Задачи экзамена по курсу "Классические поля". Весна 2019г.

1. Рассмотрим модель двух комплексных скалярных полей $\varphi_1$ и $\varphi_2$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_1^* \partial_\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^* \partial_\mu \varphi_2 - \lambda(\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_2^* \varphi_2 - v^2)^2$$

   1) Найти группу глобальной симметрии этого лагранжиана (указание: ограничиться компактными группами).

   2) Найти множество классических вакуумов в модели. Найти ненарушенную подгруппу для каждого вакуума.

   3) Найти спектр малых возбуждений относительно каждого из вакуумов. Какие вакуумы являются физически эквивалентными, а какие — нет? Выполняется ли теорема Голдстоуна? Совпадает ли количество безмассовых возбуждений с количеством ненарушенных генераторов? Почему?

   4) Введя соответсвующие калибровочные поля, построить теорию, в которой найденная в п. 1 группа симметрии была бы калибровочной. Найти спектр малых возбуждений относительно каждого из вакуумов в полученной калибровочной теории. Остаются ли в спектре безмассовые скалярные возбуждения?

2. Рассмотрим модель с калибровочной группой $SU(2)$ и триплетом действительных скалярных полей $\varphi^a$ (Джорджи, Глэшоу, 1972). Пусть $g$ — калибровочная константа связи, а потенциал скалярных полей имеет вид

$$V = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^a \varphi^a + \frac{\lambda}{4}(\varphi^a \varphi^a)^2 \ .$$

   1) Найти основное состояние и остаточную (ненарушенную) калибровочную группу.

   2) Найти спектр всех малых возмущений относительно основного состояния, расклассифицировать это возмущения по отношению к ненарушенной калибровочной группе.

3. Показать, что для ковариантной производной справедливы формулы дифференцирования произведения функций и сложной функции (считать, что функции являются величинами, преобразующимися по некоторым, вообще говоря, разным, представлениям калибровочной группы). Показать, что ток, фигурирующий в уравнениях движения, ковариантно сохраняется.

4. Теория с произвольной компактной калибровочной группой $G$ и скаляром $\varphi$ в некотором представлении инвариантна, в частности, относительно глобальных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1}, \\ \varphi &\mapsto \varphi' = T(\omega)\varphi \ , \end{aligned}$$

   где $\omega \in G$ не зависит от $x$. Найти нетеровский ток, соответствующий этим преобразованиям. Совпадает ли он с током $j^a_\mu$, фигурирующим в уравнении поля? Ковариантен ли нетеровский ток относительно калибровочных преобразований? Равен ли нетеровский ток нулю в отсутствие полей материи? Записать соответствующее уравнение поля через нетеровский ток и тензор $F^a_{\mu\nu}$.

5. Найти тензор энергии-импульса в теории Янга-Миллса варьированием по метрике. Совпадает ли он с нетеровским?

6. Найти взаимодействие калибровочных бозонов Стандартной модели друг с другом и с хиггсовским бозоном. Показать, что эти взаимодействия инвариантны относительно калибровочных преобразований из $U_{em}(1)$. Найти полный угловой момент в теории заряженного векторного поля. Чему равен заряд и магнитный момент W-бозона?

7. Гравитация тоже является калибровочной теорией. Изучим малые отклонения метрики от метрики Минковского. Как выглядит действие Эйнштейна-Гильберта в квадратичном приближении по этим возмущениям? Как выглядит тензор углового момента для этого квадратичного действия. Почему спин гравитона равен 2?

8. Конденсат комплексного скалярного поля – это однородное решение в ящику с периодическими граничными условиями и ненулевым глобальным $U(1)$-зарядом в нелинейной теории с потенциалом $V(\Phi^*\Phi)$. Как выглядит тензор энергии-импульса на этом решении? Можно ли сопоставить его соответствующему тензору для идеальной жидкости? Каким будет уравнение состояния в зависимости от скалярного потенциала?

9. Рассмотрим теорию одного действительного векторного поля в трехмерном пространстве-времени, $\mu = 0, 1, 2$. Выберем действие в виде

$$S = \int d^3x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \right) ,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon^{012} = 1$, $g$ — действительная постоянная, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1) Найти размерность константы $g$.

2) Показать, что действие инвариантно относительно убывающих на бесконечности калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

($\alpha(x)$ достаточно быстро убывает при $x \to \infty$).

3) Найти уравнения поля и показать, что они калибровочно инвариантны.

4) Найти спектр физических возбуждений поля (т. е. таких, которые не уничтожаются калибровочными преобразованиями). В частности, найти количество физических степеней свободы, структуру поля в этих модах и зависимость частоты $\omega$ от волнового вектора $\mathbf{k}$.

5) Слагаемое $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda$ называют лагранжианом Черна-Саймонса. Обобщить это выражение на случай неабелевых калибровочных полей так, чтобы неабелев лагранжиан Черна-Саймонса содержал не более одной производной и был инвариантен, с точностью до полной производной, относительно неабелевых калибровочных преобразований.

10. Найти аналог уравнения Вейля в двумерном пространстве-времени. Изучить все решения этого уравнения. В какую сторону движутся частицы и античастицы, описываемые этой теорией?