

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

« \mathcal{R} -МАТРИЦЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ ГРУПП»

Выполнила студентка
243м группы
Бишлер Людмила Владимировна

подпись студента

Научный руководитель:
академик РАН, д.ф.–м.н.
Рубаков Валерий Анатольевич

подпись научного руководителя

Научный консультант:
к.ф.–м.н.
Морозов Андрей Алексеевич

подпись научного консультанта

Допущен к защите
Зав. кафедрой

подпись зав.кафедрой

Москва, 2019

Содержание

Введение	2
Результаты	4
1 Квантовые группы и их представления	5
1.1 Универсальная обертывающая алгебра	5
1.2 Квантованная универсальная обертывающая алгебра	6
1.2.1 Квантованная универсальная обертывающая алгебра $su(3)$. . .	6
1.3 Конечномерные неприводимые представления $U_q(su(N))$	7
2 Универсальная квантовая \mathcal{R}-матрица	7
2.1 Собственные значения \mathcal{R} -матрицы	9
3 Узлы-мутанты	10
3.1 Вычисление полиномов узлов-мутантов в представлении $[4, 2] U_q(su(3))$	11
3.1.1 $(1, 3, 3, -3, -3)$ и $(1, 3, -3, 3, -3)$	12
3.1.2 $(3, 3, 3, -3, -3)$ и $(3, 3, -3, 3, -3)$	15
4 \mathcal{R}-матрицы в трехнитевых косах	18
4.1 Гипотеза о собственных значениях и ее обобщение	19
4.2 Доказательство первой гипотезы	22
4.3 Преобразование матриц	24
4.4 Представление $[2, 1]$	26
4.4.1 $[5, 3, 1]$	26
4.4.2 $[4, 3, 2]$	27
4.5 Представление $[3, 1]$	28
4.5.1 $[4, 3, 2, 2, 1]$	29
4.5.2 $[4, 4, 2, 2]$	29
4.5.3 $[4, 3, 3, 1, 1]$	30
4.5.4 $[4, 4, 3, 1]$	30
4.6 Представление $[3, 2]$	31
4.6.1 $[4, 3, 3, 2, 2, 1]$	31
4.6.2 $[6, 4, 2, 1, 1, 1]$	32
4.7 Представление $[4, 1]$	33
4.7.1 $[5, 4, 3, 2, 1]$	34
4.7.2 $[5, 5, 3, 2]$	34
4.7.3 $[5, 4, 4, 1, 1]$	35
4.8 Представление $[4, 2]$	36
4.8.1 $[5, 4, 3, 3, 2, 1]$	36
4.8.2 $[5, 5, 3, 3, 1, 1]$	37
4.8.3 $[5, 4, 4, 2, 2, 1]$	37
4.8.4 $[11, 6, 1]$	38
Заключение	38

Введение

Теория Черна-Саймонса [1] — трехмерная топологическая квантовая теория поля с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ijk} \left(\delta_{ab} \mathcal{A}_i^a \partial_j \mathcal{A}_k^b + \frac{2}{3} \lambda_{abc} \mathcal{A}_i^a \mathcal{A}_j^b \mathcal{A}_k^c \right), \quad (1)$$

который не зависит от метрики, при этом k — целое.

Эта теория представляет особый интерес, потому что связана с другими теориями математической физики. Например, если рассматривать теорию Черна-Саймонса на многообразии с границей, то она переходит в двумерную модель Весса-Зумино-Виттена. Более того, действие Черна-Саймонса можно использовать при построении модифицированных теорий гравитации. В данной работе особое внимание уделено связи с теорией узлов.

Главный интерес в теории Черна-Саймонса представляют средние значения петель Вильсона, вычисленные по контурам в трехмерном пространстве:

$$\langle W_k \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int [D\mathcal{A}] \text{Tr}_{RP} \exp \left(\oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} dx \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[\mathcal{A}]}, \quad (2)$$

где \mathcal{Z} — статистическая сумма теории

$$\mathcal{Z} = \int [D\mathcal{A}] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[\mathcal{A}]}, \quad (3)$$

\mathcal{K} — контур (узел или зацепление), который вложен в трехмерное многообразие \mathcal{M} . Э.Виттен показал [2], что средние значения петель Вильсона в трехмерной теории Черна-Саймонса с полем \mathcal{A} , преобразующимся по калибровочной группе $SU(2)$, равны полиномиальным инвариантам — полиномам Джонса — из математической теории узлов. Это утверждение было обобщено на группу $SU(N)$ и полиномы Хосте-Окнеану-Милле-Фрейда-Ликориша-Йеттера-Пржтнцко-Трачука (ХОМФЛИ-ПТ) [3]. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ, как и теория Черна-Саймонса, связаны с другими теориями [4]-[8].

Узлом и зацеплением называются вложения соответственно одной или нескольких окружностей в трехмерную сферу.

В теории узлов полиномы ХОМФЛИ-ПТ определяются при помощи скейн-соотношений. Скейн-соотношения устанавливают связь между полиномами трех узлов/зацеплений. На плоской диаграмме выбирается некоторое направление, после чего выбирается пересечение. Три сравниваемых узла соответствуют замене данного пересечения на фрагменты

$$\mathcal{K} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \quad \mathcal{K}' \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \quad \mathcal{K}'' \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \quad \searrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \right)$$

Скейн-соотношения в этом случае гласят

$$AH^{\mathcal{K}}(A, q) - A^{-1}H^{\mathcal{K}'}(A, q) = (q - q^{-1})H^{\mathcal{K}''}(A, q). \quad (4)$$

Вместе с заданием полинома ХОМФЛИ-ПТ простейшего узла — неузла

$$H^0(A, q) = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (5)$$

скейн-соотношения позволяют однозначно определить полином ХОМФЛИ-ПТ любого узла и зацепления. Средние значения петель Вильсона совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ, если в полиноме сделать замену:

$$q = \exp\left(\frac{k+N}{4\pi}\right), \quad (6)$$

$$A = q^N,$$

где k — константа связи теории Черна-Саймонса (1), N определяется калибровочной группой $SU(N)$.

С физической точки зрения для вычисления вильсоновских средних каждому пересечению на двумерной диаграмме ставится в соответствие оператор — \mathcal{R} -матрица. \mathcal{R} -матрица является одним из ключевых элементов при вычислении полиномов узлов в методе Решетихина-Тураева [9]. Можно показать, что полином узла можно представить как произведение \mathcal{R} -матриц, соответствующих пересечениям на диаграмме узла. Если калибровочная теория связана с группой $SU(N)$, соответствующая ей \mathcal{R} -матрица связана с группой $SU_q(N)$.

\mathcal{R} -матрица определяется как решение уравнения Янга-Бакстера:

$$(\mathcal{R} \otimes I)(I \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes I) = (I \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes I)(I \otimes \mathcal{R}), \quad (7)$$

где I — единичный оператор.

Одно из решений этого уравнения — универсальная \mathcal{R} -матрица — используется для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Однако, до сих пор существует много вопросов, связанных со свойствами и вычислением этих полиномов, ответы на которые частично связаны со свойствами \mathcal{R} -матрицы. Этим мотивируется изучение \mathcal{R} -матриц и квантовых групп.

Работа имеет следующую структуру. В главах 1 и 2 приводится обзор теоретических основ данной работы. В главе 3 описывается класс узлов-мутантов, которые не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении. Одной из целей данной работы было вычисление полиномов пар таких узлов в различных представлениях $U_q(\mathfrak{su}(3))$, чтобы проверить, какие представления различают данные узлы. В главе 4 подробно рассматривается формализм вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ для узлов, представленных в виде косы. Такое представление открывает много возможностей для исследования \mathcal{R} -матриц, что и было сделано. Были найдены преобразования, которые дополнительно блочно-диагонализуют \mathcal{R} -матрицы. Также сформулированы две гипотезы, которые позволяют упростить вычисление \mathcal{R} -матриц в некоторых случаях. Далее приведены матрицы, которые использовались в исследовании.

Основные результаты

Работа проводилась в двух направлениях. С одной стороны изучались полиномы узлов-мутантов с дополнительной симметрией в представлении $[4, 2] U_q(su(3))$. Результатом являются вычисленные полиномы, которые приведены в разделах 3.1.1 и 3.1.2, и разницы между ними:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}_{(1,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} - \mathcal{H}_{(1,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
 & 2q^{-126} (q^2 - 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^5 (q^4 + q^2 + 1)^7 \\
 & (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3 (q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + q^6 - q^4 + 1)^2 \\
 & (q^{20} + q^{18} + q^{16} + q^{14} + 2q^{12} + 2q^{10} + 2q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1) \\
 \\
 & \mathcal{H}_{(3,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} - \mathcal{H}_{(3,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \tag{8} \\
 & (2(q^2 - 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^5 (q^4 + q^2 + 1)^7 \\
 & (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3 (q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + q^6 - q^4 + 1)^2 \\
 & (2q^{84} - 2q^{82} - 2q^{80} + 5q^{78} - 5q^{76} - 2q^{74} + 14q^{72} - 14q^{70} - 12q^{68} + 35q^{66} - \\
 & 13q^{64} - 33q^{62} + 46q^{60} + 4q^{58} - 54q^{56} + 34q^{54} + 24q^{52} - 49q^{50} + 15q^{48} \\
 & + 18q^{46} - 37q^{44} + 19q^{42} + 15q^{40} - 39q^{38} + 23q^{36} + 23q^{34} - 40q^{32} + 12q^{30} \\
 & + 37q^{28} - 26q^{26} - 11q^{24} + 30q^{22} + q^{20} - 16q^{18} + 10q^{16} + 12q^{14} - 5q^{12} - 3q^{10} + \\
 & 8q^8 + 3q^6 - 2q^4 + q^2 + 2)q^{-174}
 \end{aligned}$$

С другой стороны, изучались \mathcal{R} -матрицы в трехнитевых косах. Для \mathcal{R} -матриц с совпадающими собственными значениями были сформулированы две гипотезы:

1. Матрица $\mathcal{R}_2 = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{R}_1 \mathcal{U}$ (где $\mathcal{R}_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, \mathcal{U} — матрица Рака) может быть преобразована к блочно-диагональному виду, если ее собственные значения удовлетворяют двум условиям: число пар случайно совпадающих собственных значений больше или равно чем N_a , число пар совпадающих собственных значений больше или равно чем N_r , где:
 - $N_a = 1, N_r = 0$ или $N_a = 0, N_r = 1$ для матриц до размера 5×5 ,
 - $N_a = 1, N_r = 1$ для матриц 6×6 ,
 - $N_a = 1, N_r = 2$ для матриц 8×8 .
2. Для того чтобы блочно-диагонализовать матрицу \mathcal{R}_2 , которая опеределена через матрицу Рака, ее нужно повернуть в секторе со случайно совпадающими собственными значениями на угол $\pm \frac{\pi}{4}$.

1 Квантовые группы и их представления

\mathcal{R} -матричный формализм, который используется для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, строится на основе теории квантовых групп и их представлений. Квантовой группой называют квантованную универсальную обертывающую алгебру $U_h(g)$. Поэтому в следующих разделах будут кратко описаны универсальная обертывающая алгебра и ее квантованная версия [20].

1.1 Универсальная обертывающая алгебра

Определим основные соотношения в классическом случае.

Пусть g — простая алгебра Ли ранга r с корневой системой Φ . Обозначим подмножество положительных корней через Φ^+ , а через n — число положительных корней, $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ — набор простых корней, а $\check{\alpha}$ — элементы дуального пространства:

$$(\check{\alpha}, \beta) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

$(,)$ — форма Киллинга.

Пусть элементы $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\beta : \alpha \in \Phi^+, \beta \in \Delta\}$ — базис Картана-Вейля алгебры g . Матрица Картана определяется как $a_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$. Для произвольного элемента γ из подалгебры Картана можно определить соответствующий элемент алгебры следующим образом:

$$h_\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} h_\alpha(\check{\alpha}, \gamma). \quad (10)$$

В частности, для определения \mathcal{R} -матрицы нам понадобятся элементы: $h_\beta, \beta \in \Phi^+$, и элемент h_ρ , где ρ — полусумма положительных корней:

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \quad (11)$$

Универсальная обертывающая алгебра g это фактор алгебра тензорной алгебры $T(g)$ по двустороннему идеалу, порожденному соотношениями $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $\forall x, y \in g$

$$U(g) = T(g)/I, \quad T(g) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} g^{\otimes m}, \quad I = \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in g \rangle \quad (12)$$

Согласно теореме Серра эта алгебра может быть определена как алгебра, с $3r$ генераторами $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha : \alpha \in \Delta\}$, которые подчиняются следующим соотношениям:

$$[h_\alpha, h_\beta] = 0, [h_\alpha, e_\beta] = (\alpha, \beta) e_\beta, [h_\alpha, f_\beta] = -(\alpha, \beta) f_\beta, [e_\alpha, f_\beta] = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha \quad (13)$$

$$(\text{ad } e_\alpha)^{1-a_{\alpha\beta}} e_\beta \equiv \sum_{m=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-)^m \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ m \end{bmatrix} e_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-m} e_\beta e_\alpha^m = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (14)$$

$$(\text{ad } f_\alpha)^{1-a_{\alpha\beta}} f_\beta \equiv \sum_{m=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-)^m \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ m \end{bmatrix} f_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-m} f_\beta f_\alpha^m = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (15)$$

Элементы

$$e_{\alpha_1}^{p_1} \dots e_{\alpha_n}^{p_n} h_{\beta_1}^{t_1} \dots h_{\beta_r}^{t_r} f_{\alpha_n}^{s_1} \dots f_{\alpha_1}^{s_n}, \quad \alpha_i \in \Phi^+, \quad \beta_i \in \Delta, \quad p_i, t_i, s_i \in \mathbb{N}_0$$

формируют базис универсальной обертывающей алгебры $U(g)$.

1.2 Квантованная универсальная обертывающая алгебра

Пусть h — произвольное число, тогда квантованная универсальная обертывающая алгебра $U_h(g)$ определяется набором $3r$ генераторов $\{h_\alpha, E_\alpha, F_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, которые подчиняются коммутационным соотношениям:

$$[h_\alpha, h_\beta] = 0, \quad [h_\alpha, E_\beta] = (\alpha, \beta) E_\beta, \quad [h_\alpha, F_\beta] = (\alpha, \beta) F_\beta \quad (16)$$

$$[E_\alpha, F_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \frac{q_\alpha^{h_\alpha} - q_\alpha^{-h_\alpha}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} \quad (17)$$

и соотношениям Серра:

$$\sum_{m=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ m \end{bmatrix}_{q_\alpha} E_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-m} E_\beta E_\alpha^m = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (18)$$

$$\sum_{m=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{\alpha\beta} \\ m \end{bmatrix}_{q_\alpha} F_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-m} F_\beta F_\alpha^m = 0, \quad i \neq j, \quad (19)$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q!}, \quad [n]_q! = \prod_{k=1}^n [k]_q, \quad [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad \text{и } q_\beta = q^{(\alpha, \alpha)/2}. \quad (20)$$

1.2.1 Квантованная универсальная обертывающая алгебра $su(3)$

В качестве примера запишем соотношения, приведенные выше, для $g = su(3)$. $U_q(su(3))$ имеет 6 элементов $E_1, E_2, F_1, F_2, K_1 = q^{h_1}, K_2 = q^{h_2}$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, E_j] = a_{ij} E_j, \quad [h_i, F_j] = -a_{ij} F_j, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}, \quad (21)$$

где $a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ — матрица Картана, и соотношениям Серра:

$$\begin{aligned} E_1 E_1 E_2 - (q + q^{-1}) E_1 E_2 E_1 + E_2 E_1 E_1 &= 0, \\ E_2 E_1 E_2 - (q + q^{-1}) E_2 E_1 E_2 + E_1 E_2 E_2 &= 0, \\ F_1 F_1 F_2 - (q + q^{-1}) F_1 F_2 F_1 + F_2 F_1 F_1 &= 0, \\ F_2 F_1 F_2 - (q + q^{-1}) F_2 F_1 F_2 + F_1 F_2 F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

1.3 Конечномерные неприводимые представления $U_q(\mathfrak{su}(N))$

$U_q(\mathfrak{su}(N))$ задается набором $3(N-1)$ элементов $E_i, F_i, K_i = q^{h_i}$.

При $q \neq \sqrt[k]{1}$ все конечномерные неприводимые представления $U_q(\mathfrak{su}(N))$ — представления со старшим весом. Это значит, что пространство старших векторов одномерно, а представление определяется действием E, F и K на старший вектор v_0 .

Все конечномерные неприводимые представления $U_q(\mathfrak{su}(N))$ нумеруются диаграммами Юнга — наборами неубывающих неотрицательных целых чисел, содержащих $n-1$ число.

E_i и F_i — повышающий и понижающий операторы, а действие K_i определяется диаграммой Юнга $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}\}$ ($\lambda_N = 0$):

$$K_i v_0 = q^{\lambda_i - \lambda_{i+1}} v_0. \quad (23)$$

2 Универсальная квантовая \mathcal{R} -матрица

Во временной калибровке $\mathcal{A}_0 = 0$ действие Черна-Саймонса (1) становится квадратичным:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \delta_{ab} (\mathcal{A}_1^a \partial_0 \mathcal{A}_2^b - \mathcal{A}_2^a \partial_0 \mathcal{A}_1^b), \quad (24)$$

а пропагатор пропорционален

$$D(x, y) \sim \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \theta(x^0 - y^0). \quad (25)$$

Из этого следует, что среднее значение петли Вильсона в представлении ρ калибровочной группы G равно:

$$W_\rho(C) = \text{Tr}_\rho P \exp \oint_C \mathcal{A}_\mu dx^\mu = \text{Tr}_\rho P \exp \oint_{\tilde{C}} (\mathcal{A}_x dx + \mathcal{A}_y dy), \quad (26)$$

где \tilde{C} — двумерная проекция трехмерного контура, по которому производилось интегрирование. С другой стороны, это диаграмма узла.

Ориентированная диаграмма узла естественным образом разбивается на пересечения и нити, которые связывают их между собой. \mathcal{R} -матрица ставится в соответствие пересечениям, а связи между пересечениями задаются с помощью матрицы \mathcal{M} [22]:

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ c \quad d \end{array} = (\mathcal{R})_{cd}^{ab} \qquad \begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \cup \\ | \end{array} = \mathcal{M}_b^a$$

Как было сказано ранее, универсальная квантовая \mathcal{R} -матрица является одним из решений уравнения Янга-Бакстера (7). Она определяется следующим образом: пусть E_β и F_β , $\beta \in \Phi^+$ корневые элементы $U_h(\mathfrak{g})$, тогда универсальная квантовая \mathcal{R} -матрица — это элемент $U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$:

$$\mathcal{R} = \hat{P} q^{\sum_{\alpha \in \Delta} h_{\alpha} \otimes h_{\alpha^{\vee}}} \prod_{\beta \in \Phi^+}^{\rightarrow} \exp_{q_{\beta}} \left((q_{\beta} - q_{\beta}^{-1}) E_{\beta} \otimes F_{\beta} \right), \quad (27)$$

где \hat{P} — это оператор перестановки: $\hat{P} a \otimes b = b \otimes a \hat{P}$, а стрелка над произведением обозначает, что умножение производится в следующем порядке: $\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_1$. q -экспонента определяется как:

$$\exp_q(A) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}$$

Матрица \mathcal{M} определяется через элемент ρ (11):

$$\mathcal{M} = q^{h_{\rho}}. \quad (28)$$

В случае $g = su(3)$ формулы принимают следующий вид:

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} q^{\frac{2}{3}h_1 \otimes h_1 + \frac{1}{3}h_1 \otimes h_2 + \frac{1}{3}h_2 \otimes h_1 + \frac{2}{3}h_2 \otimes h_2} \exp_q \left((q - q^{-1}) E_1 \otimes F_1 \right) \exp_q \left((q - q^{-1}) E_{12} \otimes F_{12} \right) \exp_q \left((q - q^{-1}) E_2 \otimes F_2 \right) \quad (29)$$

и

$$\mathcal{M} = q^{(h_1 + h_2)}. \quad (30)$$

Всего на диаграмме узла можно выделить восемь типов пересечений и четыре типа соединений, которые соответствуют комбинациям матриц \mathcal{R} , \mathcal{R}^{-1} , \mathcal{M} , \mathcal{M}^{-1} :

$$\begin{array}{c} a & & b \\ & \searrow & / \\ & c & & d \\ & / & \searrow \\ c & & d \end{array} = (\mathcal{R}_1)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} a & & b \\ & \searrow & / \\ & c & & d \\ & / & \searrow \\ c & & d \end{array} = (\mathcal{R}_5)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} b & & d \\ & \searrow & / \\ & a & & c \\ & / & \searrow \\ a & & c \end{array} = (\mathcal{R}_2)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} b & & d \\ & \searrow & / \\ & a & & c \\ & / & \searrow \\ a & & c \end{array} = (\mathcal{R}_6)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} c & & a \\ & \searrow & / \\ & d & & b \\ & / & \searrow \\ d & & b \end{array} = (\mathcal{R}_3)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} c & & a \\ & \searrow & / \\ & d & & b \\ & / & \searrow \\ d & & b \end{array} = (\mathcal{R}_7)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} d & & c \\ & \searrow & / \\ & b & & a \\ & / & \searrow \\ b & & a \end{array} = (\mathcal{R}_4)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{c} d & & c \\ & \searrow & / \\ & b & & a \\ & / & \searrow \\ b & & a \end{array} = (\mathcal{R}_8)_{cd}^{ab}$$

$$\begin{array}{cccc}
\begin{array}{c} a \quad b \\ | \quad | \\ \cup \\ | \quad | \\ a \quad b \end{array} & = \mathcal{M}_b^a &
\begin{array}{c} \cup \\ | \quad | \\ a \quad b \end{array} & = (\mathcal{M}^{-1})_b^a &
\begin{array}{c} \cup \\ | \quad | \\ b \quad a \end{array} & = \mathcal{M}_b^a &
\begin{array}{c} b \quad a \\ | \quad | \\ \cup \\ | \quad | \\ b \quad a \end{array} & = (\mathcal{M}^{-1})_b^a
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}, & \mathcal{R}_5 = \mathcal{R}^{-1}, \\
\mathcal{R}_2 = (1 \otimes \mathcal{M})\mathcal{R}(\mathcal{M} \otimes 1)^{-1}, & \mathcal{R}_6 = (1 \otimes \mathcal{M})\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M} \otimes 1)^{-1}, \\
\mathcal{R}_3 = (\mathcal{M} \otimes 1)^{-1}\mathcal{R}(1 \otimes \mathcal{M}), & \mathcal{R}_7 = (\mathcal{M} \otimes 1)^{-1}\mathcal{R}^{-1}(1 \otimes \mathcal{M}), \\
\mathcal{R}_4 = (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})\mathcal{R}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{-1}, & \mathcal{R}_8 = (\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{M})^{-1}.
\end{array} \tag{31}$$

2.1 Собственные значения \mathcal{R} -матрицы

В теории Черна-Саймонса поле \mathcal{A}_μ преобразуется по представлению T группы $SU(N)$. Для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, необходимо использовать квантованную версию — аналогичное представление квантованной универсальной обертывающей $U_q(\mathfrak{su}(N))$. Это представление ставится в соответствие нитям узла (в случае зацеплений, разным элементам зацепления (связанным) можно приписывать разные представления). \mathcal{R} -матрица при этом действует на тензорное произведение представлений, которые соответствуют пересекающимся нитям.

В общем случае вектора неприводимого представления Q_k ($T_i \otimes T_j = \bigoplus_k a_k Q_k$) являются собственными векторами \mathcal{R} -матрицы. Это следует из того, что \mathcal{R} -матрица коммутирует с копроизведением. Покажем это. Посмотрим, как \mathcal{R} -матрица действует на вектора v_i и u_j двух неприводимых представлений Q_1 и Q_2 ($\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$). v_1 и u_1 — старшие вектора Q_1 и Q_2 , E и F — повышающий и понижающий операторы.

$$\begin{array}{l}
\mathcal{R}v_1 = \sum_{i=1}^{\dim(Q_1)} a_i v_i + \sum_{j=1}^{\dim(Q_2)} b_j u_j, \\
E\mathcal{R}v_1 = \sum_{i=2}^{\dim(Q_1)} a_i v_{i-1} + \sum_{j=2}^{\dim(Q_2)} b_j u_{j-1}
\end{array} \tag{32}$$

С другой стороны,

$$E\mathcal{R}v_1 = \mathcal{R}Ev_1 = 0 \tag{33}$$

Получаем, что $a_i = b_j = 0$ для $i = 2, \dots, \dim(Q_1), j = 2, \dots, \dim(Q_2)$ и теперь $\mathcal{R}v_1 = a_1 v_1 + b_1 u_1$.

$$(F)^{\dim(Q_1)} \mathcal{R}v_1 = b_1 u_{\dim(Q_1)+1} = \mathcal{R}(F)^{\dim(Q_1)} v_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{R}v_1 = a_1 v_1 \tag{34}$$

Действуя на это выражение повышающим оператором, можно показать что

$$\mathcal{R}v_i = a_1 v_i. \tag{35}$$

Аналогичная процедура может быть использована для того чтобы показать, что это справедливо для всех неприводимых представлений.

$$\mathcal{R}Q_i = \lambda_i Q_i. \tag{36}$$

Собственные значения \mathcal{R} -матриц были вычислены в общем случае [35, 36] и равны:

$$\lambda_i = \epsilon_{Q_i} q^{z_{Q_i}}, \tag{37}$$

где $\varkappa_{Q_i} = \sum_{(m,n) \in Q_i} (m - n)$ образ квадратичного оператора Казимира в представлении Q_i , $\epsilon_{Q_i} = \pm 1$ в зависимости от того, принадлежит ли Q_i к симметричному или антисимметричному квадрату T .

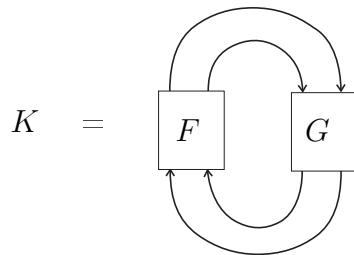
Существует пять возможных наборов собственных значений \mathcal{R} -матриц:

1. все собственные значения различны,
2. некоторые собственные значения совпадают из-за кратности (когда $a_i > 1$ и/или $b_i > 1$ в разложениях $T^{\otimes 2} = \bigoplus_i a_i Q_i$ и $T^{\otimes 3} = \bigoplus_i b_i Q_i$) \longrightarrow кратные собственные значения
3. некоторые собственные значения случайно совпадают ($\epsilon_{Q_i} q^{\varkappa_{Q_i}} = \epsilon_{Q_j} q^{\varkappa_{Q_j}}$, но $Q_i \neq Q_j$) \longrightarrow случайно совпадающие собственные значения,
4. есть как кратные (λ), так и случайно совпадающие собственные значения (μ), которые не совпадают между собой ($\nexists \lambda_i, \mu_j : \lambda_i = \mu_j$),
5. есть как кратные (λ), так и случайно совпадающие собственные значения (μ), которые совпадают между собой ($\exists \lambda_i, \mu_j : \lambda_i = \mu_j$).

3 Узлы-мутанты

Среди множества узлов [29], существует группа узлов, которые не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ, вычисленными в фундаментальном представлении $U_q(\mathfrak{su}(N))$. Такие узлы образуют пары и называются узлами-мутантами.

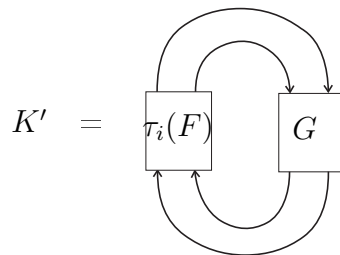
Если узел K можно разделить на две ориентированные части F и G



с помощью замены F на $F' = \tau_i(F)$ можно получить новый узел K'

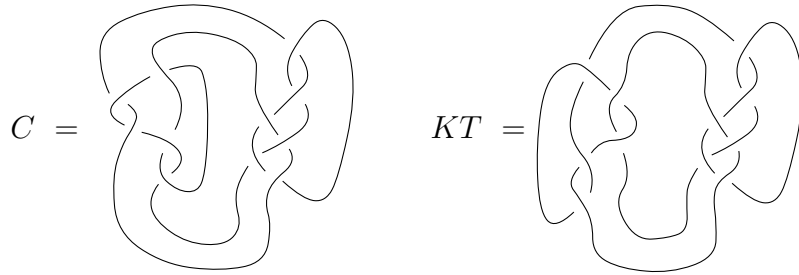
$$\tau_1(F) = \boxed{F} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array}, \quad \tau_2(F) = \boxed{F} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \downarrow \end{array}, \quad \tau_3(F) = \boxed{F} \begin{array}{c} \downarrow \\ \curvearrowright \end{array},$$

Любой из трех узлов



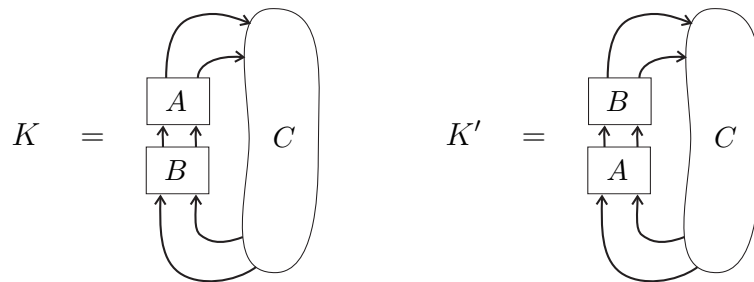
называют мутантом узла K , а операции замены $\tau_i(F)$ называют мутациями.

Самый известный пример узлов-мутантов — два узла с 11 пересечениями: узел Конвея и узел Киношита-Терасаки, их обозначают C и KT :



Особый интерес к узлам-мутантам обоснован тем, что они не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ не только в фундаментальном, но и в любом симметрическом представлении $U_q(su(N))$.

Если добавить дополнительную симметрию и рассмотреть два узла



для которых выполняется условие:

$$A = \begin{array}{c} \boxed{A} \\ \downarrow \curvearrowright \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \boxed{B} \\ \downarrow \curvearrowright \end{array}$$

то первое представление, которое различает эти узлы — [4, 2] [18].

3.1 Вычисление полиномов узлов-мутантов в представлении [4, 2] $U_q(su(3))$

Для вычисления полиномов узлов-мутантов были вычислены матрицы \mathcal{R} и \mathcal{M} . Для этого были посчитаны элементы $U_q(su(3))$ E_i , F_i и h_i :

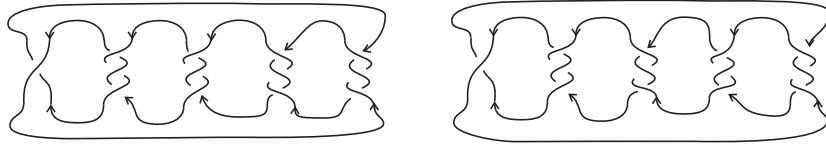
1. На основе коммутационных соотношений (21) был построен модуль Верма (он содержал 251 вектор)
2. Используя соотношения Серра (22), мы уменьшили количество векторов до 55
3. Была построена матрица скалярных произведений для соответствующих векторов, что позволило нам выделить 27 базисных векторов пространства представления

4. Это дало возможность построить матрицы операторов E_i , F_i и h_i .

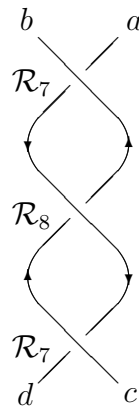
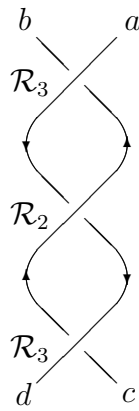
Явный вид операторов позволил вычислить матрицы \mathcal{R} и \mathcal{M} .

Далее приведено детальное вычисление выражений для полиномов двух пар узлов-мутантов, которые различаются представлением [4,2], но при этом не различаются представлениями меньшей размерности.

3.1.1 (1, 3, 3, -3, -3) и (1, 3, -3, 3, -3)



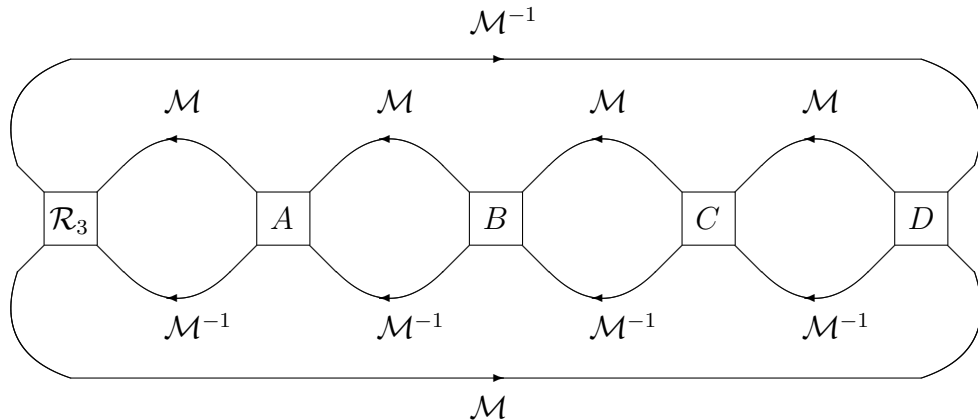
Эти узлы содержат вертикальные антипараллельные косы, которые мы обозначим как $\mathcal{R}_{3,2,3}$ и $\mathcal{R}_{7,6,7}$:



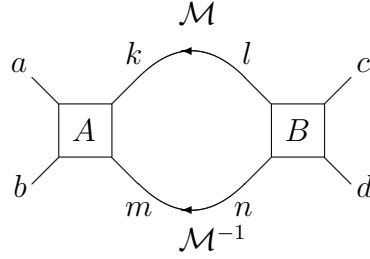
$$(\mathcal{R}_{3,2,3})_{abcd} = (\mathcal{R}_3)_{akbl}(\mathcal{R}_2)_{nlmk}(\mathcal{R}_3)_{mcnd}, \quad (38)$$

$$(\mathcal{R}_{7,6,7})_{abcd} = (\mathcal{R}_7)_{akbl}(\mathcal{R}_6)_{nlmk}(\mathcal{R}_7)_{mcnd}. \quad (39)$$

Структуру этих узлов можно изобразить в следующем виде:



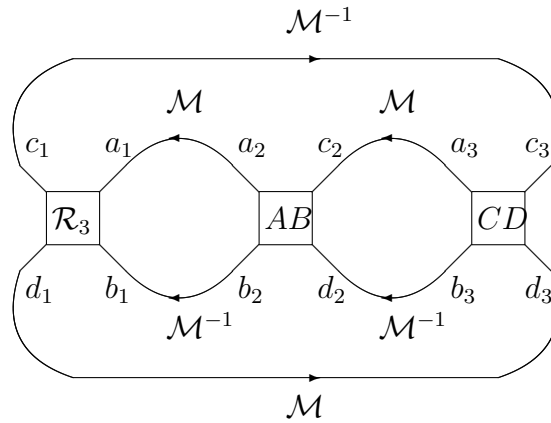
В узле $(1, 3, 3, -3, -3)$: $A = \mathcal{R}_{3,2,3}$, $B = \mathcal{R}_{3,2,3}$, $C = \mathcal{R}_{7,6,7}$, $D = \mathcal{R}_{7,6,7}$.
В узле $(1, 3, -3, 3, -3)$: $A = \mathcal{R}_{3,2,3}$, $B = \mathcal{R}_{7,6,7}$, $C = \mathcal{R}_{3,2,3}$, $D = \mathcal{R}_{7,6,7}$.
Сначала вычислим свертки AB и CD :



$$(AB)_{abcd} = A_{kamb} M_{lk} M_{nm}^{-1} B_{cldn}, \quad (40)$$

$$(CD)_{abcd} = C_{kamb} M_{lk} M_{nm}^{-1} D_{cldn}. \quad (41)$$

Затем получаем следующую конструкцию, которая позволяет записать выражение для полиномов:



$$\mathcal{H}_{(1,3,\pm 3,\pm 3,-3)} = (\mathcal{R}_3)_{a_1 b_1 c_1 d_1} \mathcal{M}_{a_2 a_1} \mathcal{M}_{b_2 b_1}^{-1} (AB)_{a_2 b_2 c_2 d_2} \mathcal{M}_{a_3 c_2} \mathcal{M}_{b_3 d_2}^{-1} (CD)_{a_3 b_3 c_3 d_3} \mathcal{M}_{d_1 d_3} \mathcal{M}_{c_1 c_3}^{-1}. \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_{(1,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} = \\
& (2q^{260} + 2q^{258} - 33q^{256} + 34q^{254} + 178q^{252} - 368q^{250} - 377q^{248} + 1634q^{246} - 346q^{244} - \\
& 4372q^{242} + 4606q^{240} + 7208q^{238} - 16060q^{236} - 4034q^{234} + 36039q^{232} - 17354q^{230} - \\
& 56286q^{228} + 70226q^{226} + 51653q^{224} - 153296q^{222} + 16712q^{220} + 231322q^{218} - \\
& 176128q^{216} - 230524q^{214} + 402206q^{212} + 69864q^{210} - 595275q^{208} + 275168q^{206} + \\
& 609430q^{204} - 721862q^{202} - 333770q^{200} + 1090134q^{198} - 232242q^{196} - 1173822q^{194} + \\
& 952727q^{192} + 827252q^{190} - 1577202q^{188} - 41986q^{186} + 1806129q^{184} - 989298q^{182} - \\
& 1415202q^{180} + 1881766q^{178} + 424748q^{176} - 2210770q^{174} + 827248q^{172} + 1763276q^{170} - \\
& 1827329q^{168} - 688476q^{166} + 2158594q^{164} - 582342q^{162} - 1699331q^{160} + 1545580q^{158} + \\
& 644296q^{156} - 1820666q^{154} + 571278q^{152} + 1289220q^{150} - 1410774q^{148} - 187296q^{146} + \\
& 1471058q^{144} - 944128q^{142} - 723268q^{140} + 1531430q^{138} - 438059q^{136} - 1294416q^{134} + \\
& 1430022q^{132} + 376580q^{130} - 1804580q^{128} + 790062q^{126} + 1423672q^{124} - 1720608q^{122} - \\
& 456044q^{120} + 2054310q^{118} - 717936q^{116} - 1670956q^{114} + 1645228q^{112} + 739780q^{110} - \\
& 1987752q^{108} + 349532q^{106} + 1679918q^{104} - 1182402q^{102} - 934636q^{100} + 1523786q^{98} + \\
& 90481q^{96} - 1381578q^{94} + 572164q^{92} + 925426q^{90} - 916515q^{88} - 365652q^{86} + 936548q^{84} - \\
& 120410q^{82} - 714695q^{80} + 418512q^{78} + 383452q^{76} - 498038q^{74} - 78751q^{72} + 411684q^{70} - \\
& 114772q^{68} - 255384q^{66} + 187499q^{64} + 109102q^{62} - 178500q^{60} - 6664q^{58} + 130887q^{56} - \\
& 50396q^{54} - 71346q^{52} + 68422q^{50} + 17189q^{48} - 55690q^{46} + 17148q^{44} + 27498q^{42} - \\
& 25937q^{40} - 2652q^{38} + 17084q^{36} - 8174q^{34} - 4927q^{32} + 7230q^{30} - 1564q^{28} - 2712q^{26} + \\
& 2279q^{24} - 42q^{22} - 964q^{20} + 546q^{18} + 80q^{16} - 242q^{14} + 98q^{12} + 28q^{10} - 42q^8 + 12q^6 + \\
& 4q^4 - 4q^2 + 1)q^{-176}
\end{aligned} \tag{43}$$

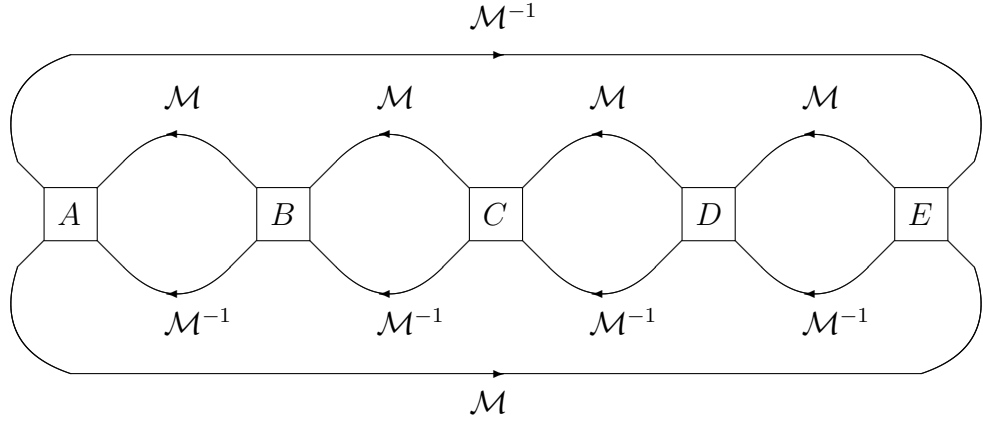
$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_{(1,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
& (2q^{260} + 2q^{258} - 33q^{256} + 32q^{254} + 182q^{252} - 364q^{250} - 389q^{248} + 1636q^{246} - 332q^{244} - \\
& 4386q^{242} + 4592q^{240} + 7232q^{238} - 16046q^{236} - 4066q^{234} + 36039q^{232} - 17302q^{230} \\
& - 56316q^{228} + 70160q^{226} + 51725q^{224} - 153268q^{222} + 16602q^{220} + 231352q^{218} - \\
& 176012q^{216} - 230604q^{214} + 402118q^{212} + 70004q^{210} - 595225q^{208} + 274978q^{206} + \\
& 609462q^{204} - 721654q^{202} - 333934q^{200} + 1089982q^{198} - 231994q^{196} - 1173804q^{194} + \\
& 952465q^{192} + 827364q^{190} - 1576990q^{188} - 42182q^{186} + 1806009q^{184} - 989044q^{182} - \\
& 1415192q^{180} + 1881506q^{178} + 424884q^{176} - 2210584q^{174} + 827026q^{172} + 1763228q^{170} - \\
& 1827117q^{168} - 688568q^{166} + 2158456q^{164} - 582218q^{162} - 1699313q^{160} + 1545480q^{158} + \\
& 644350q^{156} - 1820616q^{154} + 571214q^{152} + 1289270q^{150} - 1410720q^{148} - 187396q^{146} + \\
& 1471076q^{144} - 944004q^{142} - 723406q^{140} + 1531338q^{138} - 437847q^{136} - 1294464q^{134} + \\
& 1429800q^{132} + 376766q^{130} - 1804444q^{128} + 789802q^{126} + 1423682q^{124} - 1720354q^{122} - \\
& 456164q^{120} + 2054114q^{118} - 717724q^{116} - 1670844q^{114} + 1644966q^{112} + 739798q^{110} - \\
& 1987504q^{108} + 349380q^{106} + 1679754q^{104} - 1182194q^{102} - 934604q^{100} + 1523596q^{98} + \\
& 90531q^{96} - 1381438q^{94} + 572076q^{92} + 925346q^{90} - 916399q^{88} - 365622q^{86} + 936438q^{84} - \\
& 120382q^{82} - 714623q^{80} + 418446q^{78} + 383422q^{76} - 497986q^{74} - 78751q^{72} + 411652q^{70} - \\
& 114758q^{68} - 255360q^{66} + 187485q^{64} + 109088q^{62} - 178486q^{60} - 6662q^{58} + 130875q^{56} - \\
& 50392q^{54} - 71342q^{52} + 68420q^{50} + 17189q^{48} - 55690q^{46} + 17148q^{44} + 27498q^{42} - \\
& 25937q^{40} - 2652q^{38} + 17084q^{36} - 8174q^{34} - 4927q^{32} + 7230q^{30} - 1564q^{28} - 2712q^{26} + \\
& 2279q^{24} - 42q^{22} - 964q^{20} + 546q^{18} + 80q^{16} - 242q^{14} + 98q^{12} + 28q^{10} - 42q^8 + 12q^6 + \\
& 4q^4 - 4q^2 + 1)q^{-176}
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_{(1,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} - \mathcal{H}_{(1,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
& 2q^{-126} (q^2 - 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^5 (q^4 + q^2 + 1)^7 \\
& (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3 (q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + q^6 - q^4 + 1)^2 \\
& (q^{20} + q^{18} + q^{16} + q^{14} + 2q^{12} + 2q^{10} + 2q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)
\end{aligned} \tag{45}$$

3.1.2 (3, 3, 3, -3, -3) и (3, 3, -3, 3, -3)

Эти узлы так же, как и предыдущая пара, содержат антипараллельные косы (38, 39) $\mathcal{R}_{3,2,3}$ и $\mathcal{R}_{7,6,7}$.

Можно представить структуру этих узлов в следующем виде:



В узле (3, 3, 3, -3, -3): $A = B = C = \mathcal{R}_{3,2,3}$, $D = E = \mathcal{R}_{7,6,7}$.

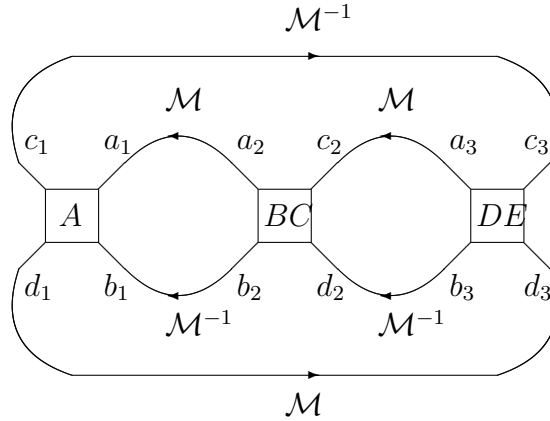
В узле (3, 3, -3, 3, -3): $A = B = D = \mathcal{R}_{3,2,3}$, $C = E = \mathcal{R}_{7,6,7}$.

Вычислим сначала свертки BC and DE :

$$(BC)_{abcd} = B_{kamb} M_{lk} M_{nm}^{-1} C_{cldn}, \tag{46}$$

$$(DE)_{abcd} = D_{kamb} M_{lk} M_{nm}^{-1} E_{cldn}, \tag{47}$$

затем свернем оставшиеся индексы:



$$\mathcal{H}_{(3,3,\pm 3,\pm 3,-3)} = (A)_{a_1c_1b_1d_1} \mathcal{M}_{a_2a_1} \mathcal{M}_{b_2b_1}^{-1} (AB)_{a_2b_2c_2d_2} \mathcal{M}_{a_3c_2} \mathcal{M}_{b_3d_2}^{-1} (CD)_{a_3b_3c_3d_3} \mathcal{M}_{d_1d_3} \mathcal{M}_{c_1c_3}^{-1}. \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{(3,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} = \\ & (q^{360} - 4q^{358} + 4q^{356} + 10q^{354} - 34q^{352} + 20q^{350} + 72q^{348} - 138q^{346} - 16q^{344} + 310q^{342} - \\ & 244q^{340} - 402q^{338} + 712q^{336} + 372q^{334} - 1532q^{332} - 88q^{330} + 3262q^{328} - 1654q^{326} - \\ & 5720q^{324} + 6986q^{322} + 6213q^{320} - 16046q^{318} - 1710q^{316} + 26244q^{314} - 5631q^{312} - \\ & 41046q^{310} + 12314q^{308} + 81556q^{306} - 36520q^{304} - 178644q^{302} + 146308q^{300} + 334408q^{298} - \\ & 465493q^{296} - 468484q^{294} + 1150112q^{292} + 360242q^{290} - 2340225q^{288} + 433340q^{286} + \\ & 4037846q^{284} - 2670544q^{282} - 5807194q^{280} + 7375420q^{278} + 6275234q^{276} - 15363550q^{274} - \\ & 2663146q^{272} + 26094820q^{270} - 9072316q^{268} - 35947130q^{266} + 32644571q^{264} + 36806610q^{262} - \\ & 67836284q^{260} - 16898720q^{258} + 105829269q^{256} - 34087626q^{254} - 126833206q^{252} + \\ & 115834368q^{250} + 104537961q^{248} - 208873260q^{246} - 18994612q^{244} + 274285216q^{242} - \\ & 127096019q^{240} - 266307492q^{238} + 298827574q^{236} + 154374240q^{234} - 434578153q^{232} + \\ & 55958950q^{230} + 466975202q^{228} - 314192552q^{226} - 352180388q^{224} + 534508418q^{222} + \\ & 96603368q^{220} - 624569134q^{218} + 231782467q^{216} + 526789274q^{214} - 519579704q^{212} - \\ & 254387438q^{210} + 653096500q^{208} - 101680452q^{206} - 573703278q^{204} + 406866430q^{202} + \\ & 311322091q^{200} - 543598890q^{198} + 25439908q^{196} + 465334382q^{194} - 296967930q^{192} - \\ & 217198918q^{190} + 393237346q^{188} - 83335734q^{186} - 281351288q^{184} + 296349164q^{182} + \\ & 21676308q^{180} - 321427448q^{178} + 256841758q^{176} + 145450302q^{174} - 415812894q^{172} + \\ & 149853428q^{170} + 373458623q^{168} - 427868780q^{166} - 141788952q^{164} + 562943090q^{162} - \\ & 184027047q^{160} - 495855304q^{158} + 473735728q^{156} + 253251492q^{154} - 619464075q^{152} + \\ & 71702848q^{150} + 576465752q^{148} - 362987516q^{146} - 373520784q^{144} + 528968530q^{142} + \\ & 93009306q^{140} - 534010924q^{138} + 167765164q^{136} + 403253988q^{134} - 335360250q^{132} - \\ & 202178336q^{130} + 382316172q^{128} + 4209788q^{126} - 326333954q^{124} + 137168594q^{122} + \\ & 212249810q^{120} - 201307340q^{118} - 88867556q^{116} + 197291808q^{114} - 8557035q^{112} - \\ & 151006562q^{110} + 65086952q^{108} + 90678850q^{106} - 83183526q^{104} - 37075452q^{102} + \\ & 74881760q^{100} + 297232q^{98} - 54080147q^{96} + 18518878q^{94} + 31702548q^{92} - 23493018q^{90} - \\ & 13965685q^{88} + 20437088q^{86} + 2798020q^{84} - 14389206q^{82} + 2648316q^{80} + 8498708q^{78} - \\ & 4297918q^{76} - 4089610q^{74} + 3955322q^{72} + 1337292q^{70} - 2855370q^{68} + 71930q^{66} + \\ & 1702773q^{64} - 579796q^{62} - 824984q^{60} + 603516q^{58} + 290120q^{56} - 448178q^{54} - 21588q^{52} + \\ & 272736q^{50} - 85540q^{48} - 130108q^{46} + 103152q^{44} + 32976q^{42} - 74561q^{40} + 15712q^{38} + \\ & 33814q^{36} - 24968q^{34} - 5116q^{32} + 15026q^{30} - 5184q^{28} - 4236q^{26} + 4434q^{24} - 488q^{22} - \\ & 1508q^{20} + 936q^{18} + 70q^{16} - 342q^{14} + 140q^{12} + 32q^{10} - 50q^8 + 14q^6 + 4q^4 - 4q^2 + 1)q^{-224} \end{aligned} \quad (49)$$

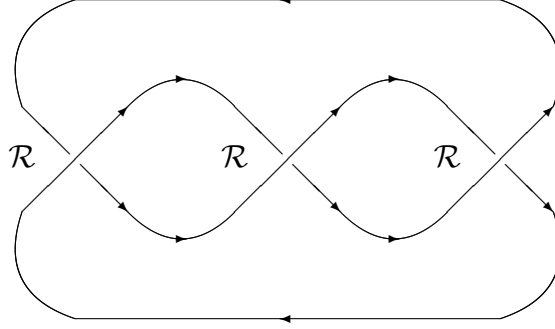
$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_{(3,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
& (q^{360} - 4q^{358} + 4q^{356} + 10q^{354} - 34q^{352} + 20q^{350} + 72q^{348} - 138q^{346} - 16q^{344} + 310q^{342} - \\
& 244q^{340} - 402q^{338} + 712q^{336} + 372q^{334} - 1532q^{332} - 88q^{330} + 3262q^{328} - 1654q^{326} - \\
& 5720q^{324} + 6986q^{322} + 6213q^{320} - 16050q^{318} - 1694q^{316} + 26236q^{314} - 5685q^{312} - \\
& 40942q^{310} + 12300q^{308} + 81336q^{306} - 36176q^{304} - 178638q^{302} + 145624q^{300} + 335198q^{298} - \\
& 465163q^{296} - 470174q^{294} + 1151194q^{292} + 361906q^{290} - 2343139q^{288} + 433050q^{286} + \\
& 4042176q^{284} - 2672732q^{282} - 5812242q^{280} + 7381556q^{278} + 6279224q^{276} - 15375256q^{274} - \\
& 2661586q^{272} + 26110802q^{270} - 9085188q^{268} - 35960444q^{266} + 32670283q^{264} + 36807406q^{262} - \\
& 67868858q^{260} - 16880474q^{258} + 105858333q^{256} - 34125590q^{254} - 126847776q^{252} + \\
& 115888014q^{250} + 104526667q^{248} - 208932038q^{246} - 18948124q^{244} + 274328738q^{242} - \\
& 127175563q^{240} - 266311642q^{238} + 298919598q^{236} + 154326598q^{234} - 434651303q^{232} + \\
& 56049902q^{230} + 467003602q^{228} - 314302732q^{226} - 352152610q^{224} + 534608570q^{222} + \\
& 96522298q^{220} - 624630076q^{218} + 231898621q^{216} + 526788072q^{214} - 519696188q^{212} - \\
& 254320760q^{210} + 653172258q^{208} - 101787656q^{206} - 573712780q^{204} + 406970878q^{202} + \\
& 311270327q^{200} - 543662396q^{198} + 25523362q^{196} + 465340776q^{194} - 297046330q^{192} - \\
& 217154820q^{190} + 393280264q^{188} - 83407332q^{186} - 281341402q^{184} + 296414322q^{182} + \\
& 21615798q^{180} - 321450744q^{178} + 256926136q^{176} + 145412396q^{174} - 415878428q^{172} + \\
& 149941582q^{170} + 373469877q^{168} - 427970746q^{166} - 141737046q^{164} + 563018648q^{162} - \\
& 184124613q^{160} - 495878622q^{158} + 473848612q^{156} + 253214828q^{154} - 619559787q^{152} + \\
& 71790780q^{150} + 576515518q^{148} - 363101554q^{146} - 373509168q^{144} + 529072640q^{142} + \\
& 92943950q^{140} - 534074386q^{138} + 167857042q^{136} + 403266080q^{134} - 335448126q^{132} - \\
& 202147764q^{130} + 382379546q^{128} + 4153932q^{126} - 326364116q^{124} + 137231296q^{122} + \\
& 212247014q^{120} - 201360042q^{118} - 88840398q^{116} + 197323046q^{114} - 8593833q^{112} - \\
& 151014648q^{110} + 65119542q^{108} + 90670756q^{106} - 83204940q^{104} - 37060444q^{102} + \\
& 74891744q^{100} + 281966q^{98} - 54081465q^{96} + 18530790q^{94} + 31698584q^{92} - 23500000q^{90} - \\
& 13959907q^{88} + 20439454q^{86} + 2793184q^{84} - 14388740q^{82} + 2651130q^{80} + 8497364q^{78} - \\
& 4299080q^{76} - 4088474q^{74} + 3955612q^{72} + 1336582q^{70} - 2855314q^{68} + 72302q^{66} + \\
& 1702627q^{64} - 579934q^{62} - 824870q^{60} + 603534q^{58} + 290070q^{56} - 448168q^{54} - 21578q^{52} + \\
& 272732q^{50} - 85540q^{48} - 130108q^{46} + 103152q^{44} + 32976q^{42} - 74561q^{40} + 15712q^{38} + \\
& 33814q^{36} - 24968q^{34} - 5116q^{32} + 15026q^{30} - 5184q^{28} - 4236q^{26} + 4434q^{24} - 488q^{22} - \\
& 1508q^{20} + 936q^{18} + 70q^{16} - 342q^{14} + 140q^{12} + 32q^{10} - 50q^8 + 14q^6 + 4q^4 - 4q^2 + 1)q^{-224}
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_{(3,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} - \mathcal{H}_{(3,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
& (2(q^2 - 1)^{18} (q^2 + 1)^{10} (q^4 + 1)^4 (q^4 - q^2 + 1)^5 (q^4 + q^2 + 1)^7 \\
& (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3 (q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + q^6 - q^4 + 1)^2 \\
& (2q^{84} - 2q^{82} - 2q^{80} + 5q^{78} - 5q^{76} - 2q^{74} + 14q^{72} - 14q^{70} - 12q^{68} + 35q^{66} - \\
& 13q^{64} - 33q^{62} + 46q^{60} + 4q^{58} - 54q^{56} + 34q^{54} + 24q^{52} - 49q^{50} + 15q^{48} \\
& + 18q^{46} - 37q^{44} + 19q^{42} + 15q^{40} - 39q^{38} + 23q^{36} + 23q^{34} - 40q^{32} + 12q^{30} \\
& + 37q^{28} - 26q^{26} - 11q^{24} + 30q^{22} + q^{20} - 16q^{18} + 10q^{16} + 12q^{14} - 5q^{12} - 3q^{10} + \\
& 8q^8 + 3q^6 - 2q^4 + q^2 + 2)q^{-174}
\end{aligned} \tag{51}$$

Вычисление полиномов ХОМФЛИ-ПТ для пар мутантов с дополнительной симметрией показало, что они различаются представлением $[4, 2] U_q(su(3))$, что совпадает с результатом Мортонса [18]. В этой работе разница получена через явное вычисление полиномов.

4 \mathcal{R} -матрицы в трехнитевых косах

Любой узел можно перерисовать в виде косы, при этом минимальное количество нитей в косе будет численным инвариантом узла. Например,



Метод вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, описанный в главе 2, модифицируется. В косе есть только два типа пересечений:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array} = \mathcal{R}, \quad \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array} = \mathcal{R}^{-1}.$$

Вместо матрицы \mathcal{M} для замыкания косы используется матрица весов $W = \mathcal{M}^2$. Обычно, ее включают в определение квантового следа. Общая формула для полинома:

$$H_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}} = \widetilde{\text{Tr}}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha} \mathcal{R}_{\alpha}, \quad (52)$$

где α нумерует все пересечения в косе.

В этом формализме \mathcal{R} -матрица действует сразу на все нити косы. В случае трехнитевых кос для вычисления полиномов используются две \mathcal{R} -матрицы:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \otimes I, \quad (53)$$

$$\mathcal{R}_2 = I \otimes \mathcal{R}, \quad (54)$$

где I — единичный оператор. Каждая из них меняет местами первую и вторую и вторую и третью нити соответственно.

Уравнение Янга-Бакстера (7) можно записать следующим образом:

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2. \quad (55)$$

Матрицы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 связаны друг с другом матрицей Рака (известной также как $6j$ -символ) \mathcal{U} :

$$\mathcal{U}_{T_1, T_2, T_3}^{T_4} : ((T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 \rightarrow T_4) \longrightarrow (T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) \rightarrow T_4) \quad (56)$$

она является матрицей перехода в другой базис. Существуют различные методы вычисления матриц Рака. Например, через соотношение пентагона [20, 21] или метод

старших векторов [23]-[27]. Большое число матриц Рака были вычислены методом старших векторов для различных представлений $T SU_q(N)$ [28]: для $T = [2, 1]$ в [30], для $T = [3, 1]$ в [31, 32] и для $T = [3, 3]$ в [33]. Эти примеры используются в данной работе.

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{U} \mathcal{R}_1 \mathcal{U}^\dagger. \quad (57)$$

Уравнение (55) преобразуется к виду:

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{U} \mathcal{R}_1 \mathcal{U}^\dagger \mathcal{R}_1 = \mathcal{U} \mathcal{R}_1 \mathcal{U}^\dagger \mathcal{R}_1 \mathcal{U} \mathcal{R}_1 \mathcal{U}^\dagger. \quad (58)$$

Так как собственные значения \mathcal{R} -матрицы известны, всегда можно выбрать базис в котором матрица \mathcal{R}_1 диагональна. Аналогично рассуждению, приведенному в разделе 2.1 можно показать, что в этом базисе матрицы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 будут иметь блочно-диагональную структуру с блоками $\mathcal{R}_{1;Q'_k}$ и $\mathcal{R}_{2;Q'_k}$, которые нумеруются неприводимыми представлениями из разложения $T \otimes T \otimes T = \bigoplus_k a_k Q'_k$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1;Q'_k} &= \text{diag}(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_{a_j}}), \\ \mathcal{R}_{2;Q'_k} &= (\mathcal{U}_{Q'_k})^\dagger \mathcal{R}_{1;Q'_k} \mathcal{U}_{Q'_k}, \end{aligned} \quad (59)$$

где λ_{j_i} собственные значения представлений Q_{j_i} (из суммы $T_1 \otimes T_2 = \bigoplus_i Q_i$; $Q_{j_i} \otimes T_3 = \bigoplus_m Q'_m$). Выражение (52) также преобразуется [23]-[26]:

$$H_T^{(m_1, n_1 | m_2, n_2 | \dots)} = \sum_{Q \in T^{\otimes 3}} S_Q^* \text{Tr}_Q (\mathcal{R}_{1;Q}^{m_1} \mathcal{U}_Q \mathcal{R}_{1;Q}^{n_1} \mathcal{U}_Q^\dagger \mathcal{R}_{1;Q}^{m_2} \mathcal{U}_Q \mathcal{R}_{1;Q}^{n_2} \mathcal{U}_Q^\dagger \dots), \quad (60)$$

где m_i и n_i нумеруют пересечения в косе, S_Q^* полиномы Шура в особой точке (квантовые размерности)¹.

4.1 Гипотеза о собственных значениях и ее обобщение

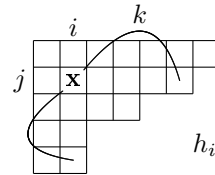
В случае, когда у \mathcal{R} -матрицы нет совпадающих собственных значений (первый набор собственных значений, описанный в разделе 2.1), уравнение Янга-Бакстера (58) может быть решено аналитически для матриц до размера 6×6 включительно. Это было сделано в [37]. На основе этой работы была сформулирована гипотеза о собственных значениях [27], которая гласит, что собственные значения \mathcal{R} -матрицы полностью определяют элементы соответствующей матрицы Рака.

Однако, не ясно, как расширить область применения этой гипотезы на \mathcal{R} -матрицы с совпадающими собственными значениями. В этой работе рассматриваются \mathcal{R} -матрицы с наборами собственных значений 2, 3 и 4 (из раздела 2.1) и соответствующие им матрицы Рака.

¹ их можно вычислить с помощью формулы крюков:

$$S_Q^*(A, q) = \prod_{(i,j) \in Q} \frac{Aq^{i-j} - A^{-1}q^{j-i}}{q^{h_{i,j}} - q^{-h_{i,j}}}, \quad (61)$$

$[n]_q$ — квантовое число n , $[n]_q \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$.



Выражение (52) симметрично относительно операции замены базиса, в котором записаны матрицы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 : $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{Q}\mathcal{R}_1\mathcal{Q}^\dagger$, $\mathcal{R}'_2 = \mathcal{Q}\mathcal{R}_2\mathcal{Q}^\dagger$ (аналогичное преобразование необходимо применить и к матрице Рака). При этом матрица \mathcal{R}_1 инвариантна при поворотах в секторах совпадающих собственных значений: $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{O}\mathcal{R}_1\mathcal{O}^\dagger = \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}'_2 = \mathcal{O}\mathcal{R}_2\mathcal{O}^\dagger$. Это позволяет производить дополнительные преобразования над матрицей \mathcal{R}_2 , для того чтобы изучить ее внутреннюю структуру.

Итак, для исследования внутренней структуры матриц \mathcal{R}_2 и матриц Рака использовались матрицы Рака из [28]. Они поворачивались в секторах с совпадающими собственными значениями (кратными и случайно совпадающими) соответствующей \mathcal{R} -матрицы.

Поворот в секторе с кратными собственными значениями соответствует выбору других старших векторов в соответствующих представлениях. Получившаяся после поворота матрица все равно удовлетворяет определению (56) и является матрицей Рака.

Повороты в секторах со случайно совпадающими собственными значениями смешивают вектора из разных неприводимых представлений. Получившаяся после такого поворота матрица уже не будет матрицей Рака, однако все равно может использоваться для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ методом Решетихина-Тураева, потому что формула (52) симметрична относительно таких преобразований.

Главным результатом работы являются две гипотезы.

1. Матрица \mathcal{R}_2 может быть преобразована к блочно-диагональному виду, если ее собственные значения удовлетворяют двум условиям: число пар случайно совпадающих собственных значений больше или равно чем N_a , число пар совпадающих собственных значений больше или равно чем N_r
 - $N_a = 1$, $N_r = 0$ или $N_a = 0$, $N_r = 1$ для матриц до размера 5×5 ,
 - $N_a = 1$, $N_r = 1$ для матриц 6×6 ,
 - $N_a = 1$, $N_r = 2$ для матриц 8×8 .
2. Для того чтобы блочно-диагонализовать матрицу \mathcal{R}_2 , которая опеределена через матрицу Рака, ее нужно повернуть в секторе со случайно совпадающими собственными значениями на угол $\pm \frac{\pi}{4}$.

Первая гипотеза была доказана для матриц \mathcal{R}_2 до размера 4×4 включительно. Она также может быть сформулирована для матриц Рака, которые аналогично могут быть преобразованы к блочно-диагональному виду. Все вычисления были проделаны для матриц Рака, результаты представлены в таблице 4.1.

Блоки, которые получаются после поворота, могут быть найдены с помощью гипотезы о собственных значениях. Это следует из первой гипотезы.

Вторая гипотеза является экспериментальным результатом.

раз- мер	представ- ление	собственные значения		результат	блоки
		кратные	случайные		
[2,1]					
6	[5,3,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
8	[4,3,2]	$\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3,5)
9	[4,3,1,1]	$\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$	$\lambda_2 = \lambda_3$	-	
[3,1]					
4	[4,3,2,2,1]		$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(1,3)
5	[4,4,2,2]		$\lambda_1 = \lambda_2$	+	(2,3)
6	[4,3,3,1,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
9	[5,3,2,2]	$\lambda_4 = \lambda_5$	$\lambda_2 = \lambda_3$	-	
	[4,4,3,1]	$\lambda_5 = \lambda_6, \lambda_7 = \lambda_8$	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3,6)
[3,2]					
6	[4,3,3,2,2,1]	$\lambda_5 = \lambda_6$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
	[6,4,2,1,1,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
[4,1]					
4	[5,4,3,2,1]	-	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(1,3)
6	[5,5,3,2]	$\lambda_3 = \lambda_4$	$\lambda_5 = \lambda_6$	+	(3,3)
	[5,4,4,1,1]	$\lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_5$	$\lambda_6 = \lambda_7$	+	(3,3)
	[6,4,2,2,1]	-	$\lambda_4 = \lambda_5$	-	
[4,2]					
4	[5,4,3,3,2,1]	-	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(1,3)
5	[5,5,3,3,1,1]	-	$\lambda_4 = \lambda_5$	+	(2,3)
6	[5,4,4,2,2,1]	$\lambda_5 = \lambda_6$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
	[11,6,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)

Таблица 1: Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями.

4.2 Доказательство первой гипотезы

Рассмотрим \mathcal{R} -матрицу размера $n \times n$ с парой совпадающих собственных значений.

- $n = 2$

В этом случае

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

это значит, что \mathcal{R}_2 тоже пропорциональна единичной матрице, потому что $\mathcal{R}_2 = U\mathcal{R}U^\dagger$.

- $n = 3$

В этом случае:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (63)$$

\mathcal{R}_2 симметрична, потому что \mathcal{R} -матрица диагональна и U действительна.

$$\mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad (64)$$

Так как с помощью поворота матрицы всегда можно сделать $\beta_1 = 0$:

$$\mathcal{O}_{(\beta_1=0)} = \begin{pmatrix} c & -s & \\ s & c & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

где

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sqrt{(\alpha_1-\beta_2)^2+4\beta_1^2+\alpha_1-\beta_2})^2}{4\beta_1^2}+1}}, \quad s = \frac{\sqrt{(\alpha_1-\beta_2)^2+4\beta_1^2+\alpha_1-\beta_2}}{2\beta_1\sqrt{\frac{(\sqrt{(\alpha_1-\beta_2)^2+4\beta_1^2+\alpha_1-\beta_2})^2}{4\beta_1^2}+1}}, \quad (66)$$

разумно рассматривать $\tilde{\mathcal{R}}_2 = \mathcal{O}_{(\beta_1=0)}\mathcal{R}_2\mathcal{O}_{(\beta_1=0)}^\dagger$. Матрица \mathcal{R}_1 симметрична относительно такого поворота.

Получаем, что произвольную матрицу \mathcal{R}_2 с парой совпадающих собственных значений можно записать следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (67)$$

\mathcal{R}_1 и $\tilde{\mathcal{R}}_2$ подчиняются уравнению Янга-Бакстера (55).

$$YB = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = 0. \quad (68)$$

Элемент $Y_{B_{12}}$ этого уравнения равен

$$\lambda_3 c_1 c_2 = 0. \quad (69)$$

Существует два решения этого уравнения ($c_1 = 0$ и $c_2 = 0$), оба удовлетворяют гипотезе, то есть блочно-диагонализуют матрицу $\tilde{\mathcal{R}}_2$.

- $n = 4$

Доказательство аналогично доказательству в случае матриц 3×3 . В качестве \mathcal{R}_1 выбираем диагональную матрицу с двумя совпадающими собственными значениями. Поворачивая матрицы \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 приходим к следующему общему виду матриц:

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_1 & & \\ & & x_3 & \\ & & & x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Хотим показать, что любое решение уравнения Янга-Бакстера ($\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$) блочно-диагонализует матрицу \mathcal{R}_2 . Используем условие на след, которое вытекает из уравнения Янга-Бакстера:

$$2x_1 + x_3 + x_4 = m_{11} + m_{22} + m_{33} + m_{44}, \quad (71)$$

выражаем из него элемент m_{44} . Для нахождения других элементов \mathcal{R}_2 можно использовать следующую последовательность действий:

1. Выразить m_{33} и m_{34} из $Y_{B_{13}}$ и $Y_{B_{23}}$. условие на определитель системы этих уравнений: $(m_{14}m_{23} - m_{24}m_{13}) \neq 0$.
2. Выразить m_{13} из $Y_{B_{12}}$ (условие: $m_{23} \neq 0$).
3. Выразить m_{23} , m_{24} и m_{22} друг за другом из уравнений $Y_{B_{22}}$, $Y_{B_{11}}$ и $Y_{B_{14}}$ соответственно.
4. Наконец, $Y_{B_{33}}$ и $Y_{B_{44}}$ позволяют найти m_{11} and m_{14} .

Все решения, полученные в этой ветви вычислений блочно-диагональные.

Теперь предположим, что $(m_{14}m_{23} - m_{24}m_{13}) = 0$ и рассмотрим два случая: $m_{13} = 0$ и $m_{13} \neq 0$.

$$m_{13} = 0.$$

Из $Y_{B_{12}}$:

$$m_{13}m_{23}x_3 + m_{14}m_{24}x_4 = 0 \quad (72)$$

следует, что $m_{14} = 0$ и/или $m_{24} = 0$. $Y_{B_{13}}$ становится равным:

$$m_{14}m_{34}x_4 = 0 \quad (73)$$

поэтому $m_{14} = 0$ и/или $m_{34} = 0$. Решения этих двух уравнений: $m_{14} = 0$ или $m_{24} = 0$ и $m_{34} = 0$. Оба блочно-диагонализуют матрицу \mathcal{R}_2 :

$$\begin{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 0 & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad (74)$$

Другой случай: $m_{13} \neq 0$ и $m_{14}m_{23} - m_{24}m_{13} = 0$. m_{33} можно выразить из YB_{13} и подставить в YB_{23} . Получаем:

$$(m_{22} - m_{11})m_{23}x_1 = 0 \quad (75)$$

Если $m_{23} = 0$, из условий $m_{13} \neq 0$ и $m_{14}m_{23} - m_{24}m_{13} = 0$ следует, что $m_{24} = 0$. В результате опять получаем блочно-диагональное решение для матрицы \mathcal{R}_2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \end{pmatrix} \quad (76)$$

Если $m_{22} = m_{11}$, дополнительным вращением матриц \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 в секторе 1 – 2 можно блочно-диагонализовать матрицу \mathcal{R}_2 . Новые элементы равны:

$$m'_{23} = cm_{23} + sm_{13}m'_{24} = cm_{24} + sm_{14}. \quad (77)$$

Используем условия $m_{13} \neq 0$ и $m_{14}m_{23} - m_{24}m_{13} = 0$, чтобы получить, что $m'_{23} = 0$ и $m'_{24} = 0$ когда

$$c = \sqrt{\frac{m_{13}}{m_{13} + m_{23}}}, \quad s = -\frac{m_{23}}{m_{13}}c \quad (78)$$

или если $m_{13} = -m_{23}$, откуда следует, что $m_{14} = -m_{24}$

$$c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (79)$$

Структура конечных матриц такая же, как и в предыдущем случае.

4.3 Преобразование матриц

В ходе выполнения работы изучались \mathcal{R} -матрицы в различных конечномерных неприводимых представлениях $U_q(su(N))$, из них выбирались матрицы с совпадающими собственными значениями. Затем соответствующие матрицы Рака [28] поворачивались в секторах с совпадающими собственными значениями. Вычисления показали, что после поворота в секторе со случайно совпадающими собственными значениями, почти все матрицы Рака и, следовательно, матрицы \mathcal{R}_2 блочно-диагонализовались. Все результаты приведены в таблице 4.1. В этой главе описана схема вычислений.

Если у \mathcal{R} -матрицы есть совпадающие собственные значения, ($\lambda_i = \lambda_j$)

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_j & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (80)$$

соответствующую матрицу Рака \mathcal{U} можно повернуть в секторе $i - j$ с помощью ортогональной матрицы \mathcal{O} :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & c & & -s & \\ & & \ddots & & \\ & s & & c & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (81)$$

$$\mathcal{U}' = \mathcal{O}\mathcal{U}\mathcal{O}^T, \quad (82)$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & -s \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ s & 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,i} & u_{i,i+1} & \cdots & u_{i,j-1} & u_{i,j} \\ u_{i+1,i} & u_{i+1,i+1} & \cdots & u_{i+1,j-1} & u_{i+1,j} \\ & & \ddots & & \\ u_{j-1,i} & u_{j-1,i+1} & \cdots & u_{j-1,j-1} & u_{j-1,j} \\ u_{j,i} & u_{j,i+1} & \cdots & u_{j,j-1} & u_{j,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & s \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -s & 0 & \cdots & 0 & c \end{pmatrix} = \quad (83)$$

$$\begin{pmatrix} u'_{i,i} & u'_{i,i+1} & \cdots & u'_{i,j-1} & u'_{i,j} \\ u'_{i+1,i} & u'_{i+1,i+1} & \cdots & u'_{i+1,j-1} & u'_{i+1,j} \\ & & \ddots & & \\ u'_{j-1,i} & u'_{j-1,i+1} & \cdots & u'_{j-1,j-1} & u'_{j-1,j} \\ u'_{j,i} & u'_{j,i+1} & \cdots & u'_{j,j-1} & u'_{j,j} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Угол, на который нужно повернуть \mathcal{U}' , для того чтобы блочно-диагонализовать можно определить из следующего требования:

$$u'_{i,j} = u'_{j,i} = 0. \quad (85)$$

Уравнения имеют решения только если $u_{i,j} = u_{j,i}$. Если $u_{i,j} \neq u_{j,i}$ мы можем использовать дополнительный поворот:

$$\mathcal{O}_1 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & c_1 & & -s_1 & \\ & & \ddots & & \\ & s_1 & & c_1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \text{ and } \mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & c_2 & & -s_2 & \\ & & \ddots & & \\ & s_2 & & c_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (86)$$

и работать с преобразованной матрицей поворота:

$$\mathcal{U}' = \mathcal{O}_1\mathcal{U}\mathcal{O}_2^T, \quad (87)$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i,i} & u_{i,i+1} & \cdots & u_{i,j-1} & u_{i,j} \\ u_{i+1,i} & u_{i+1,i+1} & \cdots & u_{i+1,j-1} & u_{i+1,j} \\ & & \ddots & & \\ u_{j-1,i} & u_{j-1,i+1} & \cdots & u_{j-1,j-1} & u_{j-1,j} \\ u_{j,i} & u_{j,i+1} & \cdots & u_{j,j-1} & u_{j,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & 0 & \cdots & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \end{pmatrix} = \quad (88)$$

$$\begin{pmatrix} u'_{i,i} & u_{i,i+1} & \cdots & u'_{i,j-1} & u'_{i,j} \\ u'_{i+1,i} & u_{i+1,i+1} & \cdots & u_{i+1,j-1} & u'_{i+1,j} \\ & & \ddots & & \\ u'_{j-1,i} & u_{j-1,i+1} & \cdots & u_{j-1,j-1} & u'_{j-1,j} \\ u'_{j,i} & u'_{j,i+1} & \cdots & u'_{j,j-1} & u'_{j,j} \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Угол поворота для новой матрицы может быть найден из аналогичного требования (85).

4.4 Представление $[2,1]$

$$[2,1] \otimes [2,1] = [4,2] \oplus [4,1,1] \oplus [3,3] \oplus [3,2,1] \oplus [3,2,1] \oplus [3,1,1,1] \oplus [2,2,2] \oplus [2,2,1,1], \quad (90)$$

В квадрате представления $[2,1]$ есть два типа неприводимых представлений: из симметричного и антисимметричного (подчеркнуты) квадрата. Собственные значения соответствующих \mathcal{R} -матриц равны:

$$\begin{aligned} \lambda_{[4,2]} &= \frac{1}{q^5}, & \lambda_{[4,1,1]} &= -\frac{1}{q^3}, & \lambda_{[3,3]} &= -\frac{1}{q^3}, & \lambda_{[3,2,1]_{\pm}} &= \pm 1, \\ \lambda_{[3,1,1,1]} &= q^3, & \lambda_{[2,2,2]} &= q^3, & \lambda_{[2,2,1,1]} &= -q^5. \end{aligned} \quad (91)$$

Видно, что встречаются две пары случайно совпадающих собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{[4,1,1]} &= \lambda_{[3,3]} = -\frac{1}{q^3}, \\ \lambda_{[3,1,1,1]} &= \lambda_{[2,2,2]} = q^3. \end{aligned} \quad (92)$$

Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями $[2,1]$					
размер	представление	собственные значения		результат	блоки
		кратные	случайные		
6	$[5,3,1]$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	$(3,3)$
8	$[4,3,2]$	$\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	$(3,5)$
9	$[4,3,1,1]$	$\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$	$\lambda_2 = \lambda_3$	-	

4.4.1 $[5,3,1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[5,3,1]} &= \text{diag}(q^{\chi_{[2,2,1,1]}}, q^{\chi_{[2,2,1,1]}}, -q^{\chi_{[3,1,1,1]}}, -q^{\chi_{[2,2,2]}}, -q^{\chi_{[3,2,1]}}, q^{\chi_{[3,2,1]}}) = \\ &= \text{diag}(-q^{-5}, -q^{-5}, q^{-3}, q^{-3}, -1, 1). \end{aligned} \quad (93)$$

Видно, что $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_3 = \lambda_4$, поэтому мы вращаем матрицу $\mathcal{U}_{[5,3,1]}$ в секторах 1 – 2 и 3 – 4. Получаем

$$\begin{aligned} c_{12}^{[5,3,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{q(1+q^2)(1+q^4)^2}{(1+q^2(1+(-1+q)q)(1+q+q^2)(2+q^4+q^6)}}, \\ s_{12}^{[5,3,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(1+(-1+q)q)(1+q+q^2+q^3+q^4)(1+(-1+q)q(1+(-1+q)q)(1+q+q^2))}{(1+q^2(1+(-1+q)q)(1+q+q^2)(2+q^4+q^6)}}, \end{aligned} \quad (94)$$

и

$$\boxed{c_{34}^{[5,3,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[5,3,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (95)$$

После поворотов матрица $\mathcal{U}_{[5,3,1]}$ блочно-диагонализуется:

$$\mathcal{U}'_{[5,3,1]} = \begin{pmatrix} -\frac{q^2(1+q+q^2)}{(1+q^2)y_1} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{16} \\ 0 & \frac{q^2(1-q+q^2)}{(1+q^2)y_2} & 0 & x_{24} & x_{25} & 0 \\ x_{13} & 0 & \frac{-1+q-q^2+q^3-q^4}{(1+q^2)(1-q+q^2)} & 0 & 0 & x_{36} \\ 0 & x_{24} & 0 & \frac{y_1}{y_1+q^2} & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & x_{45} & -\frac{q^3}{1+q^2-q^3+q^4+q^6} & 0 \\ x_{16} & 0 & x_{36} & 0 & 0 & -\frac{q^3}{y_1+q^6} \end{pmatrix}, \quad (96)$$

где

$$\begin{aligned} x_{13} &= \frac{q}{1+q^2} \sqrt{\frac{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6}{1+q^2+q^3+q^4+q^6}}, & x_{24} &= -\frac{q}{1+q^2} \sqrt{\frac{1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6}{1+q^2-q^3+q^4+q^6}}, \\ x_{16} &= \frac{(1+q^4) \sqrt{\frac{1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6}{1-q+q^2+q^4-q^5+q^6}}}{1+q+q^2+q^3+q^4}, & x_{45} &= \frac{q \sqrt{\frac{1+q^4}{1-q+q^2-q^3+q^4}}}{1+q+q^2}, \\ x_{36} &= \frac{q \sqrt{\frac{1+q^4}{1+q+q^2+q^3+q^4}}}{1-q+q^2}, & x_{25} &= \frac{\sqrt{(1+q^4)(1+q^2-q^3+q^4+q^6)(1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6)}}{(1+q+q^2)(1-q+q^2-q^3+q^4)^{3/2}}, \\ x_{52} &= \frac{(1+q^4) \sqrt{\frac{1-q+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6}{1+q+q^2+q^4+q^5+q^6}}}{1-q+q^2-q^3+q^4}, \end{aligned} \quad (97)$$

$$y_1 = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4, \quad y_2 = 1 - q + q^2 - q^3 + q^4.$$

Видно, что у матрица (96) блочно-диагональная структура с блоками 3×3 .

4.4.2 [4,3,2]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[4,3,2]} &= \text{diag} (q^{\mathcal{R}[2,2,1,1]}, -q^{\mathcal{R}[3,1,1,1]}, -q^{\mathcal{R}[2,2,2]}, -q^{\mathcal{R}[3,2,1]}, -q^{\mathcal{R}[3,2,1]}, q^{\mathcal{R}[3,2,1]}, q^{\mathcal{R}[3,2,1]}, q^{\mathcal{R}[3,3]}) = \\ &= \text{diag} (-q^5, q^3, q^3, -1, -1, 1, 1, -q^{-3}) \end{aligned} \quad (98)$$

Несмотря на то что у этой матрицы три пары совпадающих собственных значений $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_4 = \lambda_5$ и $\lambda_6 = \lambda_7$, всего одно вращение в секторе $2-3$ блочно-диагонализует ее. Элементы матрицы поворота равны:

$$\boxed{c_{23}^{[4,3,2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[4,3,2]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (99)$$

В результате получаем $\mathcal{U}_{[5,3,1]}$:

$$\mathcal{U}'_{[4,3,2]} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & x_{14} & 0 & 0 & x_{17} & x_{18} \\ x_{12} & \frac{2q^2}{(1+q^2)^2} & 0 & x_{24} & 0 & 0 & x_{27} & x_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ x_{14} & x_{24} & 0 & \frac{1+q-3q^2+q^3+q^4}{2(1-q+q^2-q^3+q^4)} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ x_{17} & x_{27} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{(-1+q+3q^2+q^3-q^4)^2}}{2(1+q+q^2+q^3+q^4)} & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} \\ x_{18} & x_{28} & 0 & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} & 0 & 0 & -\frac{q^2}{(1+q^2)\sqrt{1+q^4}} & \frac{q^4}{(1+q^2)^2(1+q^4)} \end{pmatrix}, \quad (100)$$

где

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{q^4(1+q^2+3q^4+q^6+q^8)}{(1+q^2)^2(1+q^2+2q^4+2q^6+2q^8+q^{10}+q^{12})}, & x_{12} &= \sqrt{\frac{2q^6(1+q^4+q^8)}{(1+q^2)^4(1+q^2+2q^4+2q^6+2q^8+q^{10}+q^{12})}}, \\ x_{14} &= \sqrt{\frac{q^2(1-q+q^2)^3(1+q+q^2)(1-q^2+q^4)}{(1+q^2)^2(1+q^4)(1-q+q^2-q^3+q^4)^2}}, & x_{17} &= -\sqrt{\frac{q^2(1-q+q^2)(1+q+q^2)^3(1-q^2+q^4)}{(1+q^2)^2(1+q^4)(1+q+q^2+q^3+q^4)^2}}, \\ x_{24} &= \sqrt{\frac{(q-1)^4(1+q+q^2+q^3+q^4)}{2(1+q^2)^2(1-q+q^2-q^3+q^4)}}, & x_{27} &= -\sqrt{\frac{(1+q)^4(1-q+q^2-q^3+q^4)}{2(1+q^2)^2(1+q+q^2+q^3+q^4)}}, \\ x_{18} &= \sqrt{\frac{(1-q^2+q^4)(1+q^2+q^4)^3}{(1+q^2)^4(1+q^4)^2}}, & x_{28} &= -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{\frac{1+q^2+q^4+q^6+q^8}{1+q^4}}}{(1+q^2)^2}. \end{aligned} \quad (101)$$

Видно, что матрица (101) блочно-диагональна с блоками размером 5×5 и 3×3 .

4.5 Представление [3,1]

$$\begin{aligned} [3, 1]^{\otimes 2} &= [6, 2] \oplus [6, 1, 1] \oplus [5, 3] \oplus 2[5, 2, 1] \oplus [5, 1, 1, 1] \oplus [4, 4] \oplus 2[4, 3, 1] \oplus [4, 2, 2] \\ &\oplus [4, 2, 1, 1] \oplus [3, 3, 2] \oplus [3, 3, 1, 1]. \end{aligned} \quad (102)$$

Собственные значения соответствующей \mathcal{R} -матрицы равны:

$$\begin{aligned} \lambda_{[6,2]} &= q^{-14}, & \lambda_{[6,1,1]} &= -q^{-12}, & \lambda_{[5,3]} &= -q^{-10}, & \lambda_{[5,2,1]_{\pm}} &= \pm q^{-7}, \\ \lambda_{[5,1,1,1]} &= q^{-4}, & \lambda_{[4,4]} &= q^{-8}, & \lambda_{[4,3,1]_{\pm}} &= \pm q^{-4}, & \lambda_{[4,2,2]} &= q^{-2}, \\ \lambda_{[4,2,1,1]} &= -1, & \lambda_{[3,3,2]} &= -1, & \lambda_{[3,3,1,1]} &= q^2. \end{aligned} \quad (103)$$

Среди них есть две пары случайно совпадающих собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{[5,1,1,1]} &= \lambda_{[4,3,1]_+} = q^{-4} \\ \lambda_{[4,2,1,1]} &= \lambda_{[3,3,2]} = -1 \end{aligned} \quad (104)$$

Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями [3, 1]					
размер	представление	собственные значения		результат	блоки
		кратные	случайные		
4	[4,3,2,2,1]		$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3, 1)
5	[4,4,2,2]		$\lambda_1 = \lambda_2$	+	(3, 2)
6	[4,3,3,1,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3, 3)
9	[5,3,2,2]	$\lambda_4 = \lambda_5$	$\lambda_2 = \lambda_3$	-	-
	[4,4,3,1]	$\lambda_5 = \lambda_6, \lambda_7 = \lambda_8$	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3, 6)

4.5.1 [4,3,2,2,1]

$$\mathcal{R}_{[4,3,2,2,1]} = \text{diag}(q^{\mathcal{Z}[3,3,1,1]}, -q^{\mathcal{Z}[4,2,1,1]}, -q^{\mathcal{Z}[3,3,2]}, q^{\mathcal{Z}[4,2,2]}) = \text{diag}(q^2, 1, 1, q^{-2}). \quad (105)$$

После вращения в секторе 2 – 3 матрицей поворота с элементами

$$\boxed{c_{23}^{[4,3,2,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[4,3,2,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (106)$$

$\mathcal{R}_{[4,3,2,2,1]}$ блочно-диагонализуется:

$$\mathcal{U}'_{[4,3,2,2,1]} = \mathcal{O}_{23}^{[4,3,2,2,1]} \mathcal{U}_{[4,3,2,2,1]} (\mathcal{O}_{23}^{[4,3,2,2,1]})^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{(1+q^2)^2} & \frac{(\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4})}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} \\ -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4}}{(1+q^2)^2} & \frac{(-1-q^4)}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4}}{(1+q^2)^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} & -\frac{(\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4})}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \end{pmatrix}. \quad (107)$$

$\mathcal{U}'_{[4,3,2,2,1]}$ распадается на блоки 3×3 и 1×1 .

4.5.2 [4,4,2,2]

$$\mathcal{R}_{[4,4,2,2]} = \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}[4,2,1,1]}, -q^{\mathcal{Z}[3,3,2]}, q^{\mathcal{Z}[4,2,2]}, q^{\mathcal{Z}[4,3,1]}, -q^{\mathcal{Z}[4,3,1]}) = \text{diag}(-1, -1, q^{-2}, q^{-4}, -q^{-4}). \quad (108)$$

У матрицы $\mathcal{R}_{[4,4,2,2]}$ есть одна пара случайно совпадающих собственных значений, поэтому можно повернуть $\mathcal{R}_{[4,4,2,2]}$ в секторе 1 – 2 матрицей вращения с элементами

$$\boxed{c_{12}^{[4,4,2,2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{12}^{[4,4,2,2]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (109)$$

и получить

$$\mathcal{U}'_{[4,4,2,2]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & -x_{25} \\ 0 & x_{23} & x_{33} & 0 & x_{23} \\ -x_{14} & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & x_{25} & x_{23} & 0 & -x_{22} \end{pmatrix}, \quad (110)$$

где

$$\begin{aligned} x_{11} &= \frac{q^2}{1+q^4}, & x_{22} &= -\frac{q^2}{(1+q^2)^2}, & x_{23} &= -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{1-q+q^2}\sqrt{1+q+q^2}}{(1+q^2)^2}, \\ x_{25} &= \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2}, & x_{14} &= \frac{\sqrt{1-q+q^2}\sqrt{1+q+q^2}\sqrt{1-q^2+q^4}}{1+q^4}, & x_{33} &= -\frac{1+q^4}{(1+q^2)^2}. \end{aligned} \quad (111)$$

Видно, что конечная матрица распадается на блоки размером 3×3 и 2×2 .

4.5.3 [4,3,3,1,1]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[4,3,3,1,1]} &= \text{diag}(q^{\mathcal{Z}_{[3,3,1,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[3,3,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,2,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}) = \\ &= \text{diag}(q^2, q^2, -1, -1, q^{-4}, -q^{-4}). \end{aligned} \quad (112)$$

У матрицы $\mathcal{R}_{[4,3,3,1,1]}$ есть две пары совпадающих собственных значений. Элементы матриц поворота в секторах 1 – 2 и 3 – 4 равны:

$$\begin{aligned} c_{12}^{[4,3,3,1,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+q^4)\sqrt{\frac{1+q^2+q^4}{1+2q^4+2q^8+q^{12}}}, \\ s_{12}^{[4,3,3,1,1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-q^2+q^4+q^8-q^{10}+q^{12}}{1+2q^4+q^6+2q^8+q^{12}}}, \end{aligned} \quad (113)$$

и

$$\boxed{c_{34}^{[4,3,3,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[4,3,3,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (114)$$

После поворота получаем матрицу с блоками размером 3×3 .

4.5.4 [4,4,3,1]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[4,4,3,1]} &= \text{diag}(q^{\mathcal{Z}_{[3,3,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,2,1,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,2,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,3,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,4]}}) = \\ &= \text{diag}(q^2, -1, -1, q^{-2}, q^{-4}, q^{-4}, -q^{-4}, -q^{-4}, q^{-8}). \end{aligned} \quad (115)$$

У матрицы $\mathcal{R}_{[4,4,3,1]}$ три пары совпадающих собственных значений: $\lambda_2 = \lambda_3$ (случайно совпадающие), $\lambda_5 = \lambda_6$, $\lambda_7 = \lambda_8$ (кратные). Мы поворачиваем соответствующую матрицу Рака $\mathcal{U}^{[4,4,3,1]}$ только в секторах 2-3 и 7-8, потому что $U_{56}^{[4,4,3,1]} = U_{65}^{[4,4,3,1]} = 0$. Чтобы ограничиться только одной матрицей поворота в секторе 2 – 3, мы умножаем третью строку матрицы $\mathcal{U}^{[4,4,3,1]}$ на -1 . В этом случае элементы матрицы поворота в секторе 2 – 3 равны:

$$\boxed{c_{23}^{[4,4,3,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[4,4,3,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (116)$$

Второй поворот необходимо сделать в секторе 7–8. Элементы матриц поворота равны соответственно:

$$c_{1,78}^{[4,4,3,1]} = \sqrt{\frac{1+q^2+q^4}{2(1+q^4)}}, \quad s_{1,78}^{[4,4,3,1]} = -\sqrt{\frac{1-q^2+q^4}{2(1+q^4)}} \quad (117)$$

и

$$c_{2,78}^{[4,4,3,1]} = 1, \quad s_{2,78}^{[4,4,3,1]} = 0. \quad (118)$$

В результате получаем матрицу с блоками 3×3 и 6×6

4.6 Представление [3,2]

$$\begin{aligned}
[3,2]^{\otimes 2} = & [6,4] \oplus [6,3,1] \oplus [6,2,2] \oplus [5,5] \oplus [5,4,1] \oplus [5,4,1] \oplus [5,3,2] \oplus \\
& [5,3,2] \oplus [5,3,1,1] \oplus [5,2,2,1] \oplus [4,4,2] \oplus [4,4,1,1] \oplus [4,3,3] \oplus [4,3,2,1] \oplus \\
& [4,3,2,1] \oplus [4,2,2,2] \oplus [3,3,3,1] \oplus [3,3,2,2],
\end{aligned} \tag{119}$$

В квадрате представления [3,2] подчеркнуты антисимметричные представления. У соответствующей \mathcal{R} -матрицы следующие собственные значения:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[6,4]} = q^{-17}, \quad \lambda_{[6,3,1]} = -q^{-13}, \quad \lambda_{[6,2,2]} = q^{-11}, \quad \lambda_{[5,5]} = -q^{-15}, \quad \lambda_{[5,4,1]_{\pm}} = \pm q^{-10}, \\
\lambda_{[5,3,2]_{\pm}} = \pm q^{-7}, \quad \lambda_{[5,3,1,1]} = q^{-5}, \quad \lambda_{[5,2,2,1]} = -q^{-3}, \quad \lambda_{[4,4,2]} = q^{-5}, \quad \lambda_{[4,4,1,1]} = -q^{-3}, \\
\lambda_{[4,3,3]} = -q^{-3}, \quad \lambda_{[4,3,2,1]_{\pm}} = \pm 1, \quad \lambda_{[4,2,2,2]} = q^3, \quad \lambda_{[3,3,3,1]} = q^3, \quad \lambda_{[3,3,2,2]} = -q^5.
\end{aligned} \tag{120}$$

Среди них есть несколько пар случайно совпадающих собственных значений:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[5,3,1,1]} = \lambda_{[4,4,2]} = q^{-5} \\
\lambda_{[5,2,2,1]} = \lambda_{[4,4,1,1]} = \lambda_{[4,3,3]} = -q^{-3} \\
\lambda_{[4,2,2,2]} = \lambda_{[3,3,3,1]} = q^3.
\end{aligned} \tag{121}$$

Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями [3,2]					
раз-мер	представ-ление	собственные значения		результат	блоки
		кратные	случайные		
6	[4,3,3,2,2,1]	$\lambda_5 = \lambda_6$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
	[6,4,2,1,1,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)

4.6.1 [4,3,3,2,2,1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{[4,3,3,2,2,1]} = \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}_{[4,3,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,3,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,2,2,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[3,3,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2,2]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[3,3,2,2]}}) = \\
\text{diag}(-1, 1, q^3, q^3, -q^5, -q^5).
\end{aligned} \tag{122}$$

У матрицы $\mathcal{R}_{[4,3,3,2,2,1]}$ есть две пары совпадающих собственных значений: $\lambda_3 = \lambda_4$ (случайно совпадающие) и $\lambda_5 = \lambda_6$. Чтобы использовать только одну матрицу поворота в секторе 3 – 4, мы меняем знак третьей строки матрицы $\mathcal{U}_{[4,3,3,2,2,1]}$. Элементы матрицы поворота $\mathcal{O}_{34}^{[4,3,3,2,2,1]}$ равны:

$$\boxed{c_{34}^{[4,3,3,2,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[4,3,3,2,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \tag{123}$$

Следующий поворот 5 – 6 мы делаем с использованием двух матриц поворота. Их элементы равны:

$$\begin{aligned}
c_{1,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}+1}}{\sqrt{2}}, & s_{1,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{1-\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}}}{\sqrt{2}} \\
c_{2,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{1-\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}}}{\sqrt{2}}, & s_{2,56}^{[4,3,3,2,2,1]} &= \frac{\sqrt{\frac{q(q^2+1)(q^8+1)}{q^{12}+2q^{10}+2q^8+q^6+2q^4+2q^2+1}+1}}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{124}$$

После поворота матрица равна:

$$\mathcal{U}'_{[4,3,3,2,2,1]} = \begin{pmatrix} \frac{q^3}{q^6+q^4-q^3+q^2+1} & 0 & 0 & x_{14} & -x_{15} & 0 \\ 0 & -\frac{q^3}{q^6+q^4+q^3+q^2+1} & x_{23} & 0 & 0 & x_{26} \\ 0 & -x_{23} & -x_{33} & 0 & 0 & -x_{36} \\ x_{14} & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & 0 \\ x_{15} & 0 & 0 & -x_{45} & \frac{q^2((q-1)q+1)}{(q^2+1)((q-1)q(q^2+1)+1)} & 0 \\ 0 & -x_{26} & -x_{36} & 0 & 0 & \frac{q^2(q^2+q+1)}{(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)} \end{pmatrix}, \tag{125}$$

где

$$\begin{aligned}
x_{14} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)((q-1)q(q^2+1)+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, & x_{15} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, \\
x_{23} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, & x_{26} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\
x_{33} &= \frac{q^2}{((q-1)q+1)(q^2+1)} - 1, & x_{36} &= \frac{q\sqrt{(q^4+q^3+q^2+q+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}{(q^6+2q^4+q^3+2q^2+q+2)q^2+1}, \\
x_{44} &= \frac{q^2}{q^4+q^3+2q^2+q+1} - 1, & x_{45} &= \frac{q(- (q-1)q((q-1)q+1)(q^2+q+1)-1)}{(q^2+1)\sqrt{((q-1)q(q^2+1)+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}.
\end{aligned} \tag{126}$$

Видно, что она состоит из блоков 3×3 и 3×3 .

4.6.2 [6,4,2,1,1,1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{[6,4,2,1,1,1]} &= \text{diag}(q^{\chi_{[5,3,1,1]}}, q^{\chi_{[5,3,1,1]}}, -q^{\chi_{[5,2,2,1]}}, -q^{\chi_{[4,4,1,1]}}, -q^{\chi_{[4,3,2,1]}}, q^{\chi_{[4,3,2,1]}}) = \\
&= \text{diag}(q^{-5}, q^{-5}, -q^{-3}, -q^{-3}, -1, 1). \tag{127}
\end{aligned}$$

У матрицы $\mathcal{R}_{[6,4,2,1,1,1]}$ есть две пары совпадающих собственных значений: $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_3 = \lambda_4$ (случайно совпадающие). Элементы матрицы поворота в секторе 3–4 равны:

$$\boxed{c_{34}^{[6,4,2,1,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[6,4,2,1,1,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \tag{128}$$

Для поворота в секторе 1–2 нужно использовать две матрицы с элементами, которые мы не будем перечислять для экономии бумаги.

Получившаяся матрица равна:

$$\mathcal{U}'_{[6,4,2,1,1,1]} = \begin{pmatrix} \frac{q^2(-q^2+q-1)}{(q^2+1)((q-1)q(q^2+1)+1)} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & -x_{16} \\ 0 & -\frac{q^2(q^2+q+1)}{(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)} & x_{23} & 0 & -x_{25} & 0 \\ 0 & x_{23} & x_{33} & 0 & x_{35} & 0 \\ x_{14} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & x_{46} \\ 0 & x_{25} & -x_{35} & 0 & \frac{q^3}{q^6+q^4+q^3+q^2+1} & 0 \\ x_{16} & 0 & 0 & x_{46} & 0 & -\frac{q^3}{q^6+q^4-q^3+q^2+1} \end{pmatrix}, \quad (129)$$

где

$$\begin{aligned} x_{14} &= \frac{q(-(q-1)q((q-1)q+1)(q^2+q+1)-1)}{(q^2+1)\sqrt{((q-1)q(q^2+1)+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}, & x_{16} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4-q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, \\ x_{23} &= -\frac{q(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)}{(q^2+1)\sqrt{(q^4+q^3+q^2+q+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}, & x_{25} &= \frac{\sqrt{(q^4+1)((q^2+1)(q^4+q+1)q^2+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\ x_{33} &= \frac{q^2}{((q-1)q+1)(q^2+1)} - 1, & x_{35} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\ x_{44} &= 1 - \frac{q^2}{q^4+q^3+2q^2+q+1}, & x_{46} &= -\frac{q\sqrt{(q^4+1)((q-1)q(q^2+1)+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}. \end{aligned} \quad (130)$$

$\mathcal{U}'_{[6,4,2,1,1,1]}$ блочно-диагональна с блоками 3×3 .

4.7 Представление [4,1]

$$\begin{aligned} [4,1]^{\otimes 2} &= [8,2] \oplus [8,1,1] \oplus [7,3] \oplus [7,2,1] \oplus [7,2,1] \oplus [7,1,1,1] \oplus [6,4] \oplus \\ & [6,3,1] \oplus [6,3,1] \oplus [6,2,2] \oplus [6,2,1,1] \oplus [5,5] \oplus [5,4,1] \oplus [5,4,1] \oplus \\ & [5,3,2] \oplus [5,3,1,1] \oplus [4,4,2] \oplus [4,4,1,1]. \end{aligned} \quad (131)$$

Собственные значения равны:

$$\begin{aligned} \lambda_{[8,2]} &= q^{-27}, & \lambda_{[8,1,1]} &= -q^{-25}, & \lambda_{[7,3]} &= -q^{-21}, \\ \lambda_{[7,2,1]_{\pm}} &= \pm q^{-18}, & \lambda_{[7,1,1,1]} &= q^{-15}, & \lambda_{[6,4]} &= q^{-17}, \\ \lambda_{[6,3,1]_{\pm}} &= \pm q^{-13}, & \lambda_{[6,2,2]} &= q^{-11}, & \lambda_{[6,2,1,1]} &= -q^{-9}, \\ \lambda_{[5,5]} &= -q^{-15}, & \lambda_{[5,4,1]_{\pm}} &= \pm q^{-10}, & \lambda_{[5,3,2]} &= -q^{-7}, \\ \lambda_{[5,3,1,1]} &= q^{-5}, & \lambda_{[4,4,2]} &= q^{-5}, & \lambda_{[4,4,1,1]} &= -q^{-3}. \end{aligned} \quad (132)$$

Среди них есть всего одна пара случайно совпадающих собственных значений:

$$\lambda_{[5,3,1,1]} = \lambda_{[4,4,2]} = q^{-5}. \quad (133)$$

Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями [4, 1]					
раз- мер	представ- ление	собственные значения		result	blocks
		кратные	случайные		
4	[5,4,3,2,1]	-	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3,1)
6	[5,5,3,2]	$\lambda_3 = \lambda_4$	$\lambda_5 = \lambda_6$	+	(3,3)
	[5,4,4,1,1]	$\lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_5$	$\lambda_6 = \lambda_7$	+	(3,3)
	[6,4,2,2,1]	-	$\lambda_4 = \lambda_5$	-	

4.7.1 [5,4,3,2,1]

$$\mathcal{R}_{[5,4,3,2,1]} = \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}_{[5,3,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,3,1,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,4,2]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,4,1,1]}}) = \text{diag}(-q^{-7}, q^{-5}, q^{-5}, -q^{-3}). \quad (134)$$

У этой матрицы только одна пара совпадающих собственных значений: $\lambda_2 = \lambda_3$. Элементы матрицы поворота равны:

$$\boxed{c_{23}^{[5,4,3,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[5,4,3,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (135)$$

После поворота матрица $\mathcal{U}_{[5,4,3,2,1]}$ становится равной:

$$\mathcal{U}'_{[5,4,3,2,1]} = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{(q^2+1)^2} & \frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} & 0 & \frac{q^4+q^2+1}{(q^2+1)^2} \\ \frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} & \frac{q^4+1}{(q^2+1)^2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{q^4+q^2+1}{(q^2+1)^2} & -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} & 0 & \frac{q^2}{(q^2+1)^2} \end{pmatrix}, \quad (136)$$

где выделяются блоки 3×3 и 1×1 .

4.7.2 [5,5,3,2]

$$\mathcal{R}_{[5,5,3,2]} = \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}_{[5,4,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,4,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[5,3,2]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[5,3,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,3,1,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,4,2]}}) = \text{diag}(-q^{-10}, q^{-10}, -q^{-7}, -q^{-7}, q^{-5}, q^{-5}). \quad (137)$$

У этой матрицы две пары совпадающих собственных значений: $\lambda_3 = \lambda_4$ и $\lambda_5 = \lambda_6$ (случайно совпадающие). Элементы матрицы поворота в секторе 5 – 6 равны:

$$\boxed{c_{56}^{[5,5,3,2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{56}^{[5,5,3,2]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (138)$$

Для второго поворота необходимо использовать две матрицы. После поворотов получаем матрицу:

$$\mathcal{U}'_{[5,5,3,2]} = \begin{pmatrix} \frac{q^3}{q^6+q^4+q^3+q^2+1} & 0 & x_{13} & 0 & x_{15} & 0 \\ 0 & -\frac{q^3}{q^6+q^4-q^3+q^2+1} & 0 & x_{24} & 0 & -x_{26} \\ x_{13} & 0 & x_{33} & 0 & x_{35} & 0 \\ 0 & x_{24} & 0 & x_{44} & 0 & -x_{46} \\ x_{15} & 0 & x_{35} & 0 & \frac{q^2(q^2+q+1)}{(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)} & 0 \\ 0 & x_{26} & 0 & x_{46} & 0 & \frac{q^2(-q^2+q-1)}{(q^2+1)((q-1)q(q^2+1)+1)} \end{pmatrix}, \quad (139)$$

где

$$\begin{aligned} x_{13} &= \frac{q\sqrt{(q^4+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, & x_{15} &= \frac{\sqrt{((q-1)q+1)(q^4+1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)}}{q^6+q^4+q^3+q^2+1}, \\ x_{24} &= -\frac{q\sqrt{(q^4+1)((q-1)q(q^2+1)+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, & x_{26} &= \frac{\sqrt{(q^2+q+1)(q^4+1)((q-1)q((q-1)q+1)(q^2+q+1)+1)}}{q^6+q^4-q^3+q^2+1}, \\ x_{33} &= q\left(\frac{1}{q^2+1} + \frac{1}{-q^2+q-1}\right) + 1, & x_{35} &= -\frac{q\sqrt{((q-1)q+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)}}{(q^6+2q^4+q^3+2q^2+q+2)q^2+1}, \\ x_{44} &= 1 - \frac{q^2}{q^4+q^3+2q^2+q+1}, & x_{46} &= q\sqrt{\frac{(q-1)q((q-1)q+1)(q^2+q+1)+1}{(q^2+1)(q^6+q^4-q^3+q^2+1)}}. \end{aligned} \quad (140)$$

$\mathcal{U}'_{[5,5,3,2]}$ распадается на блоки 3×3 и 3×3 .

4.7.3 [5,4,4,1,1]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[5,4,4,1,1]} &= \text{diag}(-q^{\mathcal{K}[5,4,1]}, q^{\mathcal{K}[5,4,1]}, q^{\mathcal{K}[5,3,1,1]}, q^{\mathcal{K}[4,4,2]}, -q^{\mathcal{K}[4,4,1,1]}, -q^{\mathcal{K}[4,4,1,1]}) = \\ &= \text{diag}(-q^{-10}, q^{-10}, q^{-5}, q^{-5}, -q^{-3}, -q^{-3}). \end{aligned} \quad (141)$$

У этой матрицы есть две пары совпадающих собственных значений: $\lambda_3 = \lambda_4$ (случайно совпадающие) и $\lambda_5 = \lambda_6$. Для первого поворота в секторе 3 – 4 используется матрица с элементами

$$\boxed{c_{34}^{[5,4,4,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[5,4,4,1,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (142)$$

$$\mathcal{U}'_{[5,4,4,1,1]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{16} \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{24} & x_{25} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} & 0 & 0 & x_{36} \\ 0 & -x_{24} & 0 & x_{44} & x_{45} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & -x_{45} & x_{55} & 0 \\ x_{16} & 0 & x_{36} & 0 & 0 & x_{66} \end{pmatrix} \quad (143)$$

Элементы матрицы $\mathcal{U}'_{[5,4,4,1,1]}$ очень объемны, поэтому не перечислены здесь. Матрица $\mathcal{U}'_{[5,4,4,1,1]}$ распадается на два блока 3×3 .

4.8 Представление [4,2]

$$\begin{aligned}
[4,2]^{\otimes 2} = & [8,4] \oplus [8,3,1] \oplus [8,2,2] \oplus [7,5] \oplus [7,4,1] \oplus [7,4,1] \oplus \\
& [7,3,2] \oplus [7,3,2] \oplus [7,3,1,1] \oplus [7,2,2,1] \oplus [6,6] \oplus [6,5,1] \oplus [6,5,1] \oplus \\
& [6,4,2] \oplus 2[6,4,2] \oplus [6,4,1,1] \oplus [6,3,3] \oplus [6,3,2,1] \oplus [6,3,2,1] \oplus [6,2,2,2] \oplus \quad (144) \\
& [5,5,2] \oplus [5,5,1,1] \oplus [5,4,3] \oplus [5,4,3] \oplus [5,4,2,1] \oplus [5,4,2,1] \oplus [5,3,3,1] \oplus \\
& [5,3,2,2] \oplus [4,4,4] \oplus [4,4,3,1] \oplus [4,4,2,2].
\end{aligned}$$

Собственные значения равны:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[8,4]} = q^{-30}, \quad \lambda_{[8,3,1]} = -q^{-26}, \quad \lambda_{[8,2,2]} = q^{-24}, \quad \lambda_{[7,5]} = -q^{-26}, \quad \lambda_{[7,4,1]_{\pm}} = \pm q^{-21}, \\
\lambda_{[7,3,2]_{\pm}} = \pm q^{-18}, \quad \lambda_{[7,3,1,1]} = q^{-16}, \quad \lambda_{[7,2,2,1]} = -q^{-14}, \quad \lambda_{[6,6]} = q^{-24}, \quad \lambda_{[6,5,1]_{\pm}} = \pm q^{-18}, \\
\lambda_{[6,4,2]_{\pm}} = \pm q^{-14}, \quad \lambda_{[6,4,1,1]} = -q^{-12}, \quad \lambda_{[6,3,3]} = -q^{-12}, \quad \lambda_{[6,3,2,1]_{\pm}} = \pm q^{-9}, \quad \lambda_{[6,2,2,2]} = q^{-6}, \\
\lambda_{[5,5,2]} = -q^{-12}, \quad \lambda_{[5,5,1,1]} = q^{-10}, \quad \lambda_{[5,4,3]_{\pm}} = \pm q^{-9}, \quad \lambda_{[5,4,2,1]_{\pm}} = \pm q^{-6}, \quad \lambda_{[5,3,3,1]} = q^{-4}, \\
\lambda_{[5,3,3,2]} = -q^{-2}, \quad \lambda_{[4,4,4]} = q^{-6}, \quad \lambda_{[4,4,3,1]} = -q^{-2}, \quad \lambda_{[4,4,2,2]} = 1.
\end{aligned} \quad (145)$$

Из них случайно совпадают следующие:

$$\begin{aligned}
\lambda_{[8,3,1]} = \lambda_{[7,5]} = -q^{-26}, \quad \lambda_{[8,2,2]} = \lambda_{[6,6]} = q^{-24}, \\
\lambda_{[7,3,2]_{\pm}} = \lambda_{[6,5,1]_{\pm}} = \pm q^{-18}, \quad \lambda_{[7,2,2,1]} = \lambda_{[6,4,2]_{-}} = -q^{-14}, \\
\lambda_{[6,4,1,1]} = \lambda_{[6,3,3]} = \lambda_{[5,5,2]} = -q^{-12}, \quad \lambda_{[6,3,2,1]_{\pm}} = \lambda_{[5,4,3]_{\pm}} = \pm q^{-9}, \\
\lambda_{[6,2,2,2]} = \lambda_{[5,4,2,1]_{+}} = \lambda_{[4,4,4]} = q^{-6}, \quad \lambda_{[5,3,2,2]} = \lambda_{[4,4,3,1]} = -q^{-2}.
\end{aligned} \quad (146)$$

Матрицы со случайно совпадающими собственными значениями [4,2]					
раз- мер	представ- ление	собственные значения		результат	блоки
		кратные	случайные		
4	[5,4,3,3,2,1]	-	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3,1)
5	[5,5,3,3,1,1]	-	$\lambda_4 = \lambda_5$	+	(3,2)
6	[5,4,4,2,2,1]	$\lambda_5 = \lambda_6$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)
	[11,6,1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3,3)

4.8.1 [5,4,3,3,2,1]

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{[5,4,3,3,2,1]} = \text{diag}(q^{\chi_{[5,3,3,1]}}, -q^{\chi_{[5,3,2,2]}}, -q^{\chi_{[5,5,3,1]}}, q^{\chi_{[4,4,2,2]}}) = \\
\text{diag}(q^{-4}, -q^{-2}, -q^{-2}, 1). \quad (147)
\end{aligned}$$

У этой матрицы всего одна пара совпадающих собственных значений: $\lambda_2 = \lambda_3$. Для поворота используется матрица с элементами:

$$\boxed{c_{23}^{[5,4,3,3,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{23}^{[5,4,3,3,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (148)$$

В результате получаем блочно-диагонализированную матрицу:

$$\mathcal{U}'_{[5,4,3,3,2,1]} = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{(q^2+1)^2} & \frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} & 0 & -\frac{q^4+q^2+1}{(q^2+1)^2} \\ -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} & -\frac{q^4+1}{(q^2+1)^2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q^4+q^2+1}{(q^2+1)^2} & \frac{\sqrt{2}q\sqrt{q^4+q^2+1}}{(q^2+1)^2} & 0 & \frac{q^2}{(q^2+1)^2} \end{pmatrix} \quad (149)$$

с блоками 3×3 и 1×1 .

4.8.2 [5,5,3,3,1,1]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[5,5,3,3,1,1]} &= \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}_{[5,4,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,4,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,3,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[5,3,2,2]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,4,3,1]}}) = \\ &= \text{diag}(-q^{-6}, q^{-6}, q^{-4}, -q^{-2}, -q^{-2}) \end{aligned} \quad (150)$$

$\lambda_4 = \lambda_5$ случайно совпадают. После поворота матрицей с элементами

$$\boxed{c_{45}^{[5,5,3,3,1,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{45}^{[5,5,3,3,1,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (151)$$

получаем матрицу с блоками 3×3 и 2×2 .

4.8.3 [5,4,4,2,2,1]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[5,4,4,2,2,1]} &= \text{diag}(-q^{\mathcal{Z}_{[5,4,2,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[5,4,2,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[5,3,2,2]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[4,4,3,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,4,2,2]}}, q^{\mathcal{Z}_{[4,4,2,2]}}) = \\ &= \text{diag}(-q^{-6}, q^{-6}, -q^{-2}, -q^{-2}, 1, 1). \end{aligned} \quad (152)$$

У этой матрицы есть две пары совпадающих собственных значений: $\lambda_3 = \lambda_4$ (случайно совпадающие), $\lambda_5 = \lambda_6$.

$$\boxed{c_{34}^{[5,4,4,2,2,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[5,4,4,2,2,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}},} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} c_{1,56}^{[5,4,4,2,2,1]} &= \sqrt{\frac{(q^4+q^2+1)(q^8+1)}{2(q^{12}+2q^8-q^6+2q^4+1)}}, & s_{1,56}^{[5,4,4,2,2,1]} &= -\frac{q^4+1}{\sqrt{2}\sqrt{q^8+q^6+2q^4+\frac{1}{q^4-q^2+1}}}, \\ c_{2,56}^{[5,4,4,2,2,1]} &= \frac{q^4+1}{\sqrt{2}\sqrt{q^8+q^6+2q^4+\frac{1}{q^4-q^2+1}}}, & s_{2,56}^{[5,4,4,2,2,1]} &= \frac{(q^4+q^2+1)(q^8+1)}{\sqrt{2}\sqrt{(q^{12}+2q^8-q^6+2q^4+1)(q^{12}+q^{10}+q^8+q^4+q^2+1)}}. \end{aligned} \quad (154)$$

$$\mathcal{U}'_{[5,4,4,2,2,1]} = \begin{pmatrix} -\frac{q^4}{q^8+q^6+2q^4+q^2+1} & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{16} \\ 0 & \frac{q^4}{q^8+q^6+q^2+1} & 0 & x_{24} & x_{25} & 0 \\ x_{13} & 0 & \frac{q^2}{q^4+1} - 1 & 0 & 0 & \frac{q}{\sqrt{q^4+q^2+1}} \\ 0 & -x_{24} & 0 & \frac{q^4+q^2+1}{(q^2+1)^2} & \frac{q\sqrt{(q^4-q^2+1)(q^8+1)}}{q^8+q^6+q^2+1} & 0 \\ 0 & x_{25} & 0 & -\frac{q\sqrt{\frac{q^8+1}{q^4-q^2+1}}}{(q^2+1)^2} & -\frac{q^6+q^2}{q^8+q^6+q^2+1} & 0 \\ -x_{16} & 0 & -\frac{q}{\sqrt{q^4+q^2+1}} & 0 & 0 & \frac{q^2}{q^4+q^2+1} \end{pmatrix}, \quad (155)$$

где

$$\begin{aligned} x_{13} &= \frac{q\sqrt{(q^2+1)(q^8+q^6+2q^4+q^2+2)q^2+1}}{q^8+q^6+2q^4+q^2+1}, & x_{16} &= \frac{\sqrt{q^8+q^6+q^4+q^2+1}}{q^4+q^2+1}, \\ x_{24} &= \frac{q\sqrt{q^{12}+q^8+q^6+q^4+1}}{q^8+q^6+q^2+1}, & x_{25} &= -\frac{\sqrt{(q^4-q^2+1)(q^8+1)(q^{12}+q^8+q^6+q^4+1)}}{(q^6+1)^2}. \end{aligned} \quad (156)$$

Матрица $\mathcal{U}'_{[5,4,4,2,2,1]}$ распадается на два блока 3×3 .

4.8.4 [11,6,1]

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{[11,6,1]} &= \text{diag}(q^{\mathcal{Z}_{[8,4]}}, q^{\mathcal{Z}_{[8,4]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[8,3,1]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[7,5]}}, -q^{\mathcal{Z}_{[7,4,1]}}, q^{\mathcal{Z}_{[7,4,1]}}) = \\ &= \text{diag}(q^{-30}, q^{-30}, -q^{-26}, -q^{-26}, -q^{-21}, q^{-21}). \end{aligned} \quad (157)$$

У матрицы есть две пары совпадающих собственных значений: $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_3 = \lambda_4$ (случайно-совпадающие).

$$\boxed{c_{34}^{[11,6,1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s_{34}^{[11,6,1]} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.} \quad (158)$$

После поворота получаем матрицу

$$\mathcal{U}'_{[11,6,1]} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & x_{15} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & x_{24} & 0 & x_{26} \\ x_{13} & 0 & x_{33} & 0 & x_{35} & 0 \\ 0 & -x_{24} & 0 & x_{44} & 0 & -x_{46} \\ x_{15} & 0 & x_{35} & 0 & x_{55} & 0 \\ 0 & x_{26} & 0 & x_{46} & 0 & x_{66} \end{pmatrix}, \quad (159)$$

$\mathcal{U}'_{[11,6,1]}$ содержит два блока 3×3 .

Заключение

\mathcal{R} -матрица — основной ингредиент, необходимый при вычислении полиномов ХОМФЛИ-ПТ (вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса) в рамках теоретико-группового подхода. В данной работе изложены как уже известные свойства \mathcal{R} -матриц, так и оригинальные результаты.

Одним из результатов является обобщение гипотезы о собственных значениях на \mathcal{R} -матрицы с совпадающими собственными значениями.

Вычисления показали, что некоторые \mathcal{R} -матрицы с совпадающими собственными значениями можно преобразовать к блочно-диагональному виду. Необходимым условием оказалось наличие у \mathcal{R} -матрицы пары совпадающих собственных значений. Для матриц размером 6×6 и больше появляется дополнительное условие: у \mathcal{R} -матрицы также должны быть кратные собственные значения: одна пара для матриц 6×6 и две пары для матриц 8×8 . При этом получившиеся блоки удовлетворяют гипотезе о собственных значениях.

Как было описано ранее, \mathcal{R} -матрицы можно вычислять для любых неприводимых конечномерных представлений $U_q(\mathfrak{su}(N))$. Это особенно важно с точки зрения теории узлов, потому что существует целый класс узлов, которые не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении — узлы-мутанты. При этом, если добавить дополнительную симметрию в структуру таких узлов, то первое представление, которое будет их различать — $[4, 2]$. Этот факт предлагалось проверить прямым вычислением полиномов ХОМФЛИ-ПТ таких узлов, что и было проделано.

Развитые в данном исследовании методы позволят продолжить работу как в направлении обобщения гипотезы о собственных значениях, так и по изучению полиномов узлов-мутантов.

Список литературы

- [1] S.-S. Chern and J. Simons, *Ann.Math.* 99 (1974) 48-69
- [2] E. Witten, *Comm.Math.Phys.* 121 (1989) 351-399
- [3] J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P. Freyd, W. B. R. Lickorish, D. Yetter. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1985), 12, 239-246;
J. Przytycki, P. Traczyk. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1987), 100, 744-748.
- [4] S.Gukov, S.Nawata, I.Saberi, M.Stosic and P.Sulkowski, arXiv:1512.07883
- [5] R.Gelca, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 133 (2002) 311-323, math/0004158
- [6] R.Gelca and J.Sain, *J. Knot Theory Ramifications*, 12 (2003) 187-201, math/0201100
- [7] S.Gukov, *Commun.Math.Phys.* 255 (2005) 577-627, hep-th/0306165
- [8] S.Garoufalidis, *Geom. Topol. Monogr.* 7 (2004) 291-309, math/0306230
- [9] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Comm. Math. Phys.* 127 (1990) 1-26
- [10] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, *Clausthal* 1989, Procs.307-317;
Phys.Lett. B235 (1990) 275
- [11] V.G. Turaev and O.Y. Viro, *Topology* 31, 865 (1992) A. Morozov and A. Smirnov,
Nucl.Phys. B835 (2010) 284-313, arXiv:1001.2003

- [12] A. Smirnov, Proc. of International School of Subnuclear Phys. Erice, Italy, 2009, arXiv:hep-th/0910.5011
- [13] R.K. Kaul, T.R. Govindarajan, Nucl.Phys. B380 (1992) 293-336, hep-th/9111063; ibid. B393 (1993) 392-412
- [14] P. Ramadevi, T.R. Govindarajan and R.K. Kaul, Nucl.Phys. B402 (1993) 548-566, hep-th/9212110
- [15] Nucl.Phys. B422 (1994) 291-306, hep-th/9312215; Mod.Phys.Lett. A10 (1995) 1635-1658, hep-th/9412084
- [16] P. Ramadevi and T. Sarkar, Nucl.Phys. B600 (2001) 487-511, hep-th/0009188
- [17] P. Ramadevi and Zodinmawia, arXiv:1107.3918; arXiv:1209.1346
- [18] H. R. Morton, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 146 (2009), 95-107
- [19] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, Physics Letters B760 (2016) 45-58, arXiv:1605.04881
- [20] N.Vilenkin and A.Klymik, Representation of Lie groups and Special Functions, Volume 3, Mathematics and its applications, Kluwer academic publisher, 1993
- [21] A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, Pis'ma v ZhETF, 106 (2017) 607, arXiv:1709.02290
- [22] Chern-Simons Theory in the Temporal Gauge and Knot Invariants through the Universal Quantum R-Matrix, A.Morozov, A. Smirnov, Nucl.Phys.B 835:284-313, 2010
- [23] A. Mironov, A. Morozov and An. Morozov, in: Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer, edited by A.Rebhan
- [24] L.Katzarkov, J.Knapp, R.Rashkov, E.Scheidegger (World Scientific Publishins Co.Pte.Ltd. 2013) pp.101-118, arXiv:1112.5754; JHEP 03 (2012) 034, arXiv:1112.2654
- [25] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov and An. Morozov, Nucl.Phys. B868 (2013) 271-313, arXiv:1207.0279
- [26] A. Anokhina, arXiv:1412.8444
- [27] Saswati Dhara, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh, A. Sleptsov, arXiv:1711.10952
- [28] <http://knotebook.org/>
- [29] <http://katlas.org>
- [30] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, Int. J. Mod. Phys. A 30 (2015) 1550169, arXiv:1508.02870

- [31] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, Journal of High Energy Physics, 2016 (2016) 134, arXiv:1605.02313
- [32] A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, JETP Lett. 104 (2016) 56-61, Pisma Zh.Eksp.Teor.Fiz. 104 (2016) 52-57, arXiv:1605.03098
- [33] Sh. Shakirov, A. Sleptsov, arXiv:1611.03797
- [34] N. Reshetikhin, Quantized Universal Enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links; Part 1: preprint LOMI E-4-87, 1988; Part 2: preprint LOMI E-17-87, 1988
- [35] V. G. Drinfeld, "Quasi-Hopf algebras", Algebra i Analiz, 1:6 (1989), 114 - 148; Leningrad Math. J., 1:6 (1990), 1419 - 1457
- [36] Mark D. Gould, Yao-Zhong Zhang, J.Math.Phys. 35 (1994), 6757 - 6773, arXiv:hep-th/9311041
- [37] H.Itoyama, A.Mironov, A.Morozov, An.Morozov, International Journal of Modern Physics A28, 3n04 (2013) 1340009, arXiv:1209.6304