Условия сдачи экзамена по курсу "Классические калибровочные поля" (осень 2018)

К экзамену допускаются студенты, сдавшие задачи коллоквиумов.

Задачи к экзамену по курсу "Классические калибровочные поля" (осень 2018)

1. Инстантон в модели n-поля.

Солитон в модели **n**-поля можно рассматривать и как инстантон в двумерном евклидовом пространстве-времени.

1) Дать интерпретацию солитонного решения в терминах туннельного процесса, происходящего в теории **n**-поля в двумерном пространстве-времени Минковского, действие которой имеет вид

$$S = \int d^2x \, \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu \varphi_a \partial_\mu \varphi_a) \, ,$$

$$\mu = 0, 1 \, ; \quad a = 1, 2, 3 \, ; \quad \sum_{a=1}^{3} \varphi_a \varphi_a = 1 \, .$$

2) Видоизменим эту двумерную модель, добавив к действию слагаемое

$$\Delta S = -\int d^2x \, \lambda(\varphi_3 - 1)^2 \, ,$$

где λ — действительный параметр. Найти классический вакуум и сфалерон в модели с действием $(S + \Delta S)$ (Моттола, Випф, 1989).

2. Критический заряд в модели с короткодействием.

Вообразим атом, связанный короткодействующим центрально-симметричным векторным полем

$$A_0 = -Z\delta(r - R) \, , \qquad A_i(r) = 0 \, ,$$

где R - радиус, а Z – заряд ядра. Заряд электрона по отношению к полю A_μ положен равным $e = +1$.

1. При каких значениях Z, R существуют связанные состояния электронов в поле ядра? Изобразить соответствующую область на плоскости $Z - R$. Найти энергию и волновую функцию основного состояния. Рассмотреть случаи $mR \gg 1$, $mR \ll 1$, где m - масса электрона.

2. Найти критическое значение заряда $Z_c(R)$, при котором основной электронный уровень растворяется в дираковском море.

3. Представим эксперимент, в котором заряд ядра изменяется от $Z = 0$ до $Z > Z_c$ за характерное время $\tau \gg m^{-1}$. Сколько частиц(античастиц) рождается в таком эксперименте? Рассмотреть случаи $\tau \gg R$, $\tau \ll R$.

3. Рассеяние фермионов на космической струне.

Рассмотрим $(2+1)$– мерные массивные фермионы с дробным электрическим зарядом $q > 0$. Фермионы помещены в потенциал Ааронова-Бома

$$A_0 = 0 \, , \qquad A_i = -\theta(r - R) \, \epsilon_{ij} \frac{n_j}{r} \, , \tag{1}$$

где R — размер центральной части потенциала. Можно грубо полагать, что поле (1) создано вихрем Абрикосова размера R. Ниже будем рассматривать два представления матриц Дирака

$$\alpha^1 = \sigma^1 , \qquad \alpha^2 = s\sigma^2 , \qquad \beta = \sigma^3 , \tag{2}$$

отличающиеся значением параметра $s = \pm 1$.

- Показать, что представления (2) не эквивалентны, т.е. не могут быть переведены друг в друга преобразованием

  $$\alpha^i \to U\alpha^i U^+ , \qquad \beta \to U\beta U^+ ,$$

  где U– унитарная матрица. Параметр s будем отождествлять с удвоенным спином фермиона.

- Рассмотрим фермионы в поле вихря нулевого размера, $R = 0$. Наложив условие регулярности волновой функции при $r = 0$, найти точные решения уравнения Дирака. Вычислить амплитуду рассеяния на вихре фермиона, который изначально двигался вдоль координаты x^1. Зависит ли амплитуда от параметра s?

- Рассмотрим теперь вихрь конечного, но малого размера. Используя условие сшивки при $r = R$, найти собственноэнергетические волновые функции фермионов, "выживающие" в пределе $R \to 0$. Совпадают ли они с волновыми функциями, полученными в предыдущем пункте? Найти амплитуду рассеяния на вихре конечного, но малого размера.

Теперь рассмотрим $(3 + 1)$– мерное пространство-время. Потенциалу (1) в этом случае соответствует космическая струна — одномерный объект, электрическое поле которого обладает свойством трансляционной инвариантности вдоль координаты x^3 ($A_3 = 0$, а остальные компоненты A_μ даются выражением (1)).

1. Показать, что волновые функции фермионов, обладающих нулевым импульсом вдоль координаты x^3, описываются $(2 + 1)$– мерным уравнением Дирака, причем два уравнения с $s = \pm 1$ описывают две независимые поляризации $\psi_\pm$ четырехмерного фермиона. Показать, что проекция спина на координату x^3 представима в виде $\hat{s}^3 = s\sigma^3/2$. Ниже будем использовать линейно поляризованные фермионы

   $$\psi_\gamma = \cos\gamma\psi_+ + \sin\gamma\psi_- \ .$$

2. Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma(\psi_\gamma \to \psi_{\gamma'})$ поляризованных фермионов на космической струне.

4. Аксиальная симметрия и доменные стенки.

Рассмотрим в (3+1) измерениях теорию с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2}{32\pi^2}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F_{\mu\nu}} + \bar{\psi}i\gamma_\mu D_\mu\psi - M\bar{\psi}\mathrm{e}^{i\gamma_5\theta}\psi + \frac{v^2}{2}\left(\partial_\mu\theta\right)^2 ,$$

$$\mathcal{L}_1 = -v^2m^2(1 - \cos\theta),$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_n u A_\mu$, $\tilde{F_{\mu\nu}} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$, A_μ – электромагнитное поле, ψ – фермионное поле, θ – скалярное поле.

1. Найти глобальные симметрии теории, а также глобальные симметрии теории с лагранжианом $\mathcal{L}_0$.

2. Выписать уравнения движения.

3. Найти множество вакуумов и провести их топологическую классификацию. Показать, что в теории имеются классические решения в виде доменных стенок. Найти доменную стенку в явном виде.

4. Изучить моды фермионного поля ψ во внешнем поле доменной стенки. Исследовать вопрос о локализации фермионных состояний на стенке. В тонкостенном пределе найти локализованные моды и написать для них эффективный (2+1)-мерный лагранжиан.

5. Взаимодействие калибровочных бозонов.

Найти взаимодействие калибровочных бозонов Стандартной модели друг с другом и с хиггсовским бозоном. Показать, что эти взаимодействия инвариантны относительно калибровочных преобразований из $U_{em}(1)$.

1. Как оператор зарядового сопряжения действует на поля Янга-Миллса?

2. Инвариантен ли бозонный сектор Стандартной модели относительно C и CP преобразований?

3. Инвариантен ли фермионный сектор Стандартной модели относительно C и CP преобразований?

4. Найти полный угловой момент в теории заряженного векторного поля. Чему равен магнитный момент W-бозона?

6. Фотон–парафотонные осцилляции.

Рассмотрим четырехмерную теорию двух абелевых векторных полей A_μ и B_μ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{\chi}{2}F_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - m^2 B_\mu^2,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, а $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Рассмотрим эксперимент, состоящий из источника и приемника фотонов, разделенных расстоянием $2L$. Посередине между источником и приемником установлена тонкая светонепроницаемая стенка. Источник испускает в направлении на приемник j фотонов в секунду (пучок света не поляризован). Найти скорость регистрации j_1 фотонов приемником, если вся система помещена в светонепроницаемый ящик. Рассмотреть случаи: (а) в ящике вакуум; (б) в ящике жидкость с показателем преломления n; (в) в ящике плазма с плотностью электронов n_e. Указание: в такой плазме функции отклика фотонов задаются соотношениями $\pi_\pm = \omega_p^2$, $\pi_L = \omega_p^2 - \mathbf{k}^2$, где плазменная частота $\omega_p = 4\pi\alpha n_e/m_e$, m_e – масса электрона, α – постоянная тонкой структуры. Параметр смешивания $\chi \ll 1$, частота излучаемых фотонов $\omega \gg m$. Поле B_μ с веществом не взаимодействует.

7. Пересечение уровней в $(3+1)$-мерной модели.

Рассмотрим заряженные безмассовые фермионы в кубическом ящике большого размера L в (3+1)-мерном пространстве во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$, направленном вдоль оси z. Пусть на некоторое время τ на систему накладывается однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное вдоль оси z. Найти изменение чисел правых и левых фермионов. Связать это изменение с

$$\int F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\, d^4x \propto \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}\, d^4x,$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$. Считать, что включение и выключение поля производится адиабатически, но время переключений много меньше τ.

8. Модель с полностью нарушенной калибровочной $SU(2)$ симметрией и тремя различными массами калибровочных бозонов.
Построить модель с полностью нарушенной калибровочной $SU(2)$-симметрией, в которой массы всех трех векторных бозонов различны.

9. Варьирование по метрике и угловой момент для теории с фермионами.

1. Разобраться, как описывать фермионы во внешнем гравитационном поле. Для этого можно воспользоваться книгой по космологии (В.А. Рубаков, Д.С. Горбунов, Ч.2).

2. Найти Т.Э.И. для теории Дирака и массивного векторного поля.

3. Как варьированием по метрике искать угловой момент? Проверить себя на примере теорий из п.2.