

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Аксионные струны

Выполнил студент

214 группы

Ковязин Н.А.

Научный руководитель:

с.н.с. ОТФ ИЯИ РАН,

кандидат физ.-мат. наук Левков Д.Г.

Москва, 2019 г.

Содержание

1	Введение	3
2	Струны в модели Печии–Квинн	3
3	Струны в криволинейных координатах	6
4	Модифицирование модели	8
5	Заключение	9
6	Список литературы	10

1 Введение

В настоящее время существует модель, где в качестве темной материи рассматриваются аксионы–кванты поля Печчеи–Квинн. Но в данной модели существуют солитоноподобные решения–аксионные космические струны, характерная толщина которых с реалистичными значениями $\sim \frac{1}{\sqrt{\lambda v}}$ очень мала [1]. Вычисление с данными значениями не представляется возможным. Для избежания этой проблемы теорию следует промодифицировать таким образом, чтобы толщина аксионных струн увеличилась, а погонная масса осталась прежней. В данной работе представлено описание аксионных струн, а также произведена модификация.

2 Струны в модели Печчеи–Квинн

Рассмотрим модель Печчеи–Квинн. В данной модели имеется комплексное скалярное поле φ . А лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - V(|\varphi|) \quad (1)$$

где потенциал $V(|\varphi|) = \frac{\lambda}{2}(\varphi^* \varphi - v^2)$. Про варьируем действие S и получим уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$S = \int d^4x [\partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^* \varphi - v^2)]$$
$$\begin{cases} \partial_\mu \partial_\mu \varphi^* - \lambda \varphi^* (\varphi^* \varphi - v^2) = 0 \\ \partial_\mu \partial_\mu \varphi - \lambda \varphi (\varphi^* \varphi - v^2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Нам нужно найти конфигурацию поля соответствующую статической солитонной струне, протяженной вдоль пространственного измерения x_3 . Сперва потребуем конечность линейной плотности энергии $E = \frac{W}{x_3}$

$$E = \int d^2x [\partial_i \varphi^* \partial_i \varphi + V(|\phi|)] \quad (3)$$

Для этого необходимо чтобы $V(|\varphi|) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ т.е. $|\varphi| \rightarrow v$ при $|x| \rightarrow \infty$. Зафиксируем окружность радиуса R с центром в начале координат. Тогда при большом R модуль поля будет равен v , а значит поле на окружности будет иметь вид $\varphi = v e^{if(\theta)}$, где θ – полярный угол. Эта функция представляет собой отображение окружности радиуса R в окружность радиуса v в комплексной плоскости. при $|x| \rightarrow \infty$

$$\varphi(\theta = 0) = \varphi(\theta = 2\pi)$$

$$\begin{aligned}
e^{if(0)} &= e^{if(2\pi)} \\
e^{i(f(0)-f(2\pi))} &= e^{i2\pi n} \\
n &= \frac{f(0) - f(2\pi)}{2\pi}
\end{aligned}$$

число n является целым и называется числом намотываний. Это число является интегралом движения и описывает конфигурацию поля. Число намотываний не может измениться при гладкой эволюции полей, не затрагивающей поля на пространственной бесконечности. Таким образом множество всех полей можно разбить на непересекающиеся классы (сектора), характеризуемые числом n . Выберем сектор с $n=1$. Перейдем к цилиндрическим координатам. Общий вид поля будет $\varphi = F(r)e^{i\theta}$. Подставив это выражение в уравнение поля(2), получим

$$\partial_\mu \partial_\mu F(r) e^{-i\theta} - \lambda F e^{-i\theta} (F^2 - v^2) = 0$$

т.к. решение статическое, то $\partial_0 \varphi = 0$

$$-\Delta F(r) e^{-i\theta} - \lambda F e^{-i\theta} (F^2 - v^2) = 0$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \Theta^2} \\
F'' e^{-i\theta} + \frac{F' e^{-i\theta}}{r} + \frac{(-1)^2 i^2 F e^{-i\theta}}{r^2} - \lambda F e^{-i\theta} (F^2 - v^2) &= 0 \\
F'' + \frac{F'}{r} - \frac{F}{r^2} - \lambda F (F^2 - v^2) &= 0 \tag{4}
\end{aligned}$$

Данное дифференциальное уравнение невозможно решить аналитически. Итак, $F \rightarrow v$ при $r \rightarrow \infty$. а при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{cases}
\varphi_1(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} F(r) e^{i\theta_1} \\
\varphi_2(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} F(r) e^{i\theta_2}
\end{cases}$$

$$\varphi_1(r=0) = \varphi_2(r=0)$$

$$e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \lim_{r \rightarrow 0} F(r) = 0 \Rightarrow F \rightarrow 0, r \rightarrow 0$$

Найдем асимптотику. В силу регулярности решения при $r \rightarrow 0$: $F_1(r) = C_1 r + C_2 r^3 + C_3 r^5 + o(r^5)$ При $r \rightarrow \infty$ $F \rightarrow v$ значит F можно представить как $F = v + p$ при большом r . подставим это в уравнение движения(4):

$$(v+p)'' - \frac{(p+v)}{r^2} + \frac{(p+v)'}{r} - \lambda F (F^2 - v^2) = 0$$

тогда $p = -C_0 r^{-2}$ и $F_2 = v + C_0 r^{-2}$

Для упрощения вычислений приведем уравнение движения к виду с безразмерными коэффициентами с помощью замены $\tilde{r} = r\sqrt{\lambda}v$ $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{v}$ тогда приведенное уравнение движения будет иметь вид

$$F'' + \frac{F'}{\tilde{r}} - \frac{F}{\tilde{r}^2} - F(F^2 - 1) = 0 \quad (5)$$

запишем в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -\frac{y_1}{r} + \frac{y_0}{r^2} + y_0(y_0^2 - 1) \end{cases}$$

С начальными условиями

$$\begin{cases} y_0(0) = 0 \\ y_1(0) = C_1 \end{cases}$$

Решение находим численно с помощью метода пристрелки и метода Булирша–Штёра[3]. неизвестный параметр C_1 подбирается таким образом, чтобы F имела нужную асимптотику на бесконечности.

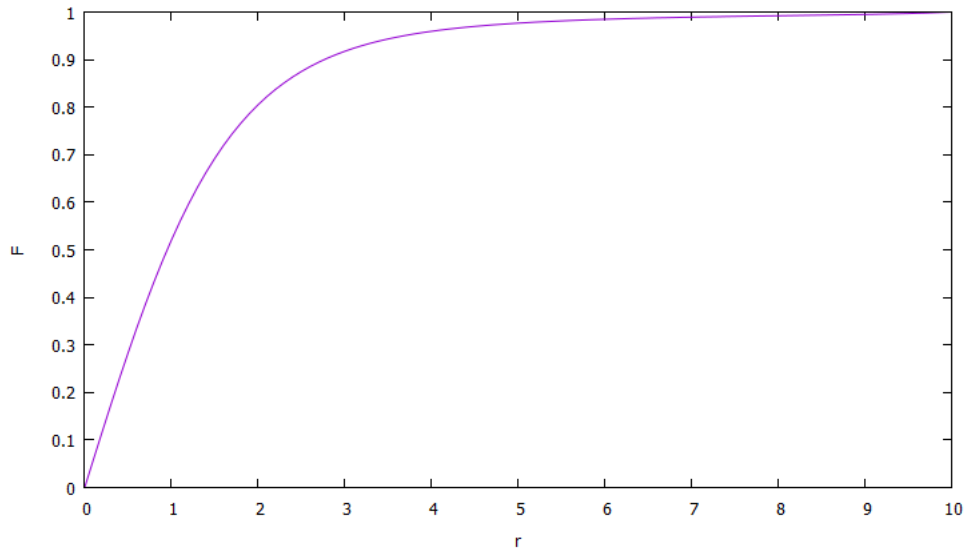


Рис. 1: Профиль струны в модели Печчеи–Квинн

Энергия(3) в цилиндрических координатах будет иметь вид

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} dr \left(r[(F')^2 + \frac{F^2}{r^2} + \frac{\lambda}{2}(F^2 - v^2)^2] \right)$$

А в приведенном виде $\tilde{E} = \frac{E}{v^2}$

$$\tilde{E} = 2\pi \int_0^{\infty} d\tilde{r} \left(\tilde{r} [(F')^2 + \frac{F^2}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{2}(F^2 - 1)^2] \right) \quad (6)$$

Как можно заметить (6) является несобственным интегралом первого рода и расходится. Поэтому мы возьмем величину L(размер "бокса") в качестве верхнего предела интегрирования. Физически этот размер может играть роль расстояния до соседней струны.

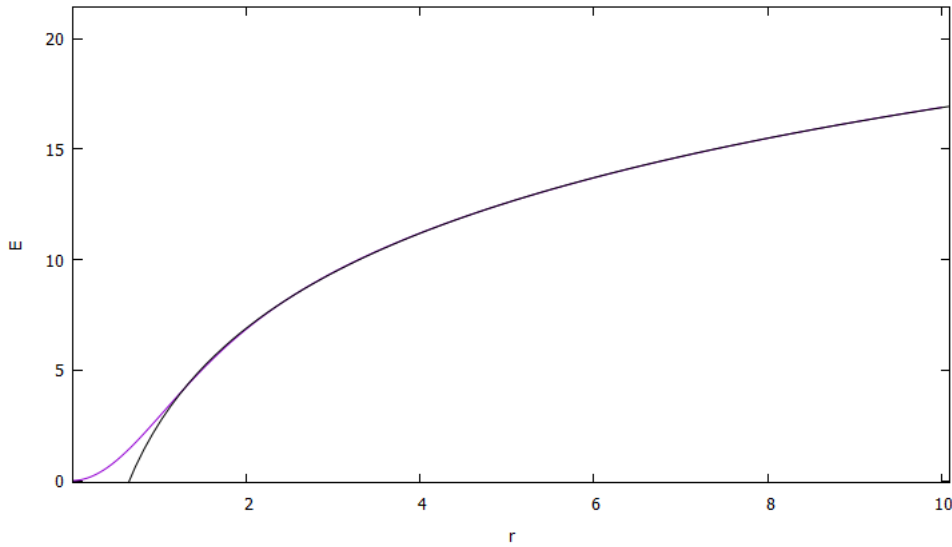


Рис. 2: Линейная плотность энергии аксионной струны

3 Струны в криволинейных координатах

Функцию перехода к криволинейным координатам $\bar{r} = g(\tilde{r})$ является взаимнооднозначным отображением, поэтому для нее существует обратная $\tilde{r} = g^{-1}(\bar{r}) = G(\bar{r})$. Запишем выражения для линейной плотности энергии в этих криволинейных координатах:

$$\tilde{E} = 2\pi \int_0^{\infty} d\bar{r} \left(\bar{r} \left[\frac{G(\bar{r})}{\bar{r}G'(\bar{r})} (F')^2 + \frac{G'(\bar{r})}{\bar{r}G(\bar{r})} F^2 + \frac{G(\bar{r})G'(\bar{r})}{\bar{r}} \frac{(F^2 - 1)^2}{2} \right] \right) \quad (7)$$

Теперь Проварьируем (7) по F и получим уравнение движения в координатах, заданных функцией $\bar{r} = g(\tilde{r})$:

$$\alpha(\bar{r})F'' + \alpha'(\bar{r})F' - \frac{G'(\bar{r})}{G(\bar{r})} - G'(\bar{r})G(\bar{r})F(F^2 - 1) = 0 \quad (8)$$

где $\alpha(\bar{r}) = \frac{G(\bar{r})}{G'(\bar{r})}$

Подберем криволинейные координаты таким образом, чтобы при больших $\tilde{r}g(\tilde{r}) \rightarrow \bar{r}$ а в окрестности нуля осуществляла растяжение в A раз. Так как в (1) есть только обратные функции $G(\bar{r})$. Обратная функция также стремится к \tilde{r} при больших \bar{r} , а в окрестности нуля осуществляет сжатие. Зададим производную это функции в виде

$$G'(x) = \frac{B - A}{\exp(a(x - d)) + 1} + A + \frac{1 - A}{\exp(-a(x - b)) + 1}$$

Потребуем, чтобы при больших x: $\int_0^x (G'(\xi)d\xi) = x$, а в точке $x = 0$:

$G(0) = 0$ тогда функция $G(x)$ будет иметь вид:

$$G(x) = (B - A + 1)x + \ln \frac{(\exp(-a(x - b)) + 1)^{\frac{1-A}{a}}}{(\exp(a(x - d)) + 1)^{\frac{B-A}{a}}} - \ln \frac{(\exp(ab) + 1)^{\frac{1-A}{a}}}{(\exp(-ad) + 1)^{\frac{B-A}{a}}}$$

Зафиксировав параметры $a = 5; b = 6; A = 5; d = 5$, выразим параметр B. Подставим полученную функцию в уравнение (8) и решим численно, подобно тому как это было сделано в прошлом параграфе. Заметим, что теперь характерный размер кора струны увеличился(рис.3), при неизменной погонной массе(рис.4). Именно такого эффекта нужно достигнуть в модифицированной модели

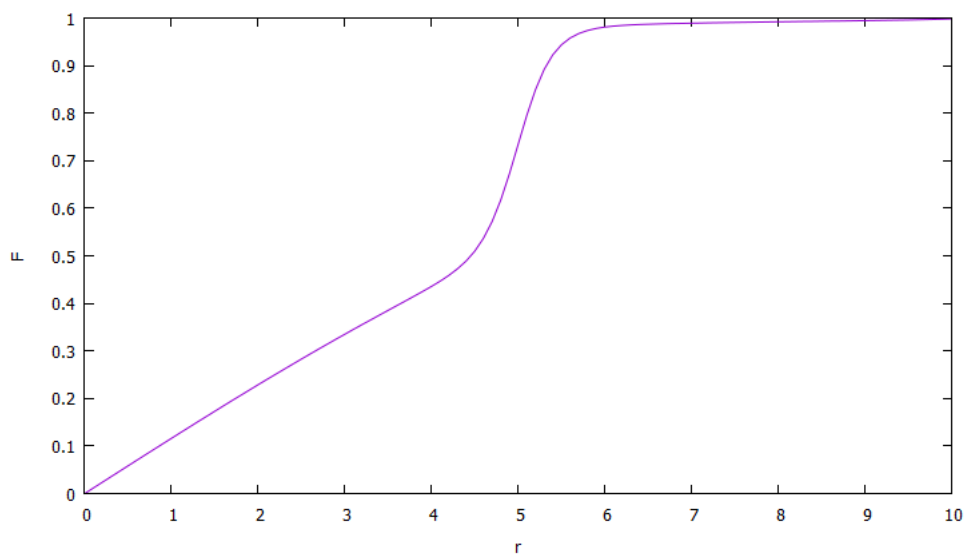


Рис. 3: Профиль аксионной струны в криволинейных координатах

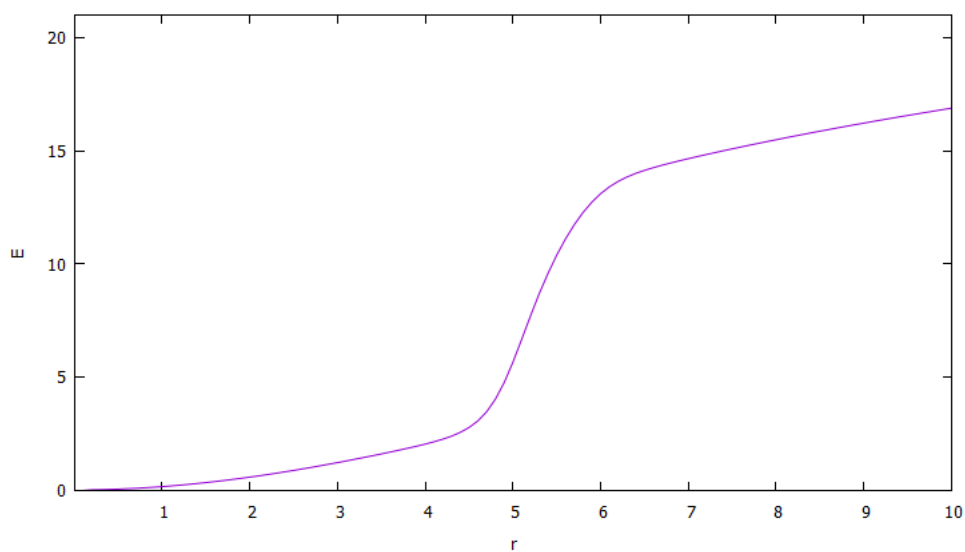


Рис. 4: Линейная плотность энергии струны в криволинейных координатах

4 Модифицирование модели

Теперь следует промодифицировать модель таким образом, чтобы

5 Заключение

В работе были получены следующие результаты:

- Был получен профиль струны в модели Печчеи–Квин
- Был получен профиль аксионной струны в криволинейных координатах
-

6 Список литературы

[1] A. Vaquero, J. Redondo and J. Stadler, Early seeds of of axion miniclusters, arXiv:1809.09241

[2] В.А.Рубаков, Классические калибровочные поля. М., УРСС, 2005

[3] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing". Third edition, C++