

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«ПРОБЛЕМА СИЛЬНОЙ СВЯЗИ В МОДЕЛИ ГАЛИЛЕОННОГО
ГЕНЕЗИСА»**

Выполнил студент

243м группы:

Агеева Юлия Александровна

подпись студента

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, академик РАН, профессор, зав. кафедрой

Рубаков Валерий Анатольевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите

Зав. кафедрой _____

подпись зав. кафедрой

Москва

2019 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Проблема начальной космологической сингулярности и нарушение изотропного условия энергодоминантности в теории Хорндески как ее решение	9
2 Модель Генезиса	11
3 Исследование режима сильной связи	15
3.1 Скалярный сектор	15
3.2 Тензорный сектор	22
4 Выводы и заключение	26
Список литературы	29
Приложение	32

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день инфляция является основным кандидатом на описание эволюции ранней Вселенной. Теория инфляции последовательно объясняет текущие космологические наблюдения. Тем не менее, альтернативные ранние эпохи жизни Вселенной также заслуживают рассмотрения. Изучение одного из таких альтернативных сценариев и является целью данной диссертации.

Во-первых, чтобы убедиться, что инфляция действительно имела место в далёком прошлом, все другие вероятные сценарии должны быть исключены. Во-вторых, даже инфляция не может решить проблему начальной сингулярности [1]. Таким образом, поиск альтернатив инфляционной модели является весьма мотивированной задачей.

Такие альтернативные теории ранней Вселенной как отскок [2–5] или генезис [6–12] не обязательно должны полностью исключить инфляционную эпоху, но могут быть и дополнением к ней, чтобы избавить модель ранней Вселенной от начальной сингулярности. Эпоха генезиса в данной работе изучается в рамках теории Хорндески. Теория Хорндески или теория обобщенного галилеона [13–23] - это общее скалярно-тензорное обобщение теории гравитации. Такие теории имеют замечательное свойство: их лагранжианы содержат производные второго порядка, однако при этом уравнения движения не содержат производные выше второго порядка. Они позволяют нарушать изотропное условие энергодоминантности (см., например, обзор [24]):

$$T_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu > 0,$$

в рассматриваемой теории, оставляя при этом все решения стабильными. В формуле выше $T_{\mu\nu}$ - это тензор энергии-импульса, η^μ - любой изотропный вектор. Нарушение данного условия энергодоминантности позволяет построить несингу-

лярную космологию (конкретно в данной работе генезис), что и является нашей целью.

В модели генезиса эволюция Вселенной стартует с бесконечного отрицательного времени и плоского пространства Минковского, далее постепенно плотность энергии поля галилеона начинает расти и при приближении к $t = 0$ происходит переход к инфляционной стадии или же разогрев и переход на горячую стадию.

Однако, на этом история не заканчивается. В работе [25] было отмечено, что одним из возможных сценариев генезиса, свободным от неустойчивостей во все космологические эпохи¹, является тот, в котором, на первый взгляд, возникает режим сильной связи на очень ранних временах.

Это можно увидеть из анализа теории на устойчивость. В данной диссертации изучается подкласс теории Хорндески вида:

$$\mathcal{L}_H = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi)R, \quad (1)$$

где G_2 , G_3 и G_4 функции переменной поля галилеона и переменной вида кинетического слагаемого:

$$X = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi.$$

Рассмотрим такую теорию в возмущенной метрике вида:

$$ds^2 = -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (2)$$

где

$$\gamma_{ij} = a^2e^{2\zeta}e^{h_{ij}}, \quad (3)$$

а ζ и h_{ij} - скалярное и тензорное возмущения (хотя следует сказать, что в данную метрику входят и другие скалярные возмущения - об этом и о метрике такого вида

¹В [25] показана возможность обхода так называемой запрещающей теоремы.

в целом будет подробно изложено в главе 3 и в разделах 3.1 и 3.2). Подставляя данную метрику в действие с выбранным лагранжианом Хорндески и раскладывая его до второго порядка по возмущениям ζ и h_{ij} , получим квадратичное действие для этих возмущений вида:

$$S_{\zeta}^{(2)} = \int N dt d^3x a^3 \left[A_S \frac{\dot{\zeta}^2}{N^2} - \frac{B_S}{a^2} (\partial\zeta)^2 \right], \quad (4)$$

$$S_h^{(2)} = \frac{1}{8} \int N dt d^3x a^3 \left[A_T \frac{\dot{h}_{ij}^2}{N^2} - \frac{B_T}{a^2} (\partial h_{ij})^2 \right], \quad (5)$$

где коэффициенты A_S, B_S, A_T, B_T есть комбинации функций начального невозмущенного лагранжиана:

$$A_T = 2G_4, \quad (6)$$

$$B_T = 2G_4, \quad (7)$$

а коэффициенты для действия скалярных возмущений имеют более сложный вид (см. раздел 3.1). Известно, что теория будет свободна от градиентных и духовых неустойчивостей, если

$$A_S, B_S, A_T, B_T > 0, \quad (8)$$

причем здесь важна гладкость этих функций по времени (эти коэффициенты действительно являются функциями времени, так как зависят изначально от поля галилеона ϕ , а оно в свою очередь зависит от времени t). Благодаря тому, что коэффициент B_S в данной теории можно записать как:

$$B_S = \frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} - B_T, \quad (9)$$

то одно из условий стабильности $B_S > 0$:

$$\frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} - B_T > 0 \text{ при } -\infty < t < \infty, \quad (10)$$

и здесь $\xi = aA_T^2/W$, где W - очередная громоздкая комбинация функций невозмущенного лагранжиана, $a = a(t)$ есть масштабный фактор. Важно теперь отметить, что для любого момента времени $|W| < \infty$, $A_T^2 > 0$, а масштабный фактор $a \geq const$ и растет со временем (это общие требования для построения неособенной и устойчивой космологической модели). Это означает, что введенная ξ является монотонно растущей функцией времени, которая никогда не пересекает ноль. Интегрируя (10) от $-\infty$ до некоторого момента t и от него же до ∞ , получаем:

$$\xi(t) - \xi(-\infty) > \int_{-\infty}^t a(t)B_T dt, \quad (11)$$

и

$$\xi(\infty) - \xi(t) > \int_t^{\infty} a(t)B_T dt. \quad (12)$$

Очевидно, для стабильности требуем, чтобы интегралы сходились. Несходимость интегралов будет означать, что в какой-то момент эволюции Вселенной условия устойчивости нарушены. Это возможно сделать подбором правильных асимптотик коэффициента B_T , конкретно здесь он должен быстро идти к нулю, чтобы подавить рост масштабного фактора на бесконечностях. Таковы общие соображения так называемых запрещающих теорем.

В данном случае опасность запрещающей теоремы кроется в следующем. Если рассмотреть теорию, в которой поле галилеона взаимодействует с гравитацией минимально, то есть в лагранжиане Хорндески положить $G_4 = M_{Pl}^2/2 = const$, то запрещающая теорема мгновенно говорит нам о том, что один из интегралов выше расходится и в какой-то момент эволюции условия устойчивости будут нарушены (ведь $B_T = 2G_4$).

Для обхода запрещающей теоремы, то есть построения устойчивой космологии (для нас это будет генезис, очень ранние времена) требуются стремление функции G_4 к нулю при $t \rightarrow -\infty$.

Таким образом обойти запрещающую теорему можно, но возникает новая проблема. Стремление к нулю коэффициента в слагаемом типа

$$\mathcal{L}_H \ni G_4 R,$$

сигнализирует нам о том, что в теории есть потенциальная возможность сильной связи на ранних временах. В силу этого отпадает возможность описывать систему доступными классическими методами. В данной работе детально рассматривается именно этот вопрос, и в результате показано, что классическое полевое описание эволюции Вселенной в ранние времена всё же возможно в рамках рассматриваемой модели. Следует убедиться в том, что даже при эффективной массе Планка, стремящейся к нулю в далеком прошлом (что и является наивным сигналом о возникновении сильной связи в теории), классический анализ является законным в определённом диапазоне параметров выбранного нами лагранжиана Хорндески.

Анализ режима сильной связи или, иными словами, возможность применения классического полевого описания эволюции Вселенной на ранних стадиях производится следующим образом: необходимо определить и сравнить характерные масштабы энергии. С одной стороны это масштаб сильной связи, который связан с взаимодействиями возмущений метрики – в нашей модели мы рассмотрели скалярные и тензорные возмущения метрики, а так же предстоит изучить смешанный сектор (взаимодействия типа ”тензор-скаляр-скаляр” и ”тензор-тензор-скаляр”). С другой стороны - обратное характерное время эволюции космологических решений (т.н. решений бэкграунда или фоновых решений).

В главе 1 обсуждается возможность построения несингулярных космологических сценариев в рамках теории Хорндески. В главе 2 приведена модель генезиса, которая полностью свободна от неустойчивостей, но которая потенциально находится в режиме сильной связи. Поэтому в главе 3 производится детальный анализ действия второго и третьего порядков по скалярным (раздел 3.1) и тен-

зорным возмущениям (раздел 3.2), определяются характерные классический масштаб энергий и масштаб энергий сильной связи. Из их сравнения были найдены условия отсутствия в модели генезиса режима сильной связи. Это, однако, налагает на параметры теории сильные ограничения. Выводы и заключение приведены в главе 4.

1. ПРОБЛЕМА НАЧАЛЬНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ И НАРУШЕНИЕ ИЗОТРОПНОГО УСЛОВИЯ ЭНЕРГОДОМИНАНТНОСТИ В ТЕОРИИ ХОРНДЕСКИ КАК ЕЕ РЕШЕНИЕ

Среди множества условий энергодоминантности в теориях гравитации особое место занимает изотропное условие (Null Energy Condition, всюду далее NEC) для тензора энергии-импульса вещества $T_{\mu\nu}$, которое имеет вид

$$T_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu \geq 0 \quad (13)$$

для любого изотропного вектора η^μ . В космологическом контексте NEC имеет интересное следствие. А именно, в рамках общей теории относительности, для пространственно-плоской метрики Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера для расширяющейся Вселенной, которая заполнена изотропным и однородным веществом, из уравнений Эйнштейна следует, что параметр Хаббла H со временем не возрастает, то есть $dH/dt \leq 0$. Это означает, что в далеком прошлом параметр Хаббла был бесконечно велик. Из закона ковариантного закона сохранения энергии $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ следует так же, что $\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p) \leq 0$, то есть в расширяющейся Вселенной плотность энергии уменьшается со временем. Таким образом, для приведенной выше модели расширение Вселенной началось с сингулярности, которая характеризуется бесконечными плотностью энергии ρ и темпом расширения H .

Таким образом, возникает идея нарушать NEC для построения несингулярной космологии. Однако, при нарушении NEC появляются следующие трудности. Так, для модели одного скалярного поля возникают неустойчивые возмущения над фоновым полем.

В данной работе для нарушения NEC используется весьма нетривиальная теория Хорндески или теория обобщенного галилеона [6–12], в рамках которой

можно нарушать NEC без возникновения неустойчивостей. Ее наиболее примечательным свойством является тот факт, что несмотря на наличие вторых производных по времени и пространственным координатам в лагранжиане, уравнения движения остаются второго порядка по производным. Наиболее общий вид лагранжиана, приводящий к полевым уравнениям второго порядка, был получен Г. Хорндески в [13]. Лагранжиан данной теории имеет вид

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_H, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + \\ & G_4(\phi, X) R + G_{4,X} [(\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2] \\ & + G_5(\phi, X) G^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \\ & - \frac{1}{6} G_{5,X} [(\square \phi)^3 - 3 \square \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2 + 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^3], \end{aligned} \quad (15)$$

где ϕ - скалярное поле галилеона, X - переменная вида кинетического слагаемого:

$$X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi,$$

а оператор Д'Аламбера имеет вид:

$$\square \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi.$$

Функции G_2, G_3, G_4, G_5 в лагранжиане (15) - произвольные функции поля ϕ и переменной X , R - скаляр Риччи, а $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ - тензор Эйнштейна, сигнатура метрики выбрана положительно определенной, $(-, +, +, +)$.

Рассмотрим частный случай лагранжиана (15) вида:

$$\mathcal{L}_H = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X) \square \phi + G_4(\phi) R, \quad (16)$$

Подчеркнем, что функция G_4 в данной модели зависит только от поля ϕ . В рамках такой теории при подборе соответствующих функций лагранжиана возможно построить несингулярные космологические сценарии. Перейдем непосредственно к построению модели генезиса в теории Хорндески.

2. МОДЕЛЬ ГЕНЕЗИСА

Для получения решения типа генезиса в теории Хорндески удобнее перейти из ковариантного формализма (15) в формализм Арновитта - Дезера - Мизнера (везде далее - АДМ), как это было сделано в работе [25]. Формализм предполагает, что пространство-время можно расслоить на совокупность пространственно-подобных 3-мерных гиперповерхностей, которые параметризуются временной координатой, а на каждой гиперповерхности вводятся пространственные координаты. Уравнения движения в общей теории относительности в рамках данного формализма оказываются записанными в гамильтоновой форме. Лагранжиан Хорндески (15) в формализме АДМ имеет вид:

$$\mathcal{L}_H = A_2(t, N) + A_3(t, N)K + A_4(K^2 - K_{ij}^2) + B_4(t, N)R^{(3)}, \quad (17)$$

где мы используем унитарную калибровку $\phi = \phi(t)$, а также K_{ij} внешняя кривизна, $K = g^{ij}K_{ij}$ и $R_{ij}^{(3)}$ трехмерный (пространственный) тензор Риччи. Функции A_2, A_3, A_4, B_4 снова произвольные функции, но теперь новых переменных АДМ - времени t и т.н. функции хода N .

Функции лагранжианов записанные в двух различных формализмах (15) и (17) связаны следующими соотношениями:

$$G_2 = A_2 - 2XF_\phi, \quad (18)$$

$$G_3 = -2XF_X - F, \quad (19)$$

$$G_4 = B_4. \quad (20)$$

Здесь $F(\phi, X)$ - некая вспомогательная функция, для которой выполняется соотношение:

$$F_X = -\frac{A_3}{(2X)^{\frac{3}{2}}} - \frac{B_4\phi}{X}. \quad (21)$$

Так же была выбрана следующая калибровка:

$$e^{-\phi} = -\sqrt{2Y_0t},$$

и

$$e^{\phi} \sqrt{\frac{Y_0}{X}} = N. \quad (22)$$

При построении модели генезиса возникает следующая проблема. В большинстве случаев такие решения обладают градиентной неустойчивостью, которая может возникнуть в то или иное время в дальнейшей космологической эволюции Вселенной [25–28]. Для доказательства существования таких неустойчивостей в разных теориях формулируются так называемые ”запрещающие теоремы” или ”No-Go теоремы”. Для выбранного нами лагранжиана Хорндески (17) была доказана соответствующая No-Go теорема [25], но в то же время был указан и путь ее обхода. Для этого функции лагранжиана (17) нужно взять в виде:

$$A_2 = M_{Pl}^4 f^{-2(\alpha+1)-\delta} a_2(N), \quad (23)$$

$$A_3 = M_{PL}^3 f^{-2\alpha-1-\delta} a_3(N), \quad (24)$$

$$A_4 = -B_4 = -M_{Pl} f^{-2\alpha}, \quad (25)$$

где α, δ - единственные параметры лагранжиана и теории в целом, причем $2\alpha > 1 + \delta > 0$ (первая часть неравенства требуется для обхода No-Go теоремы [25], а вторая - для построения генезиса), M_{Pl} - масса Планка, а $f(t)$ - некая функция, имеющая при $t \rightarrow -\infty$ асимптотику:

$$f \approx -ct, \quad c = \text{const} > 0. \quad (26)$$

В [25] был выбран конкретный вид функций $a_2(N), a_3(N)$:

$$a_2(N) = -\frac{1}{N^2} + \frac{1}{3N^4}, \quad (27)$$

$$a_3(N) = \frac{1}{4N^3}. \quad (28)$$

Невозмущенная метрика в нашей задаче имеет вид:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 dx_i dx^i, \quad (29)$$

где $a(t)$ - масштабный фактор. Уравнения движения получаются вариацией невозмущенной части лагранжиана по N и a [29]:

$$\mathcal{L}^{(0)} = Na^3(A_2 + 2A_3H + 6A_4H^2). \quad (30)$$

В итоге получаем:

$$(NA_2)_N + 3NA_3NH + 6N^2(N^{-1}A_4)_NH^2 = 0, \quad (31)$$

$$A_2 - 6A_4H^2 - \frac{1}{N} \frac{d}{dt} (A_3 + 4A_4H) = 0, \quad (32)$$

где $H = \dot{a}/(Na)$ - параметр Хаббла. При $t \rightarrow -\infty$ решение этих уравнений имеет вид:

$$H \approx \frac{\chi}{(-t)^{1+\delta}}, \quad (33)$$

$$a \approx 1 + \frac{\chi}{\delta(-t)^\delta}, \quad N \approx 1, \quad (34)$$

что и являет собой стадию генезиса: масштабный фактор и функция хода при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к постоянному значению. Это и означает, что эволюция Вселенной в далеком прошлом стартовала с плоского пространства Минковского. Константа χ имеет вид:

$$\chi = \frac{\frac{2}{3}M_{Pl}^2 + \frac{c}{4}(2\alpha + 1 + \delta)M_{Pl}}{4(2\alpha + 1 + \delta)c^{2+\delta}}. \quad (35)$$

Чтобы данная модель была устойчива в последующие времена, требуется наложить следующее условие на функции лагранжиана:

$$B_4(t, N), A_4(t, N) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty, \quad (36)$$

или для ковариантного формализма:

$$G_4(\phi, X) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty. \quad (37)$$

С одной стороны, такие условия необходимо соблюдать, чтобы избежать градиентных и духовых неустойчивостей [25], но с другой стороны условие (37) сигнализирует нам о возможном наличии в теории сильной связи на временах $t \rightarrow -\infty$.

Этот вопрос детально изучен далее, рассмотрены второй и третий порядки действия по возмущениям и показано, что классическое описание эволюции Вселенной на столь ранних временах возможно при определенных значениях параметров α, δ .

3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

3.1 Скалярный сектор

Рассмотрим скалярные возмущения метрики. Возмущенная метрика имеет вид:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (38)$$

где

$$N = e^\alpha, \quad N_i = \partial_i \beta, \quad \gamma_{ij} = a^2 e^{2\zeta} e^{h_{ij}}, \quad (39)$$

α, β, ζ - скалярные возмущения, а h_{ij} - тензорное. Для рассмотрения скалярного сектора полагаем $e^{h_{ij}} = \delta_{ij}$. Раскадывая действие (14) до второго порядка по скалярным возмущениям, получаем квадратичное действие в унитарной калибровке:

$$S_{\alpha, \beta, \zeta}^{(2)} = \int N dt a d^3 x [-3g_\zeta \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta}\right)^2 + c_\zeta (\partial\zeta)^2 - 3a^2 H^2 m_\alpha \alpha^2 + 2g_\zeta \partial\alpha \partial\zeta + 6\frac{a^2}{N} H f_\alpha \alpha \dot{\zeta} + 2\frac{a}{N} g_\zeta \zeta \partial^2 \beta - 2aH f_\alpha \alpha \partial^2 \beta], \quad (40)$$

где ∂ обозначает производную по пространственным координатам, а также введены обозначения:

$$\begin{aligned} g_\zeta &= 2(B_4 + NB_{4N}), \\ c_\zeta &= 2B_4, \\ f_\alpha &= 2\left(\frac{NA_{3N}}{4H} + B_4 - NB_{4N} - N^2 B_{4NN}\right), \\ m_\alpha &= B_4 - NB_{4N} + 2N^2 B_{4NN} + N^3 B_{4NNN} \\ &\quad - \frac{1}{6H^2} (A_2 + 3NA_{2N} + N^2 A_{2NN}) - \frac{1}{2H} (NA_{3N} + N^2 A_{3NN}). \end{aligned} \quad (41)$$

Асимптотики этих функций на $t \rightarrow -\infty$ при полученных ранее фоновых решениях (33) и (34):

$$g_\zeta \sim c_\zeta \sim (-t)^{-2\alpha}, \quad (42a)$$

$$f_\alpha \sim (-t)^{-2\alpha}, \quad (42b)$$

$$m_\alpha \sim -(-t)^{-2\alpha+\delta}. \quad (42c)$$

Возмущения α и β возможно исключить из квадратичного действия. Соответствующие уравнения связи имеют вид:

$$\alpha = \frac{g_\zeta}{H f_\alpha} \frac{1}{N} \dot{\zeta}, \quad (43)$$

$$\partial^2 \beta = \frac{g_\zeta}{a H f_\alpha} \partial^2 \zeta - 3 \left(\frac{g_\zeta m_\alpha}{f_\alpha^2} - 1 \right) \frac{a}{N} \dot{\zeta}, \quad (44)$$

где мы для удобства записи введем $\omega = g_\zeta / a H f_\alpha$ и $\sigma = 3(g_\zeta m_\alpha / f_\alpha^2 - 1)$. Соответственно, асимптотики этих новых функций при $t \rightarrow -\infty$:

$$\omega \sim (-t)^{1+\delta}, \quad \sigma \sim (-t)^\delta. \quad (45)$$

Подставляя уравнения связи (44) в действие (40), получаем квадратичное действие для возмущения ζ :

$$S_\zeta^{(2)} = \int N dt a d^3 x \left(\frac{\epsilon_s}{c_s^2} \frac{a^2}{N^2} \dot{\zeta}^2 - \epsilon_s (\partial \zeta)^2 \right), \quad (46)$$

где

$$\epsilon_s = \frac{1}{aN} \frac{d}{dt} \left(\frac{a g_\zeta^2}{H f_\alpha} \right) - c_\zeta, \quad c_s^2 = \frac{\epsilon_s}{3g_\zeta} \left(1 - \frac{g_\zeta m_\alpha}{f_\alpha^2} \right)^{-1}. \quad (47)$$

Асимптотики для ϵ_s и c_s находим, используя (42):

$$\epsilon_s \sim (-t)^{-2\alpha+\delta}, \quad c_s^2 \sim (-t)^0. \quad (48)$$

Заметим, что благодаря тому, что на параметры α и δ изначально наложено условие $2\alpha - \delta > 1$, коэффициент ϵ_s стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$, что говорит нам о наличии сильной связи на рассматриваемых временах.

Чтобы наверняка убедиться в том, что сильная связь имеет место в нашей теории, рассмотрим последующий порядок действия по возмущениям. Здесь мы воспользовались результатом работы [30] для кубического действия в скалярном секторе. Для всех скалярных возмущений α , β и ζ имеем:

$$\begin{aligned}
S_{\zeta,\alpha,\beta}^{(3)} = & \int N dt ad^3x \left\{ g_\zeta \left[-9 \frac{a^2}{N^2} \zeta \dot{\zeta}^2 + 2 \frac{a}{N} \dot{\zeta} \left(\zeta \partial^2 \beta + \partial_i \zeta \partial^i \beta \right) - \alpha (\partial_i \zeta)^2 \right. \right. \\
& + (\partial_i \beta)^2 \partial^2 \zeta - \frac{1}{2} \zeta \left(4\alpha \partial^2 \zeta - (\partial^2 \beta)^2 + (\partial_i \partial_j \beta)^2 \right) \left. \right] + \\
& + c_\zeta \zeta (\partial_i \zeta)^2 - 9(aH)^2 m_\alpha \alpha^2 \zeta + 2aH f_\alpha \alpha \left(9 \frac{a}{N} \zeta \dot{\zeta} - \zeta \partial^2 \beta - \partial_i \zeta \partial^i \beta \right) \\
& + \frac{\lambda_1}{aH} \left[\frac{a^3}{N^3} \dot{\zeta}^3 - \frac{a^2}{N^2} \dot{\zeta}^2 \partial^2 \beta + \frac{1}{2} \frac{a}{N} \dot{\zeta} \left(4\alpha \partial^2 \zeta + (\partial^2 \beta)^2 - (\partial_i \partial_j \beta)^2 \right) - \alpha \left(\partial^2 \zeta \partial^2 \beta \right. \right. \\
& \left. \left. - \partial_i \partial_j \zeta \partial_i \partial_j \beta \right) \right] + \lambda_2 \alpha \left[3 \frac{a^2}{N^2} \dot{\zeta}^2 - 2 \frac{a}{N} \dot{\zeta} \partial^2 \beta + \frac{1}{2} \left((\partial^2 \beta)^2 - (\partial_i \partial_j \beta)^2 \right) \right] - \\
& \left. - \lambda_3 a H \alpha^2 \left(3 \frac{a}{N} \dot{\zeta} - \partial^2 \beta \right) - \lambda_4 \alpha^2 \partial^2 \zeta + \frac{\lambda_5}{2} (aH)^2 \alpha^3 \right\}, \tag{49}
\end{aligned}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ снова представляют из себя комбинации начальных функций A_2, A_3, A_4 лагранжиана (17), а так же коэффициентов из квадратичного лагранжиана (4) $g_\zeta, c_\zeta f_\alpha, m_\alpha$, в них входит и параметр Хаббла H . Асимптотическое поведение для коэффициентов из кубического действия имеет вид на $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0, \\
\lambda_2 &\sim (-t)^{-2\alpha}, \\
\lambda_3 &\sim (-t)^{-2\alpha}, \\
\lambda_4 &\sim (-t)^{-2\alpha}, \\
\lambda_5 &\sim (-t)^{-2\alpha+\delta}. \tag{50}
\end{aligned}$$

Вновь избавляясь от α и β с помощью (44) (доказательство того факта, что уравнения связи, полученные из действия второго порядка по возмущениям можно использовать и в действии третьего порядка приведено в Приложении Б) получа-

ем кубическое действие в терминах ζ :

$$\begin{aligned}
S_\zeta^{(3)} = \int N dt ad^3x \left\{ \Lambda_1 \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right)^3 + \Lambda_2 \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right)^2 \zeta + \Lambda_3 \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right)^2 \partial^2 \zeta + \Lambda_4 \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) \zeta \partial^2 \zeta \right. \\
+ \Lambda_5 \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) (\partial_i \zeta)^2 + \Lambda_6 \zeta (\partial_i \zeta)^2 + \Lambda_7 \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) (\partial^2 \zeta)^2 + \Lambda_8 \zeta (\partial^2 \zeta)^2 \\
+ \Lambda_9 \partial^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2 + \Lambda_{10} \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) (\partial_i \partial_j \zeta)^2 + \Lambda_{11} \zeta (\partial_i \partial_j \zeta)^2 + \Lambda_{12} \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) \partial_i \zeta \partial^i \psi \\
+ \Lambda_{13} \partial^2 \zeta \partial_i \zeta \partial^i \psi + \Lambda_{14} \partial^2 \zeta (\partial_i \psi)^2 + \Lambda_{15} \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) (\partial_i \partial_j \psi)^2 + \Lambda_{16} \zeta (\partial_i \partial_j \psi)^2 + \\
\left. + \Lambda_{17} \left(\frac{a}{N} \dot{\zeta} \right) \partial_i \partial_j \zeta \partial^i \partial^j \psi + \Lambda_{18} \zeta \partial_i \partial_j \zeta \partial^i \partial^j \psi \right\}, \quad (51)
\end{aligned}$$

где $\psi = \partial^{-2}(a\dot{\zeta}/N)$; $\Lambda_1 \dots \Lambda_{18}$ - комбинации коэффициентов и функций лагранжианов (17) и (40), (4), то есть $g_\zeta, c_\zeta f_\alpha, m_\alpha, A_2, A_3, A_4, H$, а потому просто являются функциями времени t (благодаря тому, что все асимптотики выбраны как степенные функции, см. (23)-(25)). Поэтому далее для $\Lambda_1 \dots \Lambda_{18}$ можно записать асимптотики на $t \rightarrow -\infty$ в виде:

$$\Lambda_i \sim (-t)^{x_i}, \quad i = \overline{1, 18}, \quad (52)$$

здесь x_i есть комбинации из параметров α и δ .

Для оценки масштаба сильной связи прибегнем к размерному анализу. Наш кубический лагранжиан для этого можно схематически написать в виде:

$$\mathbb{L}_i = \Lambda_i \cdot \zeta^3 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i}, \quad (53)$$

где a_i и b_i являются собой количество производных по времени и по координатам, соответственно.

В нашем анализе мы используем канонически нормированное поле π вместо ζ . Так как $a(t)$, $N(t)$ и $c_s^2(t)$ стремятся к постоянному значению на $t \rightarrow -\infty$, канонически нормированная переменная имеет вид:

$$\pi \rightarrow \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{c_s^2}} \zeta \propto |t|^{-\alpha+\delta/2} \zeta. \quad (54)$$

Итак, в терминах канонически нормированного поля π мы можем переписать (53) как:

$$\mathbb{L}_i = \tilde{\Lambda}_i \cdot \pi^3 \cdot (\partial_t)^{a_i} \cdot (\partial)^{b_i} \quad (55)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_i = \Lambda_i \epsilon_s^{-3/2} = \Lambda_i |t|^{-\frac{3}{2}(\delta-2\alpha)} \sim |t|^{x_i - \frac{3}{2}(\delta-2\alpha)}. \quad (56)$$

Далее, из размерного анализа (размерность Λ_i есть $[\Lambda_i] = 4 - a_i - b_i$, а для $[\epsilon_s] = 2$) мы получаем, что характерный энергетический масштаб сильной связи, связанный с конкретным слагаемым канонизированного лагранжиана \mathbb{L}_i есть:

$$E_{strong}^{(i)} \sim \tilde{\Lambda}_i^{-\frac{1}{a_i+b_i-1}} \sim |t|^{-\frac{x_i+3\alpha-3\delta/2}{a_i+b_i-1}}. \quad (57)$$

Единственным размерным параметром в нашей задаче, который характеризует классическую эволюцию Вселенной является параметр Хаббла, а связанный с ним масштаб энергий (сравнение с которым дает наиболее сильное условие отсутствия сильной связи):

$$E_{class} \sim \frac{\dot{H}}{H} \sim |t|^{-1}. \quad (58)$$

Чтобы говорить о применимости классического описания эволюции Вселенной на столь ранних временах, мы потребуем чтобы все классические масштабы были много меньше характерного масштаба сильной связи, то есть

$$E_{class} \ll E_{strong}^{(i)}, \quad (59)$$

для всех i . Из этих соображений мы наконец получаем наиболее общее выражение для условия отсутствия сильной связи в нашей модели, которое и накладывает определенные ограничения на параметры задачи α и δ :

$$x_i + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta < a_i + b_i - 1, \quad i = \overline{1, 18}. \quad (60)$$

Видно, что наиболее сильные условия будут возникать из слагаемых с наименьшим значением $a_i + b_i - x_i$. Были найдены асимптотики всех коэффициентов из

действия третьего порядка (то есть значения всех x_i , см. (52)), и получено, что наиболее сильное условие получается, например, для слагаемого с $i = 1$, так что:

$$\Lambda_1 \sim (-t)^{1-2\alpha+3\delta}, \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 0, \quad a_1 + b_1 - x_1 = 2 + 2\alpha - 3\delta, \quad (61)$$

(список асимптотик и соответствующих условий отсутствия сильной связи представлены в таблице (3.1)). Таким образом, из анализа скалярного сектора, мы получаем необходимые условия (ограничения на параметры лагранжиана) для того, чтобы построить несингулярный, стабильный на всех временах генезис без сильной связи:

$$0 < \delta < \frac{1}{4}, \quad 2 - 3\delta > 2\alpha > 1 + \delta. \quad (62)$$

Слагаемое	$[\mathbb{L}_i]$	x	a	b	Условие
$\Lambda_1(\dot{\zeta})^3$	-2	$1 - 2\alpha + 3\delta$	3	0	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_2(\dot{\zeta})^2\zeta$	-1	$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_3(\dot{\zeta})^2\partial^2\zeta$	-3	$2 - 2\alpha + 3\delta$	2	2	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_4\dot{\zeta}\zeta\partial^2\zeta$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_5\dot{\zeta}(\partial_i\zeta)^2$	-2	$1 - 2\alpha + \delta$	1	2	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_6\zeta(\partial_i\zeta)^2$	-1	-2α	0	2	$2\alpha - 3\delta < 2$
$\Lambda_7\dot{\zeta}(\partial^2\zeta)^2$	-4	$3 - 2\alpha + \delta$	1	4	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_8\zeta(\partial^2\zeta)^2$	-3	$2 - 2\alpha + \delta$	0	4	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_9\partial^2\zeta(\partial_i\zeta)^2$	-3	$2 - 2\alpha + \delta$	0	4	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_{10}\dot{\zeta}(\partial_i\partial_j\zeta)^2$	-4	$3 - 2\alpha + \delta$	1	4	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_{11}\zeta(\partial_i\partial_j\zeta)^2$	-3	$2 - 2\alpha + \delta$	0	4	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_{12}\dot{\zeta}\partial_i\zeta\partial^i\psi$	-1	$-2\alpha + \delta$	2	0	$2\alpha - \delta < 2$
$\Lambda_{13}\partial^2\zeta\partial_i\zeta\partial^i\psi$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{14}\partial^2\zeta(\partial_i\psi)^2$	-1	$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{15}\partial^2\dot{\zeta}(\partial_i\partial_j\psi)^2$	-2	$1 - 2\alpha + 3\delta$	3	0	$2\alpha + 3\delta < 2$
$\Lambda_{16}\partial^2\zeta(\partial_i\partial_j\psi)^2$	-1	$-2\alpha + 2\delta$	2	0	$2\alpha + \delta < 2$
$\Lambda_{17}\dot{\zeta}\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi$	-3	$1 - 2\alpha + 3\delta$	2	2	$2\alpha + 3\delta < 4$
$\Lambda_{18}\zeta\partial_i\partial_j\zeta\partial^i\partial^j\psi$	-2	$1 - 2\alpha + 2\delta$	1	2	$2\alpha + \delta < 2$

Таблица 3.1 – Анализ сильной связи в скалярном секторе. Приведены соответствующие слагаемые разложенного до третьего порядка действия, размерность каждого слагаемого, степень асимптотического стремления на ранних временах x , количество производных по времени a и координатам b для каждого слагаемого, и, наконец, условия отсутствия сильной связи.

3.2 Тензорный сектор

Совершенно аналогично изучается и тензорный сектор. В метрике (38) оставляем теперь только тензорные возмущения [31]

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2(t)(e^h)_{ij}, \quad (63)$$

где

$$(e^h)_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} + \frac{1}{2}h_{ik}h_{kj} + \frac{1}{6}h_{ik}h_{kl}h_{lj} + \dots, \quad (64)$$

подставляем такую метрику в исходный лагранжиан и раскладываем его до второго и третьего порядков.

Действие второго порядка в тензорном секторе имеет вид:

$$S_h^{(2)} = \int N dt d^3x \frac{a}{8} \left(\frac{\epsilon_T}{c_T^2} \frac{a^2}{N^2} (\dot{h}_{ij})^2 - \epsilon_T (\partial_k h_{ij})^2 \right), \quad (65)$$

где

$$\epsilon_T = c_\zeta, \quad c_T^2 = \frac{c_\zeta}{g_\zeta}. \quad (66)$$

а также

$$\epsilon_T \sim (-t)^{-2\alpha}, \quad c_T^2 \sim (-t)^0. \quad (67)$$

при $t \rightarrow -\infty$. Выпишем новую каноническую переменную:

$$q_{ij} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_T}{4c_T^2}} h_{ij} \propto |t|^{-\alpha} h_{ij}. \quad (68)$$

Действие третьего порядка имеет вид [31]:

$$S_h^{(3)} = \int N dt d^3x a^3 \left[\frac{X \dot{\phi} G_{5X}}{12N^4} \dot{h}_{ij} \dot{h}_{jk} \dot{h}_{ki} + \frac{\mathcal{F}_T}{4a^2} \left(h_{ik} h_{jl} - \frac{1}{2} h_{ij} h_{kl} \right) \partial_k \partial_l h_{ij} \right], \quad (69)$$

где

$$\mathcal{F}_T = 2 \left[G_4 - X \left(\ddot{\phi} G_{5X} + G_{5\phi} \right) \right]. \quad (70)$$

В случае рассматриваемого нами неполного лагранжиана Хорндески (16), кубическое действие в тензорном секторе упрощается, так как мы полагаем $G_4 = G_4(\phi)$ и $G_5 = 0$.

Переходя к нашему размерному анализу, вновь напишем схематичный вид лагранжиана третьего порядка по тензорным возмущениям:

$$\mathbb{L}_T^{(3)} = \Lambda_T \cdot h_{ij}^3 \cdot (\partial_t)^{a_T} \cdot (\partial)^{b_T}, \quad (71)$$

где $\Lambda_T \sim G_4 = B_4 \sim (-t)^{-2\alpha}$ и в канонических переменных:

$$\mathbb{L}_T^{(3)} = \tilde{\Lambda}_T \cdot q_{ij}^3 \cdot (\partial_t)^{a_T} \cdot (\partial)^{b_T}, \quad (72)$$

а также

$$\tilde{\Lambda}_T = \Lambda_T \epsilon_T^{-3/2} = \Lambda_T |t|^{-\frac{3}{2}(-2\alpha)} \sim |t|^{-2\alpha - \frac{3}{2}(-2\alpha)} \sim |t|^\alpha. \quad (73)$$

Итого, характерный масштаб сильной связи в тензорном секторе имеет вид:

$$E_{strong}^{(T)} \sim \tilde{\Lambda}_T^{-\frac{1}{a_T + b_T - 1}} \sim |t|^{-\frac{\alpha}{a_T + b_T - 1}}. \quad (74)$$

Из действия (69) подсчитываем количество всех производных. Видно, что имеем только $b_T = 2$ производных по пространственным координатам, $a_T = 0$ - количество производных по времени. Энергетический масштаб классической эволюции берется вновь как:

$$E_{class} \sim \frac{\dot{H}}{H} \sim |t|^{-1}, \quad (75)$$

тоже самое - и с условием отсутствия сильной связи:

$$E_{class} \ll E_{strong}^{(T)}, \quad (76)$$

Собирая все вместе, готовы написать итоговый ответ для тензорного сектора:

$$\alpha < 1. \quad (77)$$

Условие получилось более слабое, чем от скалярного сектора. Результаты от обоих секторов наглядно представлены на Рис.(1).

Отметим интересное свойство касательно условий отсутствия сильной связи. Оказывается, что если над метрикой произвести конформные преобразования, то есть совершить переход из одной теории в другую (принято в таком случае говорить о смене системы (от англ. frame)), то условия будут инвариантны относительно такого перехода. Более подробно об этом написано в Приложении А.

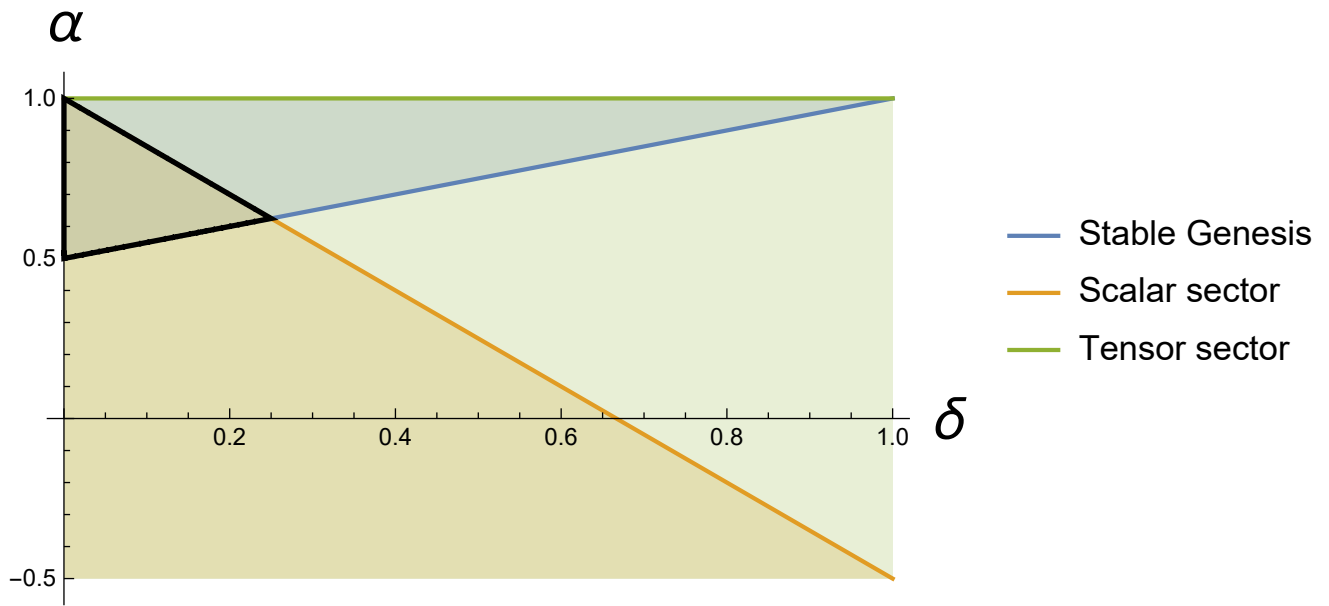


Рисунок 1 – Область допустимых значений α и δ , полученная из анализа скалярного и тензорного секторов. Для построения генезиса, который свободен от начальной сингулярности, стабилен и лишен сильной связи, необходимо выбрать параметры лагранжиана из области пересечения всех трех областей (область, ограниченная черным треугольником).

4. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации был рассмотрен генезис как альтернатива или завершение инфляционного сценария. Построение таких конфигураций гипотетически возможно только в теориях, нарушающих изотропное условие энергодоминантности. Это условие довольно сложно нарушить так, чтобы в получившейся теории не возникало ни духовых, ни градиентных неустойчивостей. В случае скалярного поля с лагранжианом, содержащим только первые производные поля по времени и пространственным координатам, было показано, что нарушение NEC неизбежно влечёт за собой появление таких неустойчивостей. Этот факт способствует развитию интереса к теориям, содержащим вторые производные поля в лагранжиане, но лишённым третьих производных в уравнениях движения, поскольку в таких теориях возможно построение стабильных конфигураций, нарушающих NEC. Теория Хорндески - самая общая теория, удовлетворяющая такому свойству: уравнения движения остаются второго порядка, несмотря на вторые производные в лагранжиане.

Генезис в данной работе как раз и был построен в рамках теории Хорндески. В этой космологической модели пустая (единственная существующая форма материи - поле галилеона) Вселенная стартует с бесконечного отрицательного времени и плоского пространства Минковского, постепенно плотность энергии поля галилеона начинает расти и при приближении к некоторому выбранному моменту времени генерируется переход на последующую стадию (инфляция или сразу разогрев). На данный момент стадия генезиса в научной литературе изучена достаточно подробно. Во множестве работах освещались такие вопросы и направления, связанные с генезисом как сверхсветовые скорости распространения возмущений галилеонного поля при добавлении во Вселенную известной материи, описание генезиса с помощью конформной теории поля, построение генезиса в

наиболее общей модели Хорндески, изучение первичного разогрева Вселенной сразу после генезиса и возможного спектра возмущений, построение запрещающих теорем, следствием которых является невозможность построить стабильный на всех временах генезис, описание первичных космологических возмущений для случаев закрытой и открытой Вселенных в рамках теории Хорндески.

Предметом изучения данной работы являлся еще один интересный аспект модели генезиса. Как было показано в работе [25], построить устойчивый генезис в рамках теории Хорндески можно, однако, на первый взгляд в такой модели появляется сильная связь.

Наш анализ режима сильной связи или, иными словами, возможность применения классического полевого описания эволюции Вселенной на ранних стадиях базируется на сравнении характерных масштабов энергии: чтобы выяснить, является ли классический подход законным на рассматриваемых ранних временах, нужно оценить масштаб сильной связи и сравнить его с обратным характерным временем эволюции космологических решений (т.н. решений бэкграунда или фоновых решений). Масштаб сильной связи определяется взаимодействиями возмущений метрики – в нашей модели мы рассматривали скалярные и тензорные возмущения метрики. Таким образом, лагранжиан Хорндески в невозмущённой метрике ФЛРУ (Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера) и его вариация даёт нам модифицированные уравнения Фридмана и, соответственно, классические космологические решения для масштабного фактора, параметра Хаббла; интересующее нас решение – генезис – может быть получен в рамках выбранного лагранжиана. Далее были изучены уже возмущения метрики: разложение исходного лагранжиана до второго порядка по этим возмущениям не позволяет в полной мере осуществить анализ сильной связи, но позволяет провести анализ на стабильность теории, что уже было продемонстрировано во многих научных работах.

Анализ применимости классического описания эволюции ранней Вселен-

ной начинается с разложения исходного действия теории до третьего порядка по скалярным и тензорным возмущениям. Необходимо отметить, что исследовать характерные энергетические масштабы сильной связи нужно во всех секторах: скалярном, тензорном и смешанном (взаимодействия типа скаляр-гравитон-гравитон, скаляр-скаляр-гравитон). В данной работе были представлены результаты по скалярному и тензорному секторам, а анализ смешанного сектора совершается нами в данный момент.

Таким образом, было получено, что классический энергетический масштаб действительно может быть меньше, чем масштаб сильной связи в скалярном и тензорном секторах. Показано, что такое условие может быть удовлетворено в определенном диапазоне начальных параметров лагранжиана. Удовлетворение последнего условия и говорит об отсутствии режима сильной связи на стадии генезиса.

Важно заметить, что отсутствие сильной связи при анализе действия третьего порядка по возмущениям ничего не говорит о наличии/отсутствии сильной связи в модели вообще. Поэтому если сильная связь не найдена при изучении трёхточечных вершин, то следует изучать четвёртый и следующие порядки по возмущениям. Интересно также посмотреть, как будет происходить дальнейшая эволюция Вселенной, которая в рамках нашей теории стартует с генезиса. Иными словами, конечно, стоит необходимость сшивать наши асимптотические решения с последующими инфляцией, стадией разогрева и т.д.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] A. Borde and A. Vilenkin, *Int. J. Mod. Phys. D* **5**, 813 (1996) doi:10.1142/S0218271896000497 [gr-qc/9612036].
- [2] Y. Cai, Y. Wan, H. G. Li, T. Qiu and Y. S. Piao, *JHEP* **1701**, 090 (2017) doi:10.1007/JHEP01(2017)090 [arXiv:1610.03400 [gr-qc]].
- [3] P. Creminelli, D. Pirtskhalava, L. Santoni and E. Trincherini, *JCAP* **1611**, no. 11, 047 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/11/047 [arXiv:1610.04207 [hep-th]].
- [4] R. Kolevatov, S. Mironov, N. Sukhov and V. Volkova, *JCAP* **1708**, no. 08, 038 (2017) doi:10.1088/1475-7516/2017/08/038 [arXiv:1705.06626 [hep-th]].
- [5] Y. Cai and Y. S. Piao, *JHEP* **1709**, 027 (2017) doi:10.1007/JHEP09(2017)027 [arXiv:1705.03401 [gr-qc]].
- [6] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini, *JCAP* **1011**, 021 (2010) doi:10.1088/1475-7516/2010/11/021 [arXiv:1007.0027 [hep-th]].
- [7] P. Creminelli, K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Nicolis and E. Trincherini, *JHEP* **1302**, 006 (2013) doi:10.1007/JHEP02(2013)006 [arXiv:1209.3768 [hep-th]].
- [8] K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury and G. E. J. Miller, *JCAP* **1212**, 030 (2012) doi:10.1088/1475-7516/2012/12/030 [arXiv:1209.5742 [hep-th]].
- [9] K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury and G. E. J. Miller, *Phys. Rev. Lett.* **110**, no. 24, 241303 (2013) doi:10.1103/PhysRevLett.110.241303 [arXiv:1212.3607 [hep-th]].
- [10] D. A. Easson, I. Sawicki and A. Vikman, *JCAP* **1307**, 014 (2013) doi:10.1088/1475-7516/2013/07/014 [arXiv:1304.3903 [hep-th]].

- [11] S. Nishi and T. Kobayashi, JCAP **1503**, no. 03, 057 (2015) doi:10.1088/1475-7516/2015/03/057 [arXiv:1501.02553 [hep-th]].
- [12] S. Nishi and T. Kobayashi, JCAP **1604**, no. 04, 018 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/04/018 [arXiv:1601.06561 [hep-th]].
- [13] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974). doi:10.1007/BF01807638
- [14] D. B. Fairlie, J. Govaerts and A. Morozov, Nucl. Phys. B **373**, 214 (1992) doi:10.1016/0550-3213(92)90455-K [hep-th/9110022].
- [15] D. B. Fairlie and J. Govaerts, Phys. Lett. B **281**, 49 (1992) doi:10.1016/0370-2693(92)90273-7 [hep-th/9202056].
- [16] D. B. Fairlie and J. Govaerts, J. Math. Phys. **33**, 3543 (1992) doi:10.1063/1.529904 [hep-th/9204074].
- [17] M. A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, JHEP **0309**, 029 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/09/029 [hep-th/0303116].
- [18] A. Nicolis and R. Rattazzi, JHEP **0406**, 059 (2004) doi:10.1088/1126-6708/2004/06/059 [hep-th/0404159].
- [19] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, Phys. Rev. D **79**, 064036 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.064036 [arXiv:0811.2197 [hep-th]].
- [20] C. Deffayet, S. Deser and G. Esposito-Farese, Phys. Rev. D **82**, 061501 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.82.061501 [arXiv:1007.5278 [gr-qc]].
- [21] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman, JCAP **1010**, 026 (2010) doi:10.1088/1475-7516/2010/10/026 [arXiv:1008.0048 [hep-th]].
- [22] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Phys. Rev. Lett. **105**, 231302 (2010) doi:10.1103/PhysRevLett.105.231302 [arXiv:1008.0603 [hep-th]].

- [23] A. Padilla and V. Sivanesan, JHEP **1304**, 032 (2013) doi:10.1007/JHEP04(2013)032 [arXiv:1210.4026 [gr-qc]].
- [24] V. A. Rubakov, Phys. Usp. **57**, 128 (2014) [Usp. Fiz. Nauk **184**, no. 2, 137 (2014)] doi:10.3367/UFNe.0184.201402b.0137 [arXiv:1401.4024 [hep-th]].
- [25] T. Kobayashi, Phys. Rev. D **94**, no. 4, 043511 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.043511 [arXiv:1606.05831 [hep-th]].
- [26] M. Libanov, S. Mironov and V. Rubakov, JCAP **1608**, no. 08, 037 (2016) doi:10.1088/1475-7516/2016/08/037 [arXiv:1605.05992 [hep-th]].
- [27] R. Kolevatov and S. Mironov, Phys. Rev. D **94**, no. 12, 123516 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.123516 [arXiv:1607.04099 [hep-th]].
- [28] S. Akama and T. Kobayashi, Phys. Rev. D **95**, no. 6, 064011 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.064011 [arXiv:1701.02926 [hep-th]].
- [29] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, JCAP **1507**, no. 07, 017 (2015) doi:10.1088/1475-7516/2015/07/017 [arXiv:1504.05710 [hep-th]].
- [30] X. Gao and D. A. Steer, JCAP **1112**, 019 (2011) doi:10.1088/1475-7516/2011/12/019 [arXiv:1107.2642 [astro-ph.CO]].
- [31] X. Gao, T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, Phys. Rev. Lett. **107**, 211301 (2011) doi:10.1103/PhysRevLett.107.211301 [arXiv:1108.3513 [astro-ph.CO]].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение А. Конформные преобразования метрики и условие отсутствия сильной связи

Здесь обсуждается упомянутое в данной диссертации свойство того, что условия отсутствия сильной связи инвариантны по отношению к смене фреймов. Данное утверждение рассмотрим на примере скалярного сектора и вытекающих из него условий на параметры α и δ .

Можно сделать над метрикой $g_{\mu\nu}$ конформные преобразования вида:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(\phi)g_{\mu\nu} ,$$

где $\Omega(\phi)$ есть некоторая функция скалярного поля галилеона. Тогда наш начальный лагранжиан (в так называемой системе Йордана):

$$\mathcal{L}_H = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi)R ,$$

примет вид (система Эйнштейна):

$$\tilde{\mathcal{L}}_H = \tilde{G}_2(\phi, \tilde{X}) - \tilde{G}_3(\phi, \tilde{X})\boxplus\phi + \frac{M_{Pl}^2}{2}R , \quad \boxplus\phi = \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\partial_\nu\phi .$$

Здесь функции $\tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{G}_4$ являются некоторыми комбинациями функций G_2, G_3, G_4 :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 &= \frac{G_2}{G_4^2} - 2XG_3\frac{G_{4\phi}}{G_4^3} + 3X\frac{G_{4\phi}^2}{G_4^3}, \\ \tilde{G}_3 &= \frac{G_3}{G_4}, \quad \tilde{G}_4 = \frac{M_{Pl}^2}{2}, \end{aligned}$$

а также

$$\tilde{X} = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = \frac{X}{G_4}$$

Для такого перехода функция $\Omega(\phi) = 2G_4/M_{Pl}^2$. Далее всюду будем для простоты полагать $M_{Pl}^2/2 = 1$. При выбранном конформном преобразовании невозмущенная метрика:

$$ds^2 = -N(t)^2dt^2 + a(t)^2dx_idx^i ,$$

примет вид

$$\tilde{d}s^2 = -\Omega N^2 dt^2 + \Omega a^2 dx^2.$$

Для удобства можно ввести новые переменные:

$$\tilde{N}^2 = \Omega N^2, \quad \tilde{a}^2 = \Omega a^2,$$

и метрику можно переписать как:

$$\tilde{d}s^2 = -d\tau^2 + dl^2,$$

где новые время и координаты выражаются через старые как:

$$d\tau^2 = \Omega N^2 dt^2, \quad dl^2 = \Omega a^2 dx^2.$$

Из первого соотношения в предыдущей формуле можно найти следующую связь:

$$\tau \sim \frac{(-t)^{1-\alpha}}{\alpha - 1},$$

но более точно из уравнений движения в новой системе находим фоновые решения:

$$e^\phi \sim \frac{1}{(-\tau)}, \quad \tilde{a} \sim \frac{1}{(-\tau)^{\alpha/(1-\alpha)}}, \quad \tilde{H} \sim \frac{1}{(-\tau)},$$

что представляет из себя модифицированный генезис.

Возмущенная метрика после конформного преобразования принимает вид, аналогичный тому, что был в прежней системе Йордана. Поэтому вполне законно использовать формулы для действий второго и третьего порядков и для новой системы. Но при этом все должно быть написано в терминах новой системы, то есть:

$$S_\zeta^{(2)} = \int \tilde{N} dt \tilde{a} d^3x \left(\frac{\tilde{\epsilon}_s}{\tilde{c}_s^2} \frac{\tilde{a}^2}{\tilde{N}^2} \dot{\zeta}^2 - \tilde{\epsilon}_s (\partial\zeta)^2 \right),$$

$$S_\zeta^{(3)} = \int \tilde{N} dt \tilde{a} d^3x \left\{ \tilde{\Lambda}_1 \left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{N}} \dot{\zeta} \right)^3 + \tilde{\Lambda}_2 \left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{N}} \dot{\zeta} \right)^2 \zeta + \dots + \tilde{\Lambda}_{18} \zeta \partial_i \partial_j \zeta \partial^i \partial^j \psi \right\},$$

где нами было показано, что

$$\begin{aligned}\tilde{c}_s^2 &= c_s^2 = inv, \\ \tilde{\epsilon}_s &= \gamma \epsilon_s, \\ \tilde{\Lambda}_i &= \gamma \Lambda_i,\end{aligned}$$

здесь $\gamma = 1/B_4 \sim (-t)^{2\alpha}$. Далее из аналогичного размерного анализа в новой системе будут получаться совершенно аналогичные старой системе условия отсутствия сильной связи.

Итак, снова запишем действие третьего порядка в канонически нормированных переменных:

$$S^{(3)} = \int d\tilde{V} \tilde{\Lambda}_i^{NORM} (\dot{})^{a_i} (\partial_i)^{b_i} \pi^3,$$

где следует обратить внимание на то, что $d\tilde{V}$, все производные и все величины, входящие в $\tilde{\Lambda}_i^{NORM}$ написаны в терминах новой системы, то есть через время τ , координаты l и т.д. Здесь коэффициенты будут иметь соответственно вид:

$$\tilde{\Lambda}_i^{NORM} = \tilde{\Lambda}_i \tilde{a}^{b_i-2} \tilde{N}^{a_i} \left(\frac{\tilde{c}_s^2}{2\tilde{\epsilon}_s} \right)^{3/2},$$

где коэффициент $\tilde{a}^{b_i-2} \tilde{N}^{a_i}$ появился как раз за счет того, что мы сделали переход к координатам и времени новой системы. В новой системе для коэффициентов из действия третьего порядка имеем:

$$\tilde{\Lambda}_i \sim (-\tau)^{\frac{2\alpha+x_i}{1-\alpha}},$$

а так же выпишем и коэффициент от канонической нормировки:

$$\left(\frac{\tilde{c}_s^2}{2\tilde{\epsilon}_s} \right)^{3/2} \sim (-\tau)^{\frac{3\delta}{2(\alpha-1)}}.$$

Собирая все вместе, получаем:

$$\tilde{\Lambda}_i^{NORM} \sim (-\tau)^{\frac{1}{\alpha-1}(-2\alpha-x_i+b_i\alpha-2\alpha+a_i\alpha+\frac{3}{2}\delta)}.$$

Масштабы энергий:

$$\tilde{E}_{St} \sim (\tilde{\Lambda}_i^{NORM})^{\frac{1}{1-a_i-b_i}},$$

$$\tilde{E}_{Cl} \sim (-\tau)^{-1}.$$

В новой системе тоже требуем $E_{St} \gg E_{Cl}$ и получаем:

$$-\frac{4\alpha + x_i - a_i\alpha - b_i\alpha - \frac{3}{2}\delta}{(-\alpha + 1)(a_i + b_i - 1)} > (-1),$$

откуда немедленно следует точно такое же условие отсутствия сильной связи, которое было получено в разделе 3.1 для системы Йордана:

$$x_i + 3\alpha - \frac{3}{2}\delta < a_i + b_i - 1, \quad i = \overline{1, 18}. \quad (78)$$

Приложение Б. Уравнения связей в разных порядках по возмущениям

В данной диссертации были рассмотрены разложения действия Хорндески до второго и третьего порядка по скалярным возмущениям:

$$S_{\alpha,\beta,\zeta}^{(2)} = \int N dt ad^3x [-3g_\zeta \left(\frac{a}{N}\dot{\zeta}\right)^2 + c_\zeta (\partial\zeta)^2 - 3a^2 H^2 m_\alpha \alpha^2 + 2g_\zeta \partial\alpha\partial\zeta + 6\frac{a^2}{N} H f_\alpha \alpha \dot{\zeta} + 2\frac{a}{N} g_\zeta \zeta \partial^2 \beta - 2aH f_\alpha \alpha \partial^2 \beta],$$

и

$$S_{\zeta,\alpha,\beta}^{(3)} = \int N dt ad^3x \left\{ g_\zeta \left[-9\frac{a^2}{N^2} \zeta \dot{\zeta}^2 + 2\frac{a}{N} \dot{\zeta} (\zeta \partial^2 \beta + \partial_i \zeta \partial^i \beta) - \alpha (\partial_i \zeta)^2 + (\partial_i \beta)^2 \partial^2 \zeta - \frac{1}{2} \zeta (4\alpha \partial^2 \zeta - (\partial^2 \beta)^2 + (\partial_i \partial_j \beta)^2) \right] + c_\zeta \zeta (\partial_i \zeta)^2 - 9(aH)^2 m_\alpha \alpha^2 \zeta + 2aH f_\alpha \alpha \left(9\frac{a}{N} \zeta \dot{\zeta} - \zeta \partial^2 \beta - \partial_i \zeta \partial^i \beta \right) + \frac{\lambda_1}{aH} \left[\frac{a^3}{N^3} \dot{\zeta}^3 - \frac{a^2}{N^2} \dot{\zeta}^2 \partial^2 \beta + \frac{1}{2} \frac{a}{N} \dot{\zeta} (4\alpha \partial^2 \zeta + (\partial^2 \beta)^2 - (\partial_i \partial_j \beta)^2) - \alpha (\partial^2 \zeta \partial^2 \beta - \partial_i \partial_j \zeta \partial_i \partial_j \beta) \right] + \lambda_2 \alpha \left[3\frac{a^2}{N^2} \dot{\zeta}^2 - 2\frac{a}{N} \dot{\zeta} \partial^2 \beta + \frac{1}{2} ((\partial^2 \beta)^2 - (\partial_i \partial_j \beta)^2) \right] - \lambda_3 aH \alpha^2 \left(3\frac{a}{N} \dot{\zeta} - \partial^2 \beta \right) - \lambda_4 \alpha^2 \partial^2 \zeta + \frac{\lambda_5}{2} (aH)^2 \alpha^3 \right\},$$

где все коэффициенты типа m_α или λ_1 и т.д. представляют собой комбинации функций невозмущенного лагранжиана Хорндески:

$$\mathcal{L}_H = A_2(t, N) + A_3(t, N)K + A_4(K^2 - K_{ij}^2) + B_4(t, N)R^{(3)}.$$

Оказывается, что возмущения α и β могут быть исключены из рассмотрения путем отрешивания их из действия как второго, так и третьего порядка (вариацией действия по ним). В итоге, конечное действие остается в терминах единственного возмущения ζ .

В данном приложении речь будет идти об одном интересном свойстве касательно данной процедуры. Было показано, что для получения уравнений связи

между α и ζ и β и ζ

$$\alpha = \frac{g_\zeta}{H f_\alpha} \frac{1}{N} \dot{\zeta},$$

$$\partial^2 \beta = \frac{g_\zeta}{a H f_\alpha} \partial^2 \zeta - 3 \left(\frac{g_\zeta m_\alpha}{f_\alpha^2} - 1 \right) \frac{a}{N} \dot{\zeta},$$

можно проварьировать по α и β действия лишь второго порядка. Далее такие уравнения можно будет законно подставлять как в действие второго порядка, так и в действие третьего порядка. Это так в силу того, что учтенные поправки в уравнениях связи от вариации действия уже третьего порядка будут сокращаться, либо давать превышение точности (будут возникать более высокие порядки по ζ).

Покажем это явно на простом примере. Рассмотрим действие второго и третьего порядков для произвольных возмущений в наиболее общем виде:

$$S^{(2)} + S^{(3)} = \int dV \left(\underbrace{c_1 \alpha^2 + f^{(1)} \alpha}_{\text{второй порядок}} + \underbrace{h^{(1)} \alpha^2 + g^{(2)} \alpha + c_2 \alpha^3}_{\text{третий порядок}} \right),$$

где α - возмущение, причем не обязательно единственное в теории, c_1 и c_2 есть константы, $f^{(1)}$, $h^{(1)}$ и $g^{(2)}$ есть комбинации всех остальных возмущений теории, кроме α , причем в $f^{(1)}$ и в $h^{(1)}$ входят возмущения только первого порядка, а в $g^{(2)}$ - второго. Проварьируем сперва действие второго порядка $S^{(2)}$ по α , получим:

$$2c_1 \alpha + f^{(1)} = 0.$$

Отсюда выражаем α

$$\alpha = -\frac{f^{(1)}}{2c_1},$$

и подставляем назад в полное $S^{(2)} + S^{(3)}$:

$$S^{(2)} + S^{(3)} = \int dV \left(c_1 \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right)^2 + f^{(1)} \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right) + h^{(1)} \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right)^2 + g^{(2)} \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right) + c_2 \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right)^3 \right),$$

$$S^{(2)} + S^{(3)} = \int dV \left(-\frac{(f^{(1)})^2}{4c_1} + h^{(1)} \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right)^2 + g^{(2)} \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right) + c_2 \left(-\frac{f^{(1)}}{2c_1} \right)^3 \right).$$

Теперь проварьируем по α действие и второго, и третьего порядков:

$$\alpha^2 + \frac{\alpha}{3c_2}(2c_1 + 2h^{(1)}) + \frac{f^{(1)} + g^{(2)}}{3c_2} = 0,$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{2c_1+2h^{(1)}}{3c_2} \pm \sqrt{\frac{1}{9c_2^2}(2c_1 + 2h^{(1)})^2 - 4\frac{f^{(1)}+g^{(2)}}{3c_2}}}{2},$$

что после небольшого вычисления приводит нас к выражению типа:

$$\alpha = -\frac{f^{(1)}}{2c_1} + \dots,$$

и мы выбрали корень со знаком $+$, чтобы в низшем порядке восстанавливался результат от варьирования действия второго порядка. Под \dots мы подразумеваем все поправки первого и второго порядков. Подставляя результат с поправками обратно в действие $S^{(2)} + S^{(3)}$, нетрудно убедиться, что отрешанное действие без α в данном случае получается точно такое же, как после подстановки α из проварьированного действия второго порядка.

Таким образом, видно, что отпадает надобность каждый раз варьировать полное действие всех порядков по возмущениям - можно всегда пользоваться уравнениями связи, полученными вариацией действия только лишь второго порядка.