

# Задачи

18 декабря 2019 г.

- а) Покажите, что спиновые суммы для электронов на нулевом уровне Ландау (магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ ) выглядят как  $\rho(p) = ((p\gamma)_{\parallel} + m) \Pi_{-}$ , где  $\Pi_{-} = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2)$ , а  $(p\gamma)_{\parallel} = p_0\gamma_0 - p_3\gamma_3$ .  
б) Покажите что для двух поляризаций фотона  $\text{Tr} \left[ \rho(p') \varepsilon_{\mu}^{(o)} \gamma_{\mu} \rho(-p) \varepsilon_{\nu}^{(o)} \gamma_{\nu} \right] = 0$ ,  $\text{Tr} \left[ \rho(p') \varepsilon_{\mu}^{(e)} \gamma_{\mu} \rho(-p) \varepsilon_{\nu}^{(e)} \gamma_{\nu} \right] = 4m^2$ , где вектор поляризации  $(e)$ -моды направлен параллельно магнитному полю, а  $(o)$ -моды — перпендикулярно.
- Используя эффективный лагранжиан Эйлера-Гейзенберга, найдите дисперсионные соотношения для двух поляризаций фотона (частота фотона  $\omega \ll m_e$ ) во внешнем слабом электрическом поле. Считать, что фотон распространяется перпендикулярно полю.
- Используя эффективный лагранжиан Эйлера-Гейзенберга, найдите дисперсионные соотношения для двух поляризаций фотона (частота фотона  $\omega \ll m_e$ ) во внешнем слабом магнитном поле. Считать, что фотон распространяется перпендикулярно полю.
- Нелинейные уравнения Максвелла.**  
а) Выпишите уравнения поля, следующие из эффективного лагранжиана Эйлера-Гейзенберга. Запишите их в виде аналогичному уравнениям Максвелла в среде,

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{B} = \vec{H} + \vec{M}. \quad (1)$$

Выпишите явные выражения для векторов "поляризации" и "магнетизации"  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$ .

- б) Получите волновое уравнение в нелинейной электродинамике. Является ли плоская волна по-прежнему решением волнового уравнения? Линейная комбинация плоских волн?
- Найдите инстантон, описывающий рождение электрон-позитронной пары в перпендикулярно направленном электрическом и магнитном полях  $E$  и  $B$  ( $E < B$ ). Вычислите классическое действие на инстантоне, напишите экспоненту подавления процесса. Что происходит при  $B \rightarrow E$ ?