Задачи к зачету по с/к “Численные методы” для судентов 443 группы кафедры физики частиц и космологии

Весна-2018

1. Аксионная Бозе-звезда. В настоящее время популярна гипотеза о том, что темная материя состоит из легких (псевдо)скалярных частиц, например, аксионов КХД с массой $m = 26\,\mu\mathrm{eV}$. В этом случае в нашей Вселенной могут существовать бозе-звезды — сгустки частиц темной материи, занимающих основной уровень в своей собственной гравитационной яме (т.е. гравитационно-связанные шары из бозе-конденсата). Эти объекты можно описать с помощью волновой функции $\psi(t,\, \boldsymbol{x})$, удовлетворяющей уравнениям Гросса-Питаевского-Ньютона:

$$
\begin{aligned}
&i\partial_t\psi = -\Delta\psi/2m + m\Phi\psi - g_4^2 m\,|\psi|^2\psi/f^2\ , \\
&\Delta\Phi = 4\pi G\rho\ ,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\Phi(\boldsymbol{x})$ — гравитационный потенциал, $\rho = m|\psi|^2$ — плотность аксионов, $g_4^2 \approx 0.04$, а $f = 10^{11}$ ГэВ — масштаб Печчеи-Квин, контролирующий самодействие аксионного поля.

- Подставить в систему (1) стационарный сферически-симметричный анзац, описывающий частицы в основном состоянии их потенциальной ямы $\Phi(r)$.
- Используя пересшкалировку координат и полей, избавиться от максимального количества параметров в полученных уравнениях.
- Численно найти все решения шутинг-методом.
- Построить график зависимости массы бозе-звезды от параметров решения.
- Найти максимально возможную массу в единицах массы Солнца.

2. Система из двух солитонов. Рассмотрим (1+1)-мерное скалярное поле $\varphi(t,\, x)$ на окружности $x \in [0;\, 2\pi R)$ с потенциалом $V(\varphi) = (\varphi^2 - 1)^2/4$. Численно найти стационарное решение уравнения поля, описывающее покоящуюся пару “кинк-антикинк”. Продемонстрировать, что это решение является нестабильным.

3. Столкновение солитонов. Рассмотрим $(1 + 1)$-мерную теорию поля $\varphi(t,\, x)$ со скалярным потенциалом $V(\varphi) = (\varphi^2 - 1)^2/4$. Данная теория обладает двумя топологическими солитонами — кинком и антикинком. Рассмотрим начальное состояние, в котором кинк налетает слева со скоростью v, а антикинк — справа со скоростью $(-v)$. Численно решить уравнения эволюции скалярного поля. При каких значениях v происходит аннингиляция кинка и антикинка при их встрече в области $x \approx 0$, а при каких они разлетаются? Представить ответ в виде графика.

4. Нестационарное уравнение Шредингера. Решить одномерное уравнение Шредингера

$$i\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi/2 + V(x)\psi$$

с помощью метода быстрого преобразования Фурье (FFT). Рассмотреть два случая:

- прохождение гауссова волнового пакета через кусочно-гладкий потенциал $V(x) = V_0\,\theta(x)\theta(a-x)$ при энергиях выше и ниже V_0;
- эволюцию когерентного состояния гармонического осциллятора ($V = x^2/2$).

5. Осциллон. Известно, что в нелинейной теории одномерного скалярного поля присутствуют осциллоны — долгоживущие осциллирующие конфигурации с локализованной плотностью энергии. При том, что время жизни некоторых осциллонов достигает $10^4 \div 10^6$ периодов, причина их существования не очевидна.

- Численно решая уравнения движения для скалярного поля с потенциалом $V(\varphi) = (\varphi^2-1)^2/4$, найти семейство осциллонов в этой модели.
  Указание. В качестве начальных данных удобно взять гауссов волновой пакет $\varphi(0,\,x) = \varphi_0\exp(-x^2/2x_0^2)$, $\partial_t\varphi(0,\,x) = 0$.
- Нарисовать конфигурации поля для четырех моментов времени в одном периоде осцилляций.
- Вычислить массу и частоту полученных осциллонов. Изобразить их на графике.

6. Осциллятор с переменной частотой. Рассмотрим гармонический осциллятор, частота которого зависит от времени по закону $\omega^2(t) = \omega_0^2 + \Omega^2\mathrm{arctg}(\alpha t)/\pi$. Пусть при $t \to -\infty$ он находился в основном состоянии. Численно найти его среднее число заполнения $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ при $t \to +\infty$. Рассмотреть пределы $\alpha \to 0,\,+\infty$.

7. Карта неба по данным Fermi LAT. Спутник Fermi LAT регистрирует фотоны с энергиями выше 100 МэВ, приходящие с разных направлений. Его данные `fermi_100M.tar.gz` представляют собой упорядоченный по времени список приходящих фотонов [1].

- Разбить небо на пиксели одним из существующих методов [2].
- Построить карты интенсивностей излучения на небе для диапазонов энергий $E > 100$ МэВ, $E > 1$ ГэВ и $E > 10$ ГэВ.

8. Поиск гамма-пульсаций. В файле `geminga.dat` [1] приведены гамма-кванты, зарегистрированные Fermi LAT в направлении от пульсара Geminga. В первой колонке — время прихода фотона в секундах с 1 января 2001 г., во второй — вероятность того, что данный фотон пришел от пульсара Geminga, а не от галактического фона или других источников, в третьей колонке — энергия в МэВ.

- Методом быстрого преобразования Фурье (FFT) найти частоту пульсаций f. Для экономии используемой памяти можно выполнять FFT полукогерентно, т.е. разбить интервал наблюдения на равные части и сложить квадраты модулей спектров, полученных для каждой из частей.

- Для каждого фотона вычислить фазу, в которой находился пульсар в тот момент. Построить распределение фотонов по фазам — профиль импульса пульсара. С помощью метода наименьших квадратов сравнить этот профиль с равномерным распределением, ожидаемым при отсутствии пульсаций. Какова статистическая значимость обнаружения пульсаций?

- Сравнивая провили импульса на разных временных участках, найти производную частоты пульсара по времени $\dot{f}$ (считая изменение линейным). Оценить возраст пульсара как $f/2\dot{f}$.

Список литературы

[1] ftp://cluster.inr.ac.ru/pub/num/exam_2018/

[2] M. R. Calabretta and E. W. Greisen, "Representations of celestial coordinates in FITS," Astron. Astrophys. **395** (2002) 1077 [astro-ph/0207413].