Задачи коллоквиума, весна 2020.

1. Заряженная частица во внешнем поле.
Написать полное действие для заряженной точечной частицы и электромагнитного поля. Будем считать поле внешним, пренебрегая тем самым изменениями напряженности при движении частицы. Вычислить гамильтониан частицы и найти его производную по времени в системе наблюдателя.

2. Дилатационная симметрия.

1) Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля в 4-мерном пространстве-времени, описываемую действием

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4\right] .$$

Показать, что действие инвариантно относительно преобразований дилатации

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \alpha\varphi(\alpha x) ,$$

где α — действительный параметр. Найти соответствующий сохраняющийся ток. Подобрать тензор энергии-импульса $T^\mu{}_\nu$ так, чтобы след его был равен нулю на уравнениях поля, $T^\mu{}_\mu = 0$.

2) Найти аналог дилатационной симметрии в модели Лиувилля в двумерном пространстве-времени с действием

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - a\mathrm{e}^{b\varphi}\right] ,$$

где $\mu = 0, 1$; a, b — некоторые постоянные, φ — действительное скалярное поле.

3. Слабое явное нарушение симметрии и массы “псевдоголдстоуновских” бозонов.

Рассмотрим теорию двух действительных скалярных полей с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 ,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^1\partial^\mu\varphi^1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^2\partial^\mu\varphi^2 + \frac{\mu^2}{2}[(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2] - \frac{\lambda}{4}[(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2]^2$$

и

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon U(\varphi_1) ,$$

причем ε — малый параметр, U нетривиально зависит только от компоненты φ_1. Часть $\mathcal{L}_0$ полного лагранжиана инвариантна относительно глобальной $SO(2)$ симметрии.

1) Найти основное состояние, сохраняющийся ток и намбу-голдстоуновскую моду при $\varepsilon = 0$.

2) Найти легчайшую моду и ее массу при $\varepsilon \neq 0$ в главном порядке по ε (такую моду называют псевдоголдстоуновской).

3) Найти связь между четырехдивергенцией тока, построенного в п. 1), с псевдоголдстоуновской модой в низшем порядке по полям отклонений от основного состояния и в низшем нетривиальном порядке по ε.

4. Кинки с модифицированным кинетическим членом.
Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля в (1+1)-мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{\alpha}{4}\left(\partial_\mu\phi\right)^2\left(\partial_\nu\phi\right)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\lambda v^4\right)\left(\phi^2 - v^2\right)^2 , \quad \mu = 0, 1.$$

Показать, что в теории существуют решения типа кинка при любых α. Найти решение явно при $\alpha \to \infty$.

5. Взаимодействие с нестатическим источником.
Изучим взаимодействие комплексного скалярного поля ϕ в двумерной теории с внешним источником вида $J(t,x) = j(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, где функция $j(x)$ локализована в пространстве, а ω – размерный параметр. Рассмотрим действие

$$\int (\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2(\phi\phi^*) + J(t,x)\phi^* + J^*(t,x)\phi)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

с $U(1)$-инвариантным потенциалом V. На уравнениях движения глобальный заряд и полная энергия, возникающие в теории без внешнего источника, не сохраняются. Объясните причину нарушения соответствующих тождеств. Найдите сохраняющуюся линейную комбинацию. Найти энергию взаимодействия двух локализованных источников, расстояние между которыми равно d.

6. **Связь между угловым моментом и тензором энергии-импульса.**
Сделать доклад по работе 1812.06143.

7. **Магнитный момент.** Какое взаимодействие надо добавить в лагранжиан для описания взаимодействия магнитного момента $\bar{m}$ во внешнем магнитном поле $\bar{B}$?

1. Сохраняется ли при этом калибровочная симметрия и лоренц-инвариантность.

2. Как взаимодействуют две частицы с моментами $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$, расстояние между которыми равно d?

3. Как взаимодействуют две частицы, у одной из которых есть только заряд q, а у второй только момент $\bar{m}$, расстояние между которыми равно d?

8.

SUSY QM и классические решения. Обзор по работе 1703.00277.

9. Сдвиговая симметрия. Пусть лагранжиан действительного поля ϕ является произвольной функцией $X = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$,

$$\mathcal{L} = F(X).$$

Найти симметрии и вакуумы теории. Какие из этих вакуумов классически стабильны? Все ли возмущения над этими вакуумами имеют положительную энергию? Проиллюстрировать результаты на примере $F(X) = (X - X_0)^2$, где X_0 – параметр. Происходит ли спонтанное нарушение симметрии? Выполняется ли теорема Голдстоуна?

10. Нелинейные уравнения Максвелла.
а) Выпишите уравнения поля, следующие из эффективного лагражиана Эйлера-Гейзенберга. Запишите их в виде аналогичному уравнениям Максвелла в среде,

$$\mathrm{div}\vec{D} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \vec{D} = \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + \vec{M}. \tag{1}$$

Выпишите явные выражения для векторов "поляризации"и "магнетизации"$\vec{P}$, $\vec{M}$.
б) Получите волновое уравнение в нелинейной электродинамике. Является ли плоская волна по-прежнему решением волнового уравнения? Линейная комбинация плоских волн?

11. Векторное поле в нерелятивистском приближении.

Для свободного скалярного поля в нерелятивистском приближении получатся уравнение Шредингера. Обобщить лагранжиан на случай (комплексного) векторного поля Ψ_i, восстановив постоянную Планка. Найти сохраняющийся ток, момент импульса и угловой момент.