

# $\mathcal{R}$ -матрицы и представления квантовых групп

Людмила Бишлер

МГУ

24 мая 2019

# Теория Черна-Саймонса

Теория Черна-Саймонса — трехмерная топологическая квантовая теория поля с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \epsilon^{ijk} \left( \delta_{ab} \mathcal{A}_i^a \partial_j \mathcal{A}_k^b + \frac{2}{3} \lambda_{abc} \mathcal{A}_i^a \mathcal{A}_j^b \mathcal{A}_k^c \right), \quad (1)$$

который не зависит от метрики, при этом  $k$  — целое.

# Полиномы ХОМФЛИ-ПТ

Средние значения петель Вильсона в теории Черна-Саймонса

$$\langle W^{\mathcal{K}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{M}} [DA] \text{TrPexp} \left( \oint_{\mathcal{K}} A dx \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[A]}$$

совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ

$$\langle W^{\mathcal{K}} \rangle = H^{\mathcal{K}} \left( A = q^N, q = e^{\frac{2\pi i}{k+N}} \right) \quad (2)$$

# Действие Черна-Саймонса во временной калибровке

Во временной калибровке  $\mathcal{A}_0 = 0$  лагранжиан Черна-Саймонса (1) становится квадратичным:

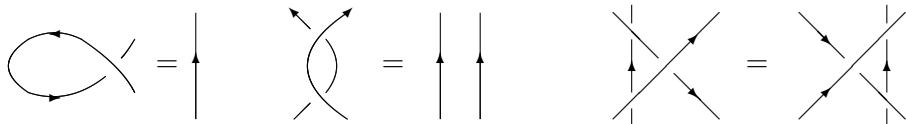
$$\tilde{\mathcal{L}}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \delta_{ab} (\mathcal{A}_1^a \partial_0 \mathcal{A}_2^b - \mathcal{A}_2^a \partial_0 \mathcal{A}_1^b) \quad (3)$$

а пропагатор:

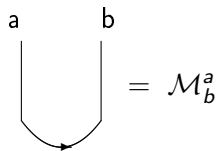
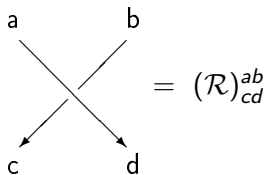
$$D(x, y) \sim \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2) \theta(x^0 - y^0). \quad (4)$$

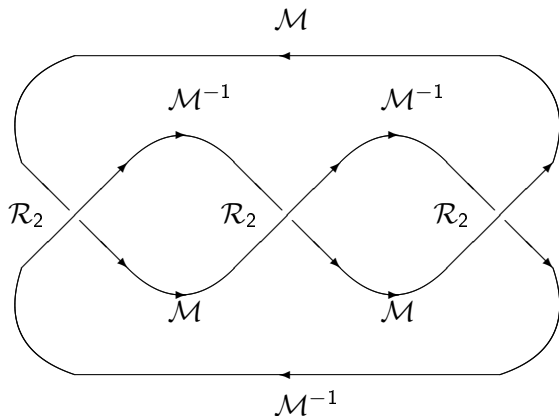
# $\mathcal{R}$ -матричный формализм

Движения Рейдемейстера:



Основные элементы диаграммы узла:





$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{tref} &= \text{Tr} (\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^{-1} \mathcal{R}_2 \mathcal{M}_2^{-1} \mathcal{M}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{R}_2) = \\ &= \text{Tr} (\mathcal{R}^3 \mathcal{M}_2^2 (\mathcal{M}_1^{-1})^2) = \text{Tr} (\mathcal{R}^3 \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1^{-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \otimes 1$ ,  $\mathcal{M}_2 = 1 \otimes \mathcal{M}$ .

# Квантованная универсальная обертывающая $U_q(\mathfrak{su}(N))$

$U_q(\mathfrak{su}(N))$  задается набором  $3(N - 1)$  генераторов  $E_i, F_i, K_i = q^{h_i}$  ( $i = 1, \dots, (N - 1)$ ), которые удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, E_j] = a_{ij}E_j, \quad [h_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}$$

и соотношениям Серра.

Конечномерные неприводимые представления  $U_q(\mathfrak{su}(N))$  нумеруются диаграммами Юнга  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}\}$ .

## Универсальная квантовая $\mathcal{R}$ -матрица

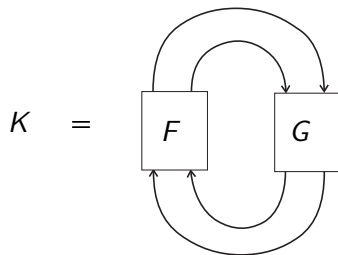
$$\mathcal{R} = \mathcal{P} q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \overrightarrow{\prod}_{\beta \in \Phi^+} \exp_q((q - q^{-1})E_\beta \otimes F_\beta), \quad (6)$$

где для  $U_q(\mathfrak{su}(3))$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x \otimes y) &= y \otimes x, \\ \Phi^+ &\text{ — положительные корни : } \Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}, \\ E_{\alpha_1} &= E_1, \quad E_{\alpha_2} = E_2, \quad E_{\alpha_1 + \alpha_2} = E_{12} = q^{-1}E_2E_1 - E_1E_2, \\ F_{\alpha_1} &= F_1, \quad F_{\alpha_2} = F_2, \quad F_{\alpha_1 + \alpha_2} = F_{12} = qF_1F_2 - F_2F_1, \\ \exp_q A &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}. \end{aligned} \quad (7)$$



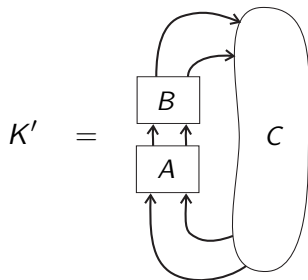
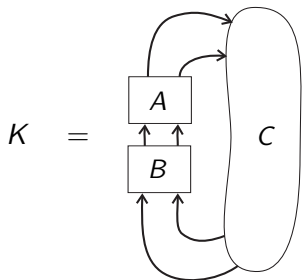
# Узлы-мутанты



мутации:

$$\tau_1(F) = \boxed{F} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array}, \quad \tau_2(F) = \boxed{F} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \uparrow \end{array}, \quad \tau_3(F) = \boxed{F} \begin{array}{c} \downarrow \\ \curvearrowleft \end{array}$$

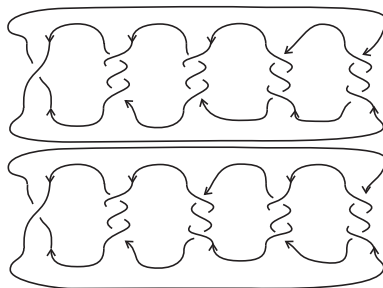
## Узлы-мутанты с дополнительной симметрией



для которых выполняется условие:

$$A = \begin{array}{c} \boxed{A} \\ \downarrow \curvearrowright \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \boxed{B} \\ \downarrow \curvearrowright \end{array}$$

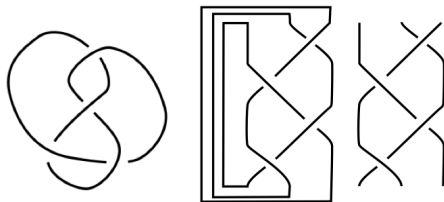
## Вычисление разностей полиномов узлов-мутантов



$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}_{(1,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} - \mathcal{H}_{(1,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
 & 2q^{-126}(q^2 - 1)^{18}(q^2 + 1)^{10}(q^4 + 1)^4(q^4 - q^2 + 1)^5 \\
 & (q^4 + q^2 + 1)^7(q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3(q^{20} - q^{16} + q^{14} + \\
 & q^{12} - q^{10} + q^8 + q^6 - q^4 + 1)^2(q^{20} + q^{18} + q^{16} + q^{14} + 2q^{12} + \\
 & 2q^{10} + 2q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{H}_{(3,3,3,-3,-3)}^{[4,2]} - \mathcal{H}_{(3,3,-3,3,-3)}^{[4,2]} = \\
 & (2(q^2 - 1)^{18}(q^2 + 1)^{10}(q^4 + 1)^4(q^4 - q^2 + 1)^5(q^4 + q^2 + 1)^7 \\
 & (q^8 + q^6 + q^4 + q^2 + 1)^3(q^{20} - q^{16} + q^{14} + q^{12} - q^{10} + q^8 + q^6 - \\
 & q^4 + 1)^2(2q^{84} - 2q^{82} - 2q^{80} + 5q^{78} - 5q^{76} - 2q^{74} + 14q^{72} - 14q^{70} - \\
 & 12q^{68} + 35q^{66} - 13q^{64} - 33q^{62} + 46q^{60} + 4q^{58} - 54q^{56} + 34q^{54} + \\
 & 24q^{52} - 49q^{50} + 15q^{48} + 18q^{46} - 37q^{44} + 19q^{42} + 15q^{40} - 39q^{38} + \\
 & 23q^{36} + 23q^{34} - 40q^{32} + 12q^{30} + 37q^{28} - 26q^{26} - 11q^{24} + 30q^{22} + \\
 & q^{20} - 16q^{18} + 10q^{16} + 12q^{14} - 5q^{12} - 3q^{10} + 8q^8 + 3q^6 - 2q^4 + \\
 & q^2 + 2)q^{-174}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

## $\mathcal{R}$ -матрицы в трехнитевых косах



$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \otimes I, \quad \mathcal{R}_2 = I \otimes \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}_2 = U\mathcal{R}_1U^\dagger. \quad (10)$$

Полином можно вычислить по формуле:

$$H_{T_1 \otimes T_2 \dots}^{\mathcal{K}} = \widetilde{\text{Tr}}_{T_1 \otimes T_2 \dots} \prod_{\alpha} \mathcal{R}_{\alpha}, \quad (11)$$

где  $\alpha$  пробегает все пересечения в косе.

## Гипотеза о собственных значениях

Существует базис, в котором матрицы  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$  будут иметь блочно-диагональную структуру:

$$\mathcal{R}_{1;Q'_k} = \text{diag}(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_{a_j}}), \quad \mathcal{R}_{2;Q'_k} = (U_{Q'_k})^\dagger \mathcal{R}_{1;Q'_k} U_{Q'_k}. \quad (12)$$

Уравнение Янга-Бакстера:

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \quad (13)$$

можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{R}_1 U \mathcal{R}_1 U^\dagger \mathcal{R}_1 = U \mathcal{R}_1 U^\dagger \mathcal{R}_1 U \mathcal{R}_1 U^\dagger. \quad (14)$$

Гипотеза о собственных значениях: если все собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы различны, то они полностью определяют элементы соответствующей матрицы Рака.

## Гипотеза о блочной структуре $\mathcal{R}$ -матриц

Были рассмотрены матрицы Рака (до размера  $8 \times 8$ ), соответствующие представлениям из  $[2, 1]^{\otimes 3}$ ,  $[3, 1]^{\otimes 3}$ ,  $[3, 2]^{\otimes 3}$ ,  $[4, 1]^{\otimes 3}$ ,  $[4, 2]^{\otimes 3}$  с совпадающими собственными значениями.

Собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц определяются представлениями  $Q_i$  из разложения  $T \otimes T = \bigoplus_i a_i Q_i$  и совпадают в двух случаях:

- 1  $a_i > 1$  — кратные собственные значения,
- 2  $\lambda_{Q_i} = \lambda_{Q_j}$ ,  $Q_i \neq Q_j$  — случайно совпадающие собственные значения.

## Результаты

В результате сформулированы гипотезы:

- 1 Матрица  $\mathcal{R}_2$  может быть преобразована к блочно-диагональному виду, если у нее есть пара случайно совпадающих собственных значений, а так же 1 и 2 пары кратных собственных значений для матриц размером  $6 \times 6$  и  $8 \times 8$  соответственно.
- 2 Угол поворота в секторах, соответствующих случайно совпадающим собственным значениям, из базиса, определенного матрицей Рака, в базис, в котором матрица блочно-диагонализуется, равен  $\pm \frac{\pi}{4}$ .



## Пример

$$\mathcal{R}_{[4,3,2,2,1]} = \text{diag}(q^{\chi_{[4,2,2]}}, -q^{\chi_{[4,2,1,1]}}, -q^{\chi_{[3,3,2]}}, q^{\chi_{[3,3,1,1]}}) = \text{diag}(q^{-2}, 1, 1, q^2). \quad (15)$$

Соответствующая матрица Рака поворотом в секторе 2 – 3 приводится к блочно-диагональному виду:

$$\mathcal{U}'_{[4,3,2,2,1]} = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{(1+q^2)^2} & \frac{(\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4})}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} \\ -\frac{\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4}}{(1+q^2)^2} & \frac{(-1-q^4)}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4}}{(1+q^2)^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+q^2+q^4}{(1+q^2)^2} & -\frac{(\sqrt{2}q\sqrt{1+q^2+q^4})}{(1+q^2)^2} & 0 & \frac{q^2}{(1+q^2)^2} \end{pmatrix}.$$

## Доказательство первой гипотезы

 $2 \times 2$ :

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

 $3 \times 3$ 

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$YB_{12} = \lambda_3 c_1 c_2 = 0. \quad (18)$$

“On the block structure of the quantum R-matrix in the three-strand braid”, L.Bishler, An. Morozov, Sh. Shakirov, A.Sleptsov, International Journal of Modern Physics A, Vol. 33, No. 17 (2018)

arXiv:1712.07034

Спасибо за внимание!

## Гипотеза о собственных значениях

Если все собственные значения матрицы  $\mathcal{R}_Q^1$ - различны, то они однозначно определяют соответствующую матрицу Рака  $\mathcal{U}_Q$ .  
Например,

$$\mathcal{R}_Q^1 = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{t_2 - t_1} & \frac{\sqrt{t_1^2 + 1 + t_2^2}}{t_1 - t_2} \\ \frac{\sqrt{t_1^2 + 1 + t_2^2}}{t_1 - t_2} & \frac{1}{t_1 - t_2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

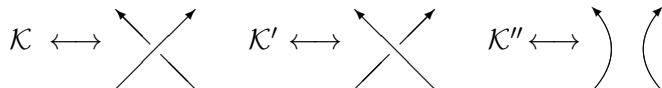
[2, 1]					
size	repr	eigenvalues		result	blocks
		multiplicity	accidental		
6	[5, 3, 1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3, 3)
8	[4, 3, 2]	$\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3, 5)
9	[4, 3, 1, 1]	$\lambda_4 = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$	$\lambda_2 = \lambda_3$	-	
[3, 1]					
4	[4, 3, 2, 2, 1]		$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3, 1)
5	[4, 4, 2, 2]		$\lambda_1 = \lambda_2$	+	(3, 2)
6	[4, 3, 3, 1, 1]	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\lambda_3 = \lambda_4$	+	(3, 3)
9	[5, 3, 2, 2]	$\lambda_4 = \lambda_5$	$\lambda_2 = \lambda_3$	-	-
	[4, 4, 3, 1]	$\lambda_5 = \lambda_6, \lambda_7 = \lambda_8$	$\lambda_2 = \lambda_3$	+	(3, 6)

## Наборы собственных значений у $\mathcal{R}$ -матриц:

- 1 все собственные значения различны,
- 2 некоторые собственные значения совпадают из-за кратности ( $a_i > 1$  и/или  $b_i > 1$  в разложениях  $T^{\otimes 2} = \bigoplus_i a_i Q_i$  and  $T^{\otimes 3} = \bigoplus_i b_i Q_i$ )  $\longrightarrow$  повторяющиеся собственные значения
- 3 некоторые собственные значения случайно совпадают ( $\epsilon_{Q_i} q^{z_{Q_i}} = \epsilon_{Q_j} q^{z_{Q_j}}$ , но  $Q_i \neq Q_j$ )  $\longrightarrow$  случайно совпадающие собственные значения,
- 4 есть как повторяющиеся ( $\lambda$ ), так и случайно совпадающие собственные значения ( $\mu$ ), которые не пересекаются ( $\nexists \lambda_i, \mu_j : \lambda_i = \mu_j$ ),
- 5 есть как повторяющиеся ( $\lambda$ ), так и случайно совпадающие собственные значения ( $\mu$ ), которые так же могут совпадать между собой ( $\exists \lambda_i, \mu_j : \lambda_i = \mu_j$ ).

## Полиномы ХОМФЛИ-ПТ в теории узлов

В теории узлов полиномы ХОМФЛИ-ПТ определяются при помощи скейн-соотношений.



$$AH^K(A, q) - A^{-1}H^{K'}(A, q) = (q - q^{-1})H^{K''}(A, q). \quad (20)$$

Вместе с заданием полинома ХОМФЛИ-ПТ простейшего узла — неузла

$$H^0(A, q) = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (21)$$

скейн-соотношения позволяют однозначно определить полином ХОМФЛИ-ПТ любого узла и зацепления.