2 A^2}{2\xi}e^{2i\omega'\eta} \quad (4.8)$$

Мы хотим, воспользовавшись (4.1), определить вероятность наблюдения частиц ускоряющимся наблюдателем. Для этого рассмотрим действие на траектории $\xi = \frac{1}{\alpha}$:

$$S = \int \int d\xi d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \delta\left(\xi - \frac{1}{\alpha}\right) \delta(\eta - \tau\alpha) \mathcal{L}(\xi, \eta) \quad (4.9)$$

Вводя бесконечные пределы интегрирования, мы предполагаем, что равноускоренный наблюдатель движется бесконечно долго. Подставляя (4.9), имеем:

$$S = -\frac{\omega'^2 A^2 \alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{2i\omega'\tau\alpha} \quad (4.10)$$

В нормировке, введенной в начале работы, $A^2 = \frac{1}{4\pi\omega'}$. Далее, из вида зависимости $\phi = e^{-i\omega'\eta}g(\xi)$ и связи координаты η с собственным временем $\eta = \alpha\tau$, следует, что физический смысл частоты несет произведение $\alpha\omega'$. Пусть теперь каждый осциллятор характеризуется не конкретной частотой, а некоторым интервалом частот $\Delta\omega = \omega - \omega^*$. Окончательно имеем для действия одного такого осциллятора:

$$S = -\frac{\Delta\omega}{8}\delta(\Delta\omega) \quad (4.11)$$

Мы хотим определить вероятность наблюдения частицы с частотой ω . Для этого, вообще говоря, нужно проинтегрировать по всем возможным конфигурациям поля ϕ , но в нулевом порядке точности значение

амплитуды будет сводиться к $e^{iS_{extr}}$, где S_{extr} - экстремальное действие. Чтобы получить такое действие, можно проинтегрировать действие (4.11) по всем частотам. Это непротиворечиво, так как осцилляторы друг с другом не взаимодействуют и (4.11) было получено подстановкой в него уравнений Эйлера-Лагранжа для каждого из осцилляторов (по-другому, (4.11) - экстремальные действия для каждого осциллятора по-отдельности). При этом необходимо учитывать плотность числа осцилляторов на интервал частот $\rho(\omega)$. Получим:

$$S_{extr} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\omega}{8} \delta(\omega - \omega^*) \rho(\omega^*) d\omega^* \quad (4.12)$$

Если предположить, что $\rho(\omega)$ имеет вид

$$\rho(\omega) = \frac{8\pi\omega}{\alpha\Delta\omega} \quad (4.13)$$

то экстремальное действие принимает вид:

$$S_{extr}(\omega) = -\frac{\pi\omega}{\alpha} \quad (4.14)$$

Возводя амплитуду в квадрат, получаем с точностью до нормировочного множителя вероятность наблюдать на траектории одну частицу с частотой ω :

$$P = e^{-\frac{2\pi\omega}{\alpha}} \quad (4.15)$$

Считая, что на уровне с частотой ω может быть любое число частиц (что собственно и предполагалось ранее), получим для статистической суммы:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\omega n}{\alpha}} \quad (4.16)$$

И в итоге, по аналогии с бозонами, можно получить для среднего числа наблюдаемых частиц:

$$\langle n \rangle = (e^{2\pi\omega/a} - 1)^{-1} \quad (4.17)$$

Что соответствует планковскому излучению с температурой $T = \frac{\alpha}{2\pi}$. Существенную роль при таком выводе играет предположение о зависимости $\rho(\omega)$. На самом деле, качественную зависимость от ускорения и частот можно получить из следующих соображений: $\rho(\omega) \sim \omega' = \frac{\omega}{\alpha}$, так как мы предполагали, что каждый из осцилляторов характеризуется шириной $\Delta\omega$, то и $\rho(\omega) \sim \frac{\omega}{\alpha\Delta\omega}$. Необходимость введения фактора 8π может быть связана с введением нормировочного множителя A .

Отметим, что если бы мы проводили аналогичные рассуждения для пространства Минковского, то получили бы нулевую вероятность наблюдения частиц. Действительно, в пространстве Минковского плотность Лагранжиана для безмассового скалярного поля обращается в ноль на уравнениях поля, значит, вероятность обнаружения становится равной $\frac{e^0}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{0n}} = 0$ вне зависимости от частоты.

Любопытным результатом здесь является то, что планковский спектр был получен в результате интегрирования по всей траектории: $-\infty < \tau < +\infty$. Такое рассуждение может, как и говорилось ранее, свидетельствовать о глобальной зависимости от пространства-времени или, как в данном случае, о глобальной зависимости от траектории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные нами выше умозаключения наталкивают, как уже было неоднократно сказано, на мысль о связи между планковским спектром и структурой траектории.

Рассмотрев связь между колебательными модами поля в пространстве Минковского и в пространстве Риндлера, мы убедились в том, что в силу неаналитичности последних (как результат наличия горизонтов), коэффициенты Боголюбова β_{ij} отличны от нуля, а, значит, и число частиц (1.19) отлично от нуля и, согласно (2.13), дает тепловой спектр. Из анализа статей [8, 9] был подчеркнут вклад нулевых колебательных мод в планковский спектр. Рассмотрение равноускоренного детектора в пространстве Минковского, работа С.Шлихта [3] и наивная идея четвертой главы также привели к планковскому спектру. Однако, во всех этих способах тепловой спектр возникал в предположении о том, что наблюдатель движется с постоянным ускорением бесконечно долгое время. Но тогда возникает вопрос, что будет, если наблюдатель будет двигаться с постоянным ускорением лишь конечный интервал времени?

Если наши рассуждения верны, то при движении с постоянным ускорением ограниченное время, следует ожидать, что наблюдатель уже не будет регистрировать планковский спектр, так как будут возникать поправки, нарушающие эту зависимость.

В этой связи, вспомним о принципе эквивалентности и хокингском излучении. Как уже было упомянуто во введении, испарение черных дыр ведет к возникновению информационного парадокса. Однако, испарение черной дыры длится в течение конечного промежутка времени, иначе как такое испарение не имеет смысла. Из принципа эквивалентности следует ожидать, что тогда и спектр черной дыры не будет тепловым, а значит, и нет потери информации.

Вспоминая спор Пирселла и Хокинга, можно сказать, что ситуация выглядит так, как если бы мы теряли всю информацию об энциклопедии, предположив, что она будет гореть бесконечно долго. Однако, зная, что она сгорит за конечное время, мы можем получить информацию и о самой энциклопедии.

Конечно, это утверждение требует дополнительных доказательств, и на данном этапе существует как идея, подкрепленная результатами анализа эффекта Унру для равноускоренного наблюдателя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н.Бирелл, П.Девис, Квантованные поля в искривленном пространстве-времени (Cambridge University Press, 1982)
2. W.G.Unruh, Notes on black-hole evaporation (Phys.Rev.D v.14, 1976)
3. Sebastian Schlicht, Considerations on the Unruh Effect: Causality and Regularizations (arXiv:gr-qc/0306022, 2003)
4. S.W.Hawking, Particle Creation by Black Holes (Commun. math.Phys. 43, 1975)
5. J.M.Bardeen, V.Carter, S.Hawking, The four laws of black hole mechanics (Commun. math.Phys. 31, 1973)
6. Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика ч.1 (Серия:"Теоретическая физика т.V, М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002)
7. Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям (М.: Мир, 1968)
8. Andre G. S. Landulfo, Stephen A. Fulling, George E. A. Matsas, Classical and quantum aspects of the radiation emitted by a uniformly accelerated charge: Larmor–Unruh reconciliation and zero-frequency Rindler modes (arXiv:1907.06665v1 [gr-qc] 15 Jul 2019)
9. Timothy H. Boyer, The Blackbody Radiation Spectrum Follows from Zero-Point Radiation and the Structure of Relativistic Spacetime in Classical Physics (arXiv:1107.3446 18 Jul 2011)
10. В.А. Березин, А.Л.Смирнов, О черных дырах и замаскированных черных дырах (ИЯИ РАН, 2008)

11. W.Rindler, Hyperbolic motion in curved space time (Phys.Rev. V.119, 1960)
12. J.D.Bekenstein, Physical Review D, 7, 2333, (1973)
13. Н.Н.Боголюбов, А.А. Логунов, А.И.Оксак, И.Т.Тодоров, Общие принципы квантовой теории поля (М.:Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1987)
14. R.Balian, B.Duplantier, Ann.Phys.(USA), 104, 300 (1977)
15. S. W. Hawking and W. Israel, General Relativity: An Einstein Centenary Survey, (Cambridge University Press, Cambridge, 1979)