Задачи экзамена по курсу "Классические поля". Весна 2020г.

1. Рассмотрим модель двух комплексных скалярных полей φ_1 и φ_2 с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_1^* \partial_\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^* \partial_\mu \varphi_2 - \lambda(\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_2^* \varphi_2 - v^2)^2$$

   1) Найти группу глобальной симметрии этого лагранжиана (указание: ограничиться компактными группами).

   2) Найти множество классических вакуумов в модели. Найти ненарушенную подгруппу для каждого вакуума.

   3) Найти спектр малых возбуждений относительно каждого из вакуумов. Какие вакуумы являются физически эквивалентными, а какие — нет? Выполняется ли теорема Голдстоуна? Совпадает ли количество безмассовых возбуждений с количеством ненарушенных генераторов? Почему?

   4) Введя соответсвующие калибровочные поля, построить теорию, в которой найденная в п. 1 группа симметрии была бы калибровочной. Найти спектр малых возбуждений относительно каждого из вакуумов в полученной калибровочной теории. Остаются ли в спектре безмассовые скалярные возбуждения?

2. Рассмотрим модель с калибровочной группой $SU(2)$ и триплетом действительных скалярных полей φ^a (Джорджи, Глэшоу, 1972). Пусть g — калибровочная константа связи, а потенциал скалярных полей имеет вид

$$V = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^a \varphi^a + \frac{\lambda}{4}(\varphi^a \varphi^a)^2 \; .$$

   1) Найти основное состояние и остаточную (ненарушенную) калибровочную группу.

   2) Найти спектр всех малых возмущений относительно основного состояния, расклассифицировать это возмущения по отношению к ненарушенной калибровочной группе.

3. Показать, что для ковариантной производной справедливы формулы дифференцирования произведения функций и сложной функции (считать, что функции являются величинами, преобразующимися по некоторым, вообще говоря, разным, представлениям калибровочной группы). Показать, что ток, фигурирующий в уравнениях движения, ковариантно сохраняется.

4. Теория с произвольной компактной калибровочной группой G и скаляром φ в некотором представлении инвариантна, в частности, относительно глобальных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1}, \\ \varphi &\mapsto \varphi' = T(\omega)\varphi \; , \end{aligned}$$

   где $\omega \in G$ не зависит от x. Найти нетеровский ток, соответствующий этим преобразованиям. Совпадает ли он с током j^a_μ, фигурирующим в уравнении поля? Ковариантен ли нетеровский ток относительно калибровочных преобразований? Равен ли нетеровский ток нулю в отсутствие полей материи? Записать соответствующее уравнение поля через нетеровский ток и тензор $F^a_{\mu\nu}$.

5. Найти тензор энергии-импульса в теории Янга-Миллса варьированием по метрике. Совпадает ли он с нетеровским?

6. Найти взаимодействие калибровочных бозонов Стандартной модели друг с другом и с хиггсовским бозоном. Показать, что эти взаимодействия инвариантны относительно калибровочных преобразований из $U_{em}(1)$. Найти полный угловой момент в теории заряженного векторного поля. Чему равен заряд и магнитный момент W-бозона?

7. Гравитация тоже является калибровочной теорией. Изучим малые отклонения метрики от метрики Минковского. Как выглядит действие Эйнштейна-Гильберта в квадратичном приближении по этим возмущениям? Как выглядит тензор углового момента и его спиновая часть для этого квадратичного действия? Изучить решения в виде плоских волн. Для этого надо провести классификацию возмущений при наличии выделенного направления движения волны. Каково число независимых степеней свободы? Как оно изменится, если в исходный лагранжиан добавить слагаемое вида $\sqrt{-g}R^2$?

8. Конденсат комплексного скалярного поля – это однородное решение в ящике с периодическими граничными условиями и ненулевым глобальным $U(1)$-зарядом в нелинейной теории с потенциалом $V(\Phi^*\Phi)$. Как выглядит тензор энергии-импульса на этом решении? Можно ли сопоставить его соответствующему тензору для идеальной жидкости? Каким будет уравнение состояния в зависимости от скалярного потенциала? Для потенциала $V(\Phi^*\Phi) = M^2(\Phi^*\Phi) - \lambda(\Phi^*\Phi)^2$ проделать явные вычисления в $(1+1)$ и $(3+1)$ измерениях.

9. Рассмотрим нерелятивистскую теорию скалярного поля Φ с потенциалом $V(\Phi^*\Phi) = -\lambda(\Phi^*\Phi)^2$ и массой M.

   1) Устойчив ли вакуум $\Phi = 0$? Как выглядит энергия H?

   2) Показать, что глобальная $U(1)$-инвариантность приводит к сохранению $N = \int dx(\Phi^*\Phi)$

   3) Найти стационарные солитонные решения вида $\Phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(x)$ с вакуумными граничными условиями.

   4) Найти зависимость для нерелятивистской энергии $H(N)$ на солитонах. Нарисовать соответствующий график.

   5) Обобщить результаты на релятивистскую ((1 + 1)-мерную теорию с ненулевой массой M. Построить зависимость $E(Q)$ для солитонов, где E и Q есть энергия и заряд решений.

10. Рассмотрим теорию одного действительного векторного поля в трехмерном пространстве-времени, $\mu = 0, 1, 2$. Выберем действие в виде

$$S = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) ,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon^{012} = 1$, g — действительная постоянная, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

   1) Найти размерность константы g.

2) Показать, что действие инвариантно относительно убывающих на бесконечности калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

($\alpha(x)$ достаточно быстро убывает при $x \to \infty$).

3) Найти уравнения поля и показать, что они калибровочно инвариантны.

4) Найти спектр физических возбуждений поля (т. е. таких, которые не уничтожаются калибровочными преобразованиями). В частности, найти количество физических степеней свободы, структуру поля в этих модах и зависимость частоты ω от волнового вектора $\mathbf{k}$.

5) Слагаемое $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$ называют лагранжианом Черна-Саймонса. Обобщить это выражение на случай неабелевых калибровочных полей так, чтобы неабелев лагранжиан Черна-Саймонса содержал не более одной производной и был инвариантен, с точностью до полной производной, относительно неабелевых калибровочных преобразований.

11. Рассмотрим следующую модификацию теории действительного векторного поля:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4M^2} F_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho F^{\mu\nu} \right) ,$$

1) Найти закон дисперсии и явный вид решений для такой (квадратичной по полям) модели.

2) Найти вид энергии в калибровочно-инвариантных терминах. Может ли она принимать отрицательные значения?

12. Рассмотрим теорию действительного массивного скалярного поля ϕ в периодическом ящике объема V.

1) Проверить, что конфигурация вида $\phi = A \cos mt$ является решением уравнений движения. Найти давление и плотность на данном решении.

2) Добавим малые (по какому параметру?) взаимодействия вида

$$S = \int d^4x \left(-\frac{\alpha\phi}{4\Lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\beta\phi}{4\Lambda} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) ,$$

где α, β безразмерны. Какова размерность Λ?

3) Как теперь выглядит тензор энергии-импульса?

13. В $(1+1)$-мерной теории действительного поля ϕ с потенциалом $V = m^2 \cos\phi$ найти множество вакуумов. Чему равна масса элементарных возбуждений над ними?.

1) Найти кинки и антикинки, интерполирующие между соседними (что это означает?) вакуумами. Могут ли существовать статические решения, которые интерполируют между "несоседними"вакуумами?

2) Рассмотрим статическую конфигурацию вида кинк-антикинк с солитонами, разделенными расстоянием $R >> 1$. Удовлетворяет ли она уравнениям движения? Чему равна энергия взаимодействия? Какой вывод из полученных результатов можно сделать о динамике этой полевой конфигурации?

3) Притягиваются или отталкиваются соседние кинки?

14. Рассмотрим аксионное поле ϕ с действием

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2\phi^2}{2} - \frac{\alpha\phi}{4\Lambda}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\beta\phi}{4\Lambda}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \right) ,$$

где α, β безразмерны. Какова размерность Λ?

1) Найти решение для точечных источников поля ϕ в свободной теории ($\alpha = \beta = 0$). Какова будет энергия взаимодействия двух источников, разделенных расстоянием $R >> \frac{1}{m}$?

2) К каким эффектам (притяжение или отталкивание) для точечных источников приводят дополнительные взаимодействия?

15. Рассмотрим в (3+1) измерениях теорию с лагранжианом

$$Ł = Ł_0 + Ł_1,$$

где

$$Ł_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{32\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F_{\mu\nu}} + \bar{\psi}i\gamma_\mu D_\mu\psi - M\bar{\psi}e^{i\gamma_5\theta}\psi + \frac{v^2}{2}\left(\partial_\mu\theta\right)^2 ,$$

$$Ł_1 = -v^2m^2(1 - \cos\theta),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_n u A_\mu$, $\tilde{F_{\mu\nu}} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$, A_μ – электромагнитное поле, ψ – фермионное поле, θ – скалярное поле.

1) Найти глобальные симметрии теории, а также глобальные симметрии теории с лагранжианом $Ł_0$.

2) Выписать уравнения движения.

3) Найти множество вакуумов и провести их топологическую классификацию. Показать, что в теории имеются классические решения в виде доменных стенок. Найти доменную стенку в явном виде.

4)Изучить моды фермионного поля ψ во внешнем поле доменной стенки. Исследовать вопрос о локализации фермионных состояний на стенке. В тонкостенном пределе найти локализованные моды и написать для них эффективный (2+1)-мерный лагранжиан.

16. Рассмотрим четырехмерную теорию двух абелевых векторных полей A_μ и B_μ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - m^2B_\mu^2,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Рассмотрим эксперимент, состоящий из источника и приемника фотонов, разделенных расстоянием $2L$. Посередине между источником и приемником установлена тонкая светонепроницаемая стенка. Источник испускает в направлении на приемник j фотонов в секунду (пучок света не поляризован). Найти скорость регистрации j_1 фотонов приемником, если вся система помещена в светонепроницаемый ящик. Рассмотреть случаи: (а) в ящике вакуум; (б) в ящике жидкость с показателем преломления n; (в) в ящике плазма с плотностью электронов n_e. Указание: в такой плазме функции отклика фотонов задаются соотношениями $\pi_\pm = \omega_p^2$, $\pi_L = \omega_p^2 - \mathbf{k}^2$, где плазменная частота $\omega_p = 4\pi\alpha n_e/m_e$, m_e – масса электрона, α – постоянная тонкой структуры. Параметр смешивания $\chi \ll 1$, частота излучаемых фотонов $\omega \gg m$. Поле B_μ с веществом не взаимодействует.

17. Рассмотрим в (3+1) измерениях теорию комплексного скалярного поля ϕ с потенциалом $V(\phi)$, допускающим существование Q-шаров:

$$V(\phi) = v^2 M^2 \quad \text{при } |\phi| \to \infty,$$

$$V(\phi) = M^2 |\phi|^2 \quad \text{при } |\phi| \to 0.$$

Пусть поле ϕ взаимодействует с абелевым калибровочным полем (электромагнитным), заряд поля e.

1) Для произвольного заряда e доказать соотношение

$$dE/d\omega = \omega dQ/d\omega,$$

где E – энергия солитона, Q – его заряд, а ω – параметр в анзаце, $\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} F(r)$.

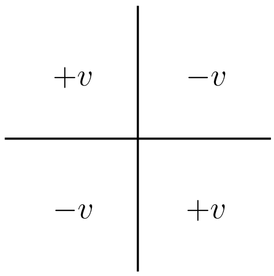
2) Найти зависимость $E(Q)$ при $e = 0$ и построить соответствующий график.

3) Используя теорию возмущений, найти первую нетривиальную поправку при малом e. Оценить изменение в $E(Q)$. Как полученный результат соотносится с кулоновским отталкиванием. Работает ли теория возмущений при больших зарядах Q?

18. Рассмотрим модель одного действительного скалярного поля с потенциалом

$$V = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - v^2\right)^2 .$$

В (1+1)–мерном пространстве–времени в этой модели существует топологический солитон — кинк — устойчивое решение уравнений поля, зависящее только от x_1. В (2+1)–мерном пространстве–времени в той же модели существуют доменные стенки — решения с бесконечной энергией, имеющие профиль кинка вдоль оси x_1 и не зависящие от x_0, x_2. Стенка разделяет области (домены), в которых поле принимает различные вакуумные значения $\phi = \pm v$. Предположим, что создана конфигурация, отвечающая двум пересекающимся доменным стенкам, так что имеются четыре домена (см. рис.). Устойчиво ли такое пересечение?



19. Рассмотрим теорию с калибровочной группой $SU(5)$.

1) Подобрать представление скалярных полей и скалярный потенциал так, чтобы $SU(5)$ нарушилась до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, где $SU(3)$ и $SU(2)$ вложены в $SU(5)$ следующим образом

$$\left(\begin{array}{c|c} SU(3) & 0 \\ \hline 0 & SU(2) \end{array}\right)$$

а группа $U(1)$ диагональна в $SU(5)$.

2) Найти массы векторных бозонов и их представления относительно ненарушенной калибровочной группы.

3) Скалярное поле в каком представлении $SU(5)$ нужно добавить, чтобы обеспечить дальнейшее нарушение до $SU(3) \times U(1)$, причем так, что $SU(2) \times U(1)$ нарушается до $U(1)$ аналогично стандартной модели? Подобрать полный скалярный потенциал для нарушения $SU(5) \to SU(3) \times U(1)$.