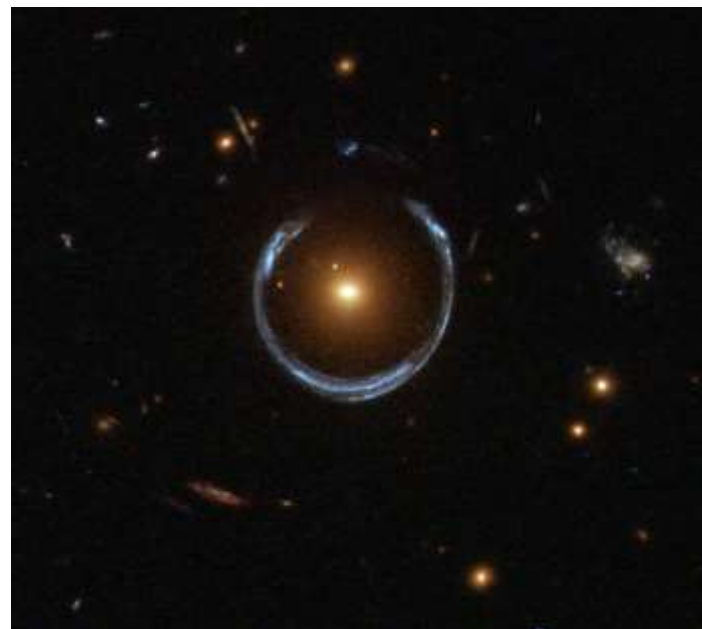
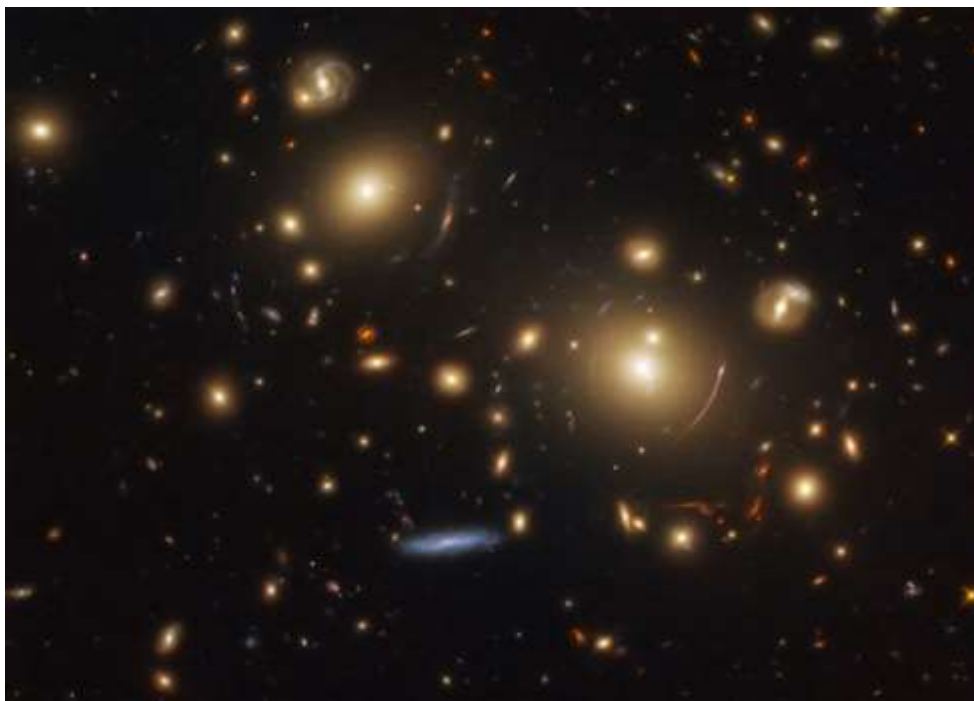


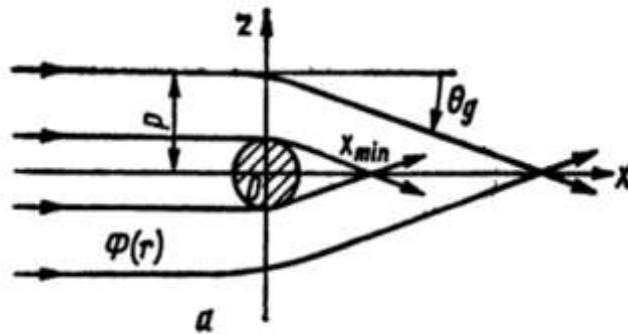
ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ГРАВИТАЦИОННОГО ЛИНЗИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПОИСКА ТЕМНОЙ МАТЕРИИ.

Студентка 206 группы
Куклева Екатерина Алексеевна
Научный руководитель:
член-корр. РАН,
доктор физ.-мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Гравитационная линза – космический объект, искривляющий своим гравитационным полем ход лучей, идущих от фоновых источников.

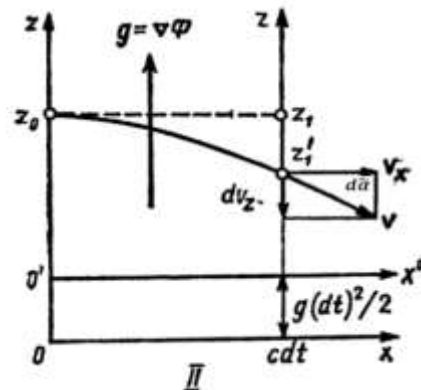
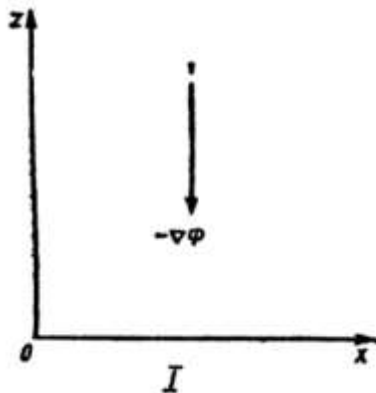


Отклонение светового луча



Параллельные лучи собираются не в точке, а на оси

Принцип эквивалентности

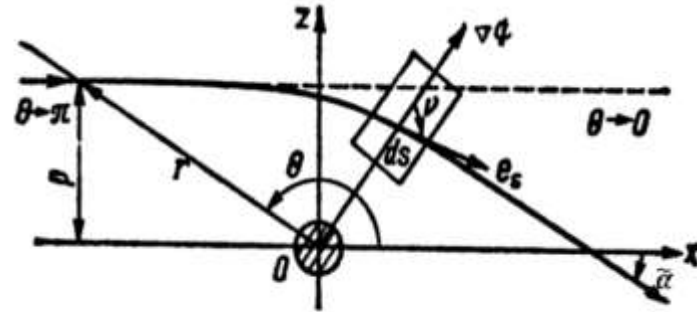
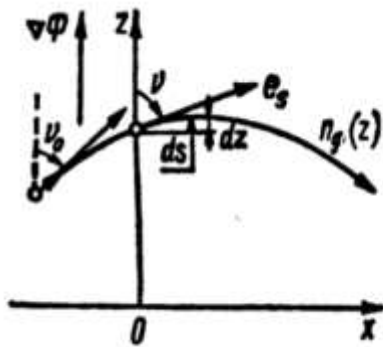


$$d\tilde{\alpha} = -\frac{dv_z}{dv_x}$$

$$d\tilde{\alpha} = \frac{gdt}{c} = \frac{gdx}{c^2}$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dx} = \frac{g}{c^2} = c^{-2} \frac{d\Phi}{dz}$$

Отклонение светового луча



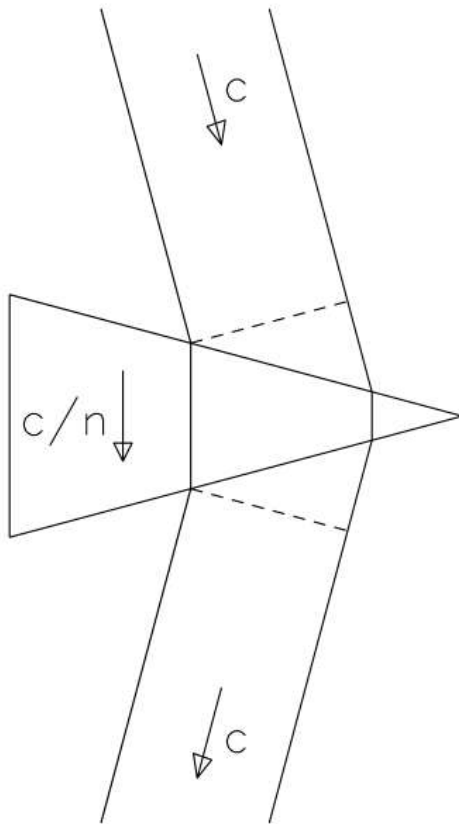
$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{\sin \nu}{c^2} \frac{d\Phi}{dz}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{GM}{pc^2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2GM}{pc^2}$$

Получения угла отклонения
из кинематического подхода

Эффективный показатель преломления



$$n_g \sin v = \text{const}$$

$$\frac{dn_g}{dz} \sin v + n_g \cos v \frac{dv}{dz} = 0$$

$$\cos v \frac{dv}{dz} = -\frac{dn_g}{n_g dz}$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} = -\frac{\sin v}{n_g} \frac{dn_g}{dz}$$

$$n_g = 1 - \frac{\Phi}{c^2}$$

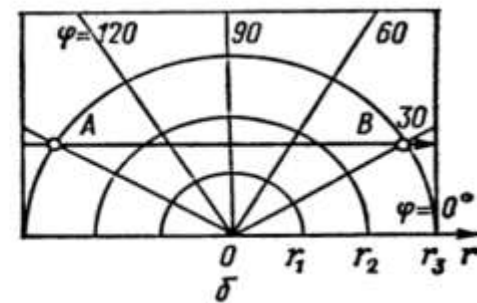
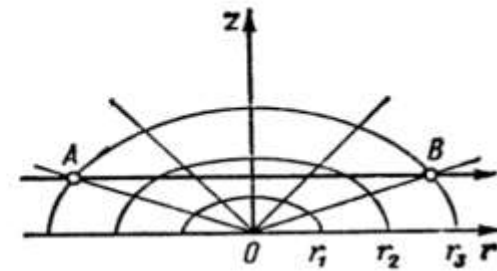
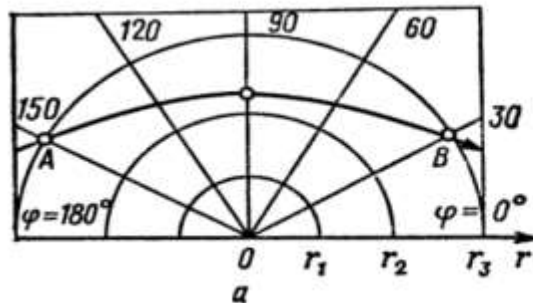
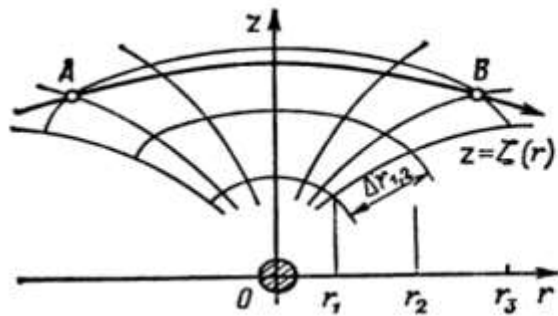
$$c_g = \frac{c}{n_g} \simeq \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)$$

Отклонения луча в рамках ОТО

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cdt)^2 - dl^2$$

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$



Отклонения луча в рамках ОТО

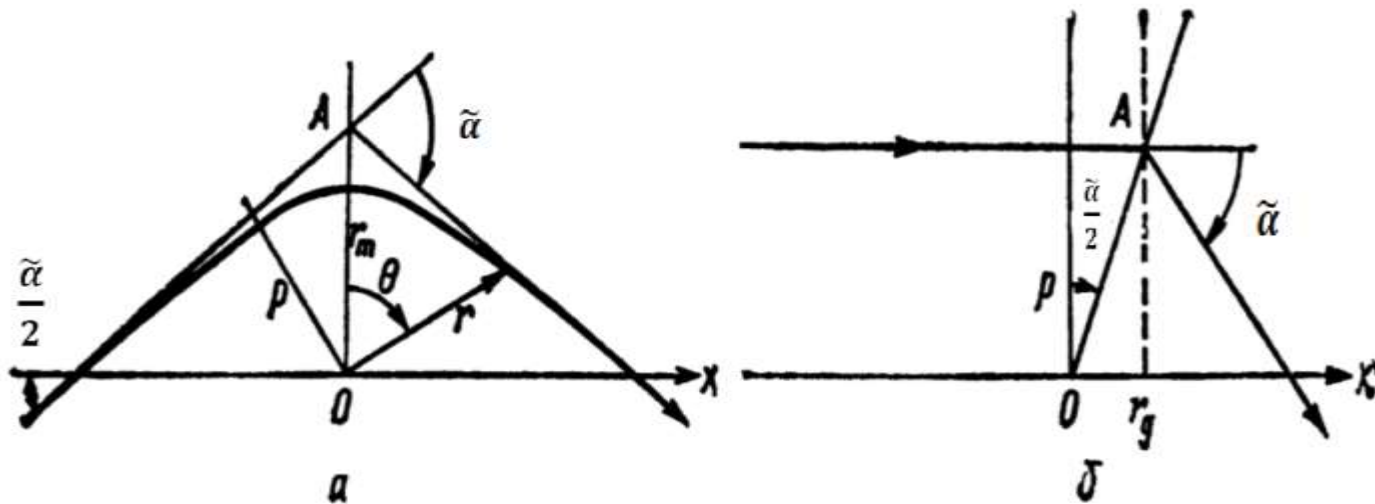
$$c_g = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} c = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad |\Phi| = \frac{GM}{r} \quad n_g \simeq 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

Правильное значение угла отклонения:

$$\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{pc^2}$$

Траектория луча



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{n_{gm} r_m} \left(\cos \theta + \frac{r_g}{n_{gm} r_m} \right)$$

Траектория луча – гипербола. Ее можно заменить на асимптоты, поскольку, пространство искажается в малой области.

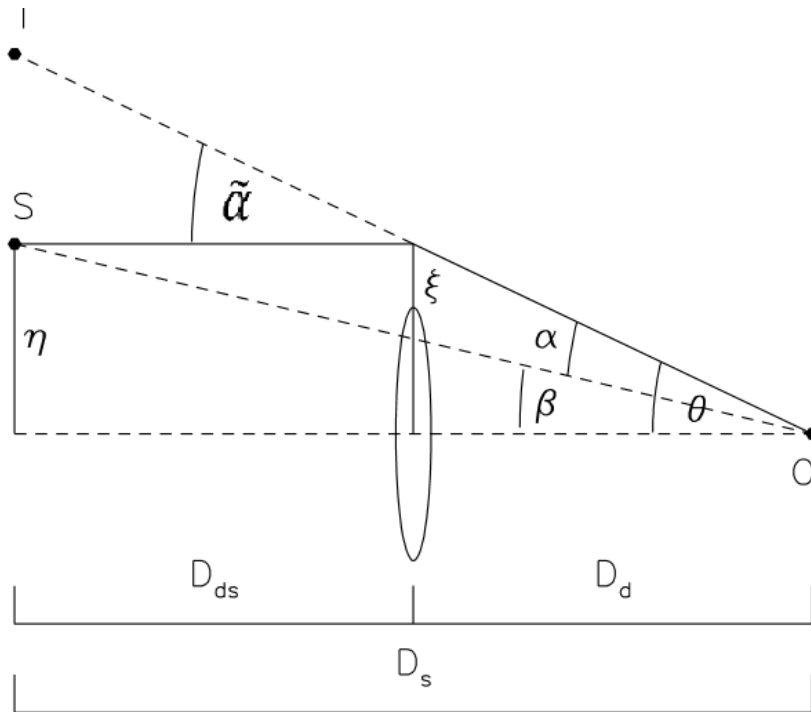
Приближение тонкой линзы

Расстояния между источником и линзой значительно больше, чем область, искаженная гравитационным полем.

$\Sigma = \int \rho(\vec{\xi}, x) dx$ Плотность проецируется на плоскость

$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2 \xi'$ Угол отклонения луча, полученный из принципа суперпозиции

Уравнение тонкой линзы



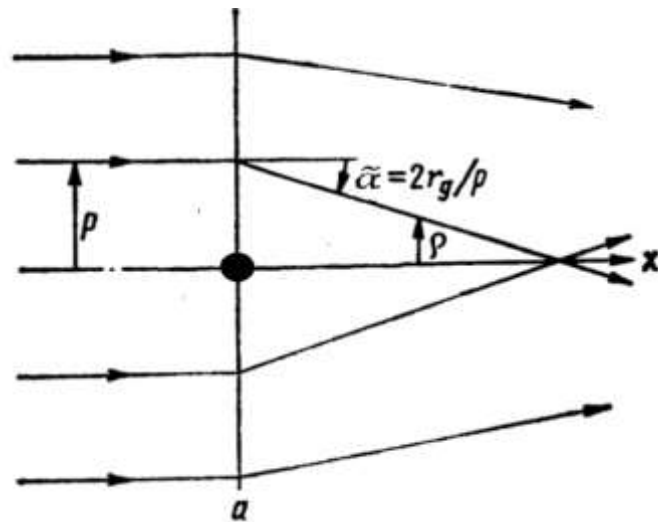
$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$

$$\vec{\alpha} = \frac{D_{ds}}{D_s} \vec{\tilde{\alpha}}$$

$$\alpha(\theta) = \frac{4G}{c^2} \frac{D_{ds}}{\xi} \frac{(\Sigma \pi \xi^2)}{D_s} = \frac{4\pi G \Sigma D_d D_{ds}}{c^2 D_s} \theta$$

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G D} \text{ критическая плотность}$$

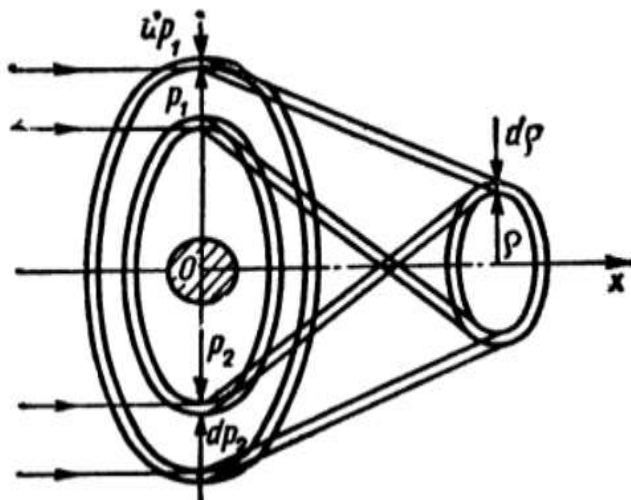
Аберрации и изображения



Аберрационное уравнение:

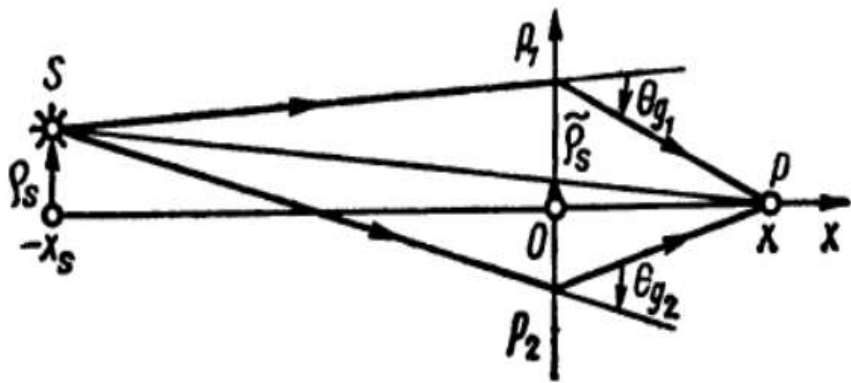
$$\rho(p, x) = p + x\theta_g(p) = p - \frac{2r_g x}{p^2} p$$

$$p_{1,2}(\rho) = p \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm \frac{2r_g x}{\rho^2}} \right)$$



Связь между входными и выходными и выходными апертурами в гравитационной линзе

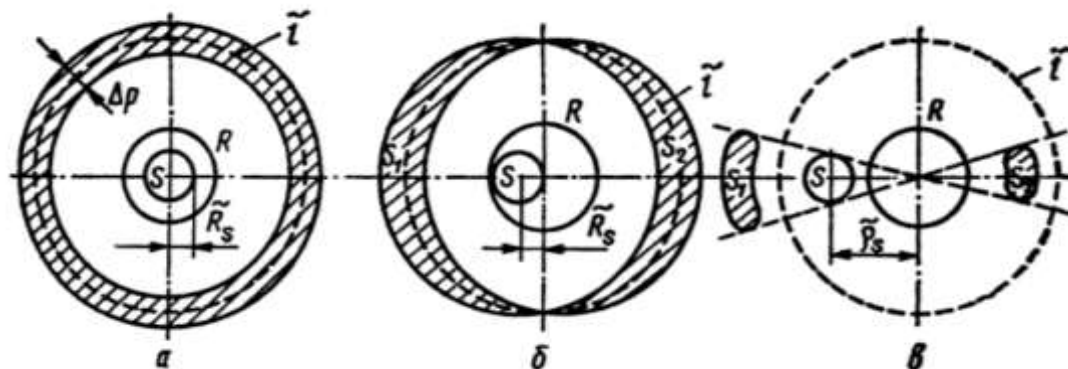
Аберрации и изображения



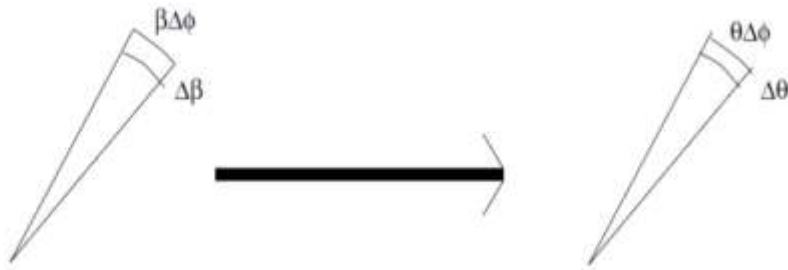
$$p_{1,2}(\rho) = \tilde{\rho}_s \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm \frac{\tilde{l}^2}{\rho_s^2}} \right)$$

$$\tilde{l} = \sqrt{\frac{4GMxx_s}{c^2(x+x_s)}}$$

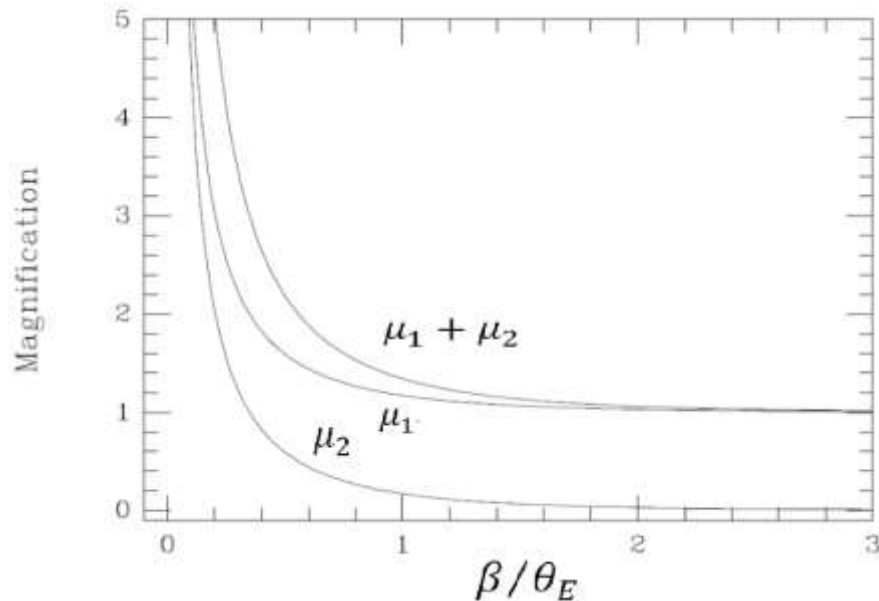
Радиус Эйнштейна



Увеличение и усиление изображения



$$\mu = \left| \frac{\theta \Delta \theta}{\beta \Delta \beta} \right| = \left| \frac{\theta d\theta}{\beta d\beta} \right|$$



$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \pm 2 \right)$$

$$q_{1,2}(x, p) = \frac{l}{2p} \frac{\frac{\rho^2}{2l^2} + 1}{\sqrt{\frac{\rho^2}{4l^2} + 1}} \pm \frac{1}{2}$$

Понятия скалярного потенциала, сдвига и сходимости

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{2}{c^2} \int \Phi(\xi(\vec{\theta}), x) dx \quad \text{Скалярный потенциал}$$

$$\vec{\nabla}_{\theta} \psi = D_d \vec{\nabla}_{\xi} \psi = \frac{D_{ds}}{D_s} \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_{\perp} \psi \Phi d = \vec{\alpha}$$

$$\Delta_{\theta} \psi = \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \frac{2}{c^2} \int \Delta_{\xi} \Phi dx = \frac{D_d D_{ds}}{D_s} \frac{2}{c^2} 4\pi G \Sigma = 2 \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} = 2\kappa(\vec{\theta})$$

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}} \quad \text{Сходимость}$$

Понятия скалярного потенциала, сдвига и сходимости

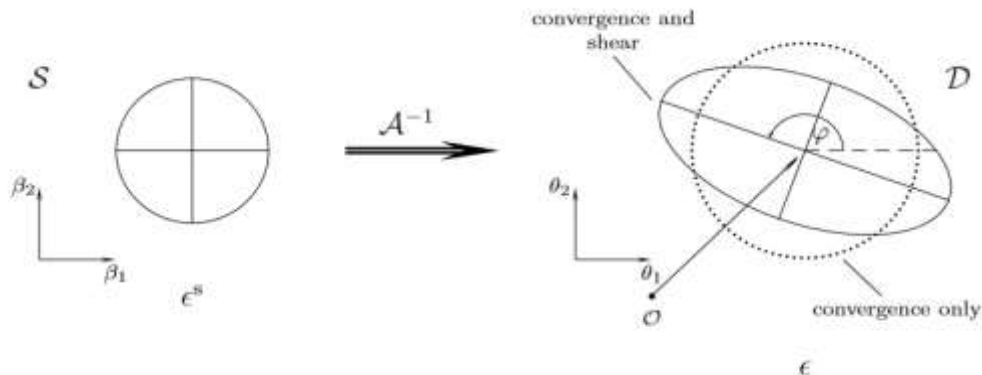
$$A \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \right) = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \psi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = M^{-1} \quad \text{Матрица Якоби}$$

$$\gamma_1(\vec{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \equiv \gamma(\vec{\theta}) \cos(2\varphi(\vec{\theta}))$$

Компоненты тензора
сдвига

$$\gamma_2(\vec{\theta}) = \psi_{12} = \psi_{21} \gamma(\vec{\theta}) \sin(2\varphi(\vec{\theta}))$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$



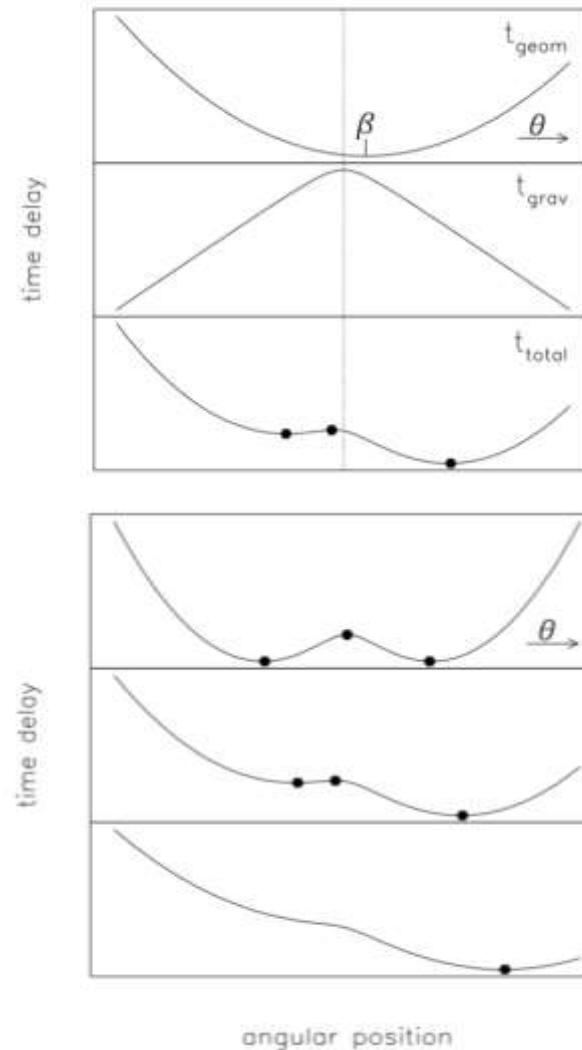
Временные задержки. Принцип Ферма.

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} t(\vec{\theta}) = 0 \quad \text{Принцип Ферма}$$

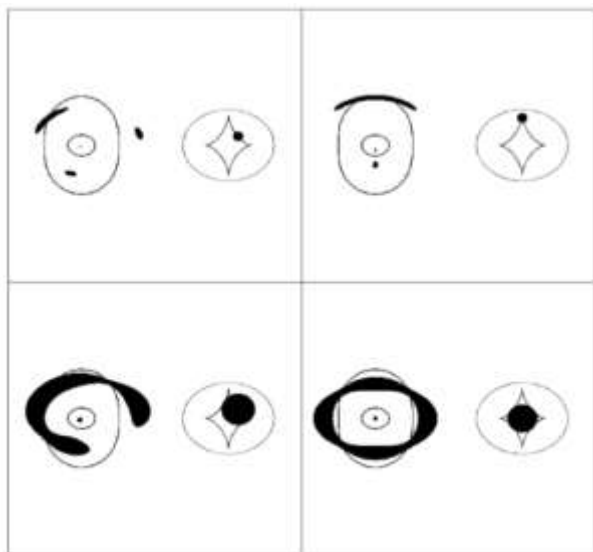
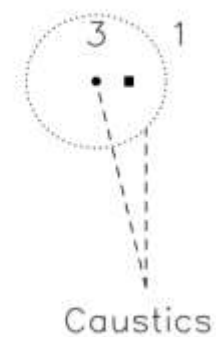
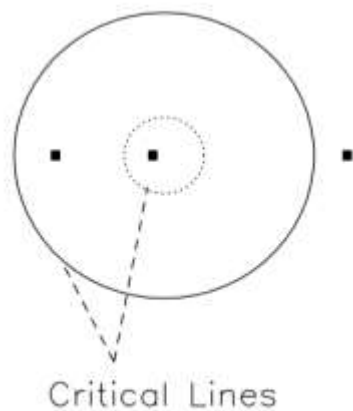
$$(\vec{\theta} - \vec{\beta}) - \vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \psi = 0$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{\theta}} \left(\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \psi(\vec{\theta}) \right) = 0$$

$$t(\vec{\theta}) = \frac{(1 + z_d) D_d D_{ds}}{c D_s} \left(\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \psi(\vec{\theta}) \right)$$



Каустики



Линии в θ – пространстве – критические;
Линии в β – пространстве – каустики

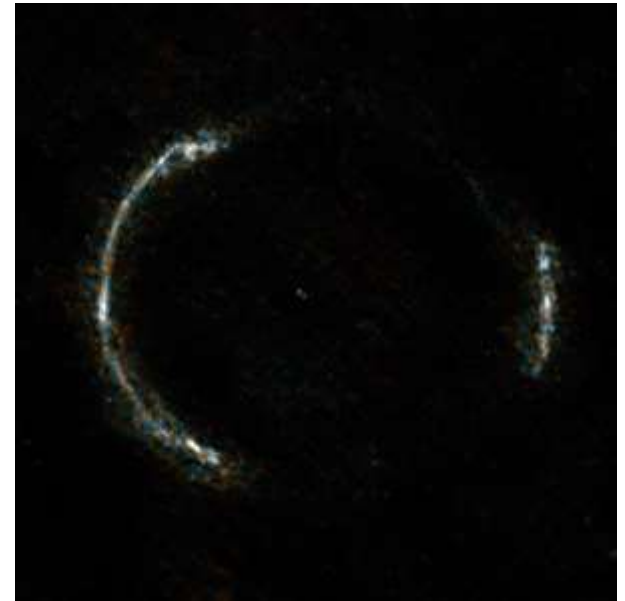
Сильное линзирование

$$M(\theta_{arc}) \approx \Sigma_{cr} \pi (D_d \theta_{arc})^2$$

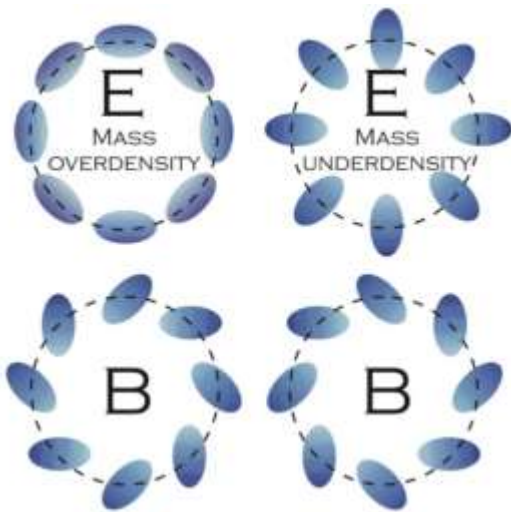
Оценка массы внутри
радиуса Эйнштейна

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} d^2l \hat{\kappa}(l) \exp(-i\mathbf{l}, \boldsymbol{\theta})$$

Для более точных вычислений
используется алгоритм Fast Fourier Transform



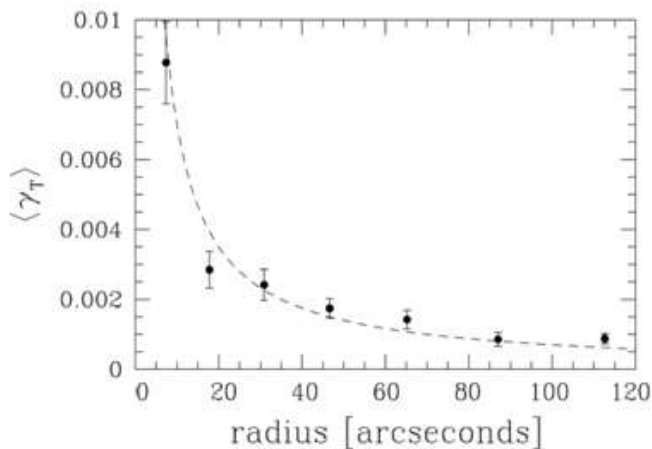
Слабое линзирование. Измерение эллиптичности и сдвига.



$$\epsilon = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\gamma}{1 - \kappa} \approx \gamma$$

$$\epsilon_i = \epsilon_i^{(s)} + \gamma_i = \epsilon^{(s)} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \epsilon \rangle \approx \langle \gamma \rangle$$



Алгоритм Кайзера-Сквайерса и метод конечного поля.

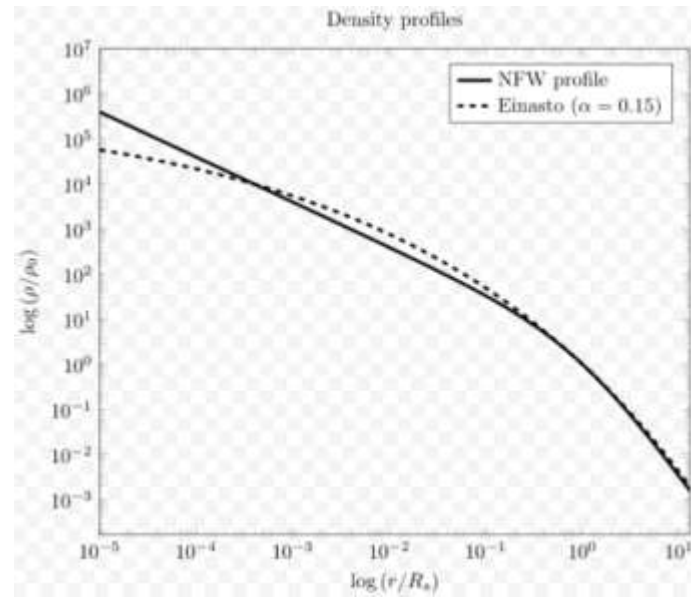
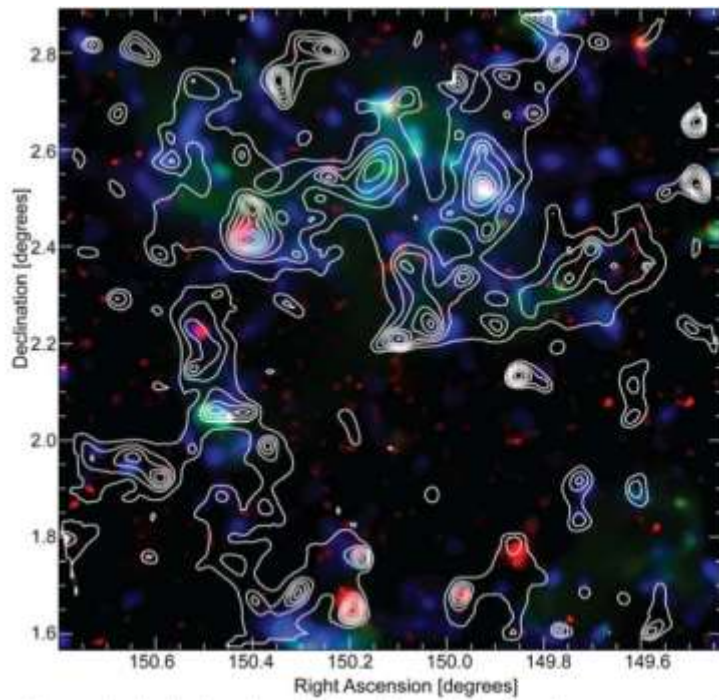
$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{R^2} d^2(\boldsymbol{\theta}') \operatorname{Re}[D^*(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \gamma(\boldsymbol{\theta}')]]$$

$$D(\theta) = \frac{(\theta_2^2 - \theta_1^2) - 2i\theta_1\theta_2}{\theta^4}$$

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma_{cr} \kappa(\boldsymbol{\theta})$$

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \kappa(\boldsymbol{\theta}_0) + \int_{\boldsymbol{\theta}_0}^{\boldsymbol{\theta}} d\boldsymbol{l} \nabla \kappa(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{l}))$$

Распределение плотности



Темная материя

Скопление Ссылка	M/L	Замечание
MS 1224 Фолман и др. (1994)	$800 h$	Вириальная масса в ~ 3 меньше ($\sigma_v = 770 \text{ км с}^{-1}$) (1994) точность восстановления $\sim 3'$
A 1689 Тайсон & Фишер (1995); Кайзер (1995)	$(400 \pm 60) h$	Вблизи центра распределение массы более гладко, чем распределение яркости; распределение массы более крутое, чем изотермическое от $(200 - 1000) h^{-1} \text{ кпк}$
Cl 1455 Смейл и др. (1995a)	$520 h$	Скрытое вещество в большей степени сконцентрировано, чем галактики
Cl 0016 Смейл и др. (1995a)	$740 h$	Скрытое вещество в большей степени сконцентрировано, чем галактики
A 2218 Сквайерс и др. (1996a)	$440 h$	Доля газа в массе $< 4\% h^{-3/2}$
A 851 Зайн и др. (1996)	$200 h$	Распределение массы согласовано с распределением галактик и рентгеновским излучением



Поиск темной материи

- Выбор области для сбора данных по интенсивности
- Измерение усредненной по ячейке эллиптичности
- Фитирование
- Применение алгоритма Кайзера-Сквайерса или метода конечного поля
- Создание и уточнение математической модели
- Фиксирование темной материи и оценка ее доли в наблюдаемой линзе

Спасибо за внимание!

