

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

Магнитное поле тёмной материи

Курсовая работа
студентки 2 курса 202 группы
Крюковой Екатерины Андреевны

Научный руководитель:
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Москва, 2017 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Использованные модели возникновения и роста магнитных полей	3
2.1	Механизм Гаррисона: возникновение магнитных полей на стадии преобладания излучения	3
2.2	Усиление первичного поля в пострекомбинационный период	4
2.3	Эффект динамо	4
3	Зеркальный мир	7
4	Генерация магнитных полей на РД-стадии для зеркального мира	8
5	Рост магнитного поля после рекомбинации в зеркальном мире	10
5.1	Характерные моменты времени для второго механизма.	10
5.1.1	Равенство плотностей энергии материи и излучения	10
5.1.2	Отделение фотонов от вещества	10
5.1.3	Что раньше: a_{eq} или a_r ?	11
5.1.4	Образование неоднородности	11
5.1.5	Угловая скорость вращения зеркальной протогалактики	13
5.1.6	Время образования протогалактики	14
5.2	Зеркальное магнитное поле при $x < 0.33$	14
5.3	Зеркальное магнитное поле при $x > 0.33$	15
5.4	Результаты расчетов	15
6	Динамо-усиление зеркального магнитного поля	16
6.1	Проводимость зеркальной плазмы	17
6.2	Усиление поля на малых масштабах	18
6.3	Усиление поля на масштабах галактики	18
7	Заключение	19

1 Введение

По современным представлениям, плотность энергии гипотетической темной материи во Вселенной примерно в 5 раз превышает плотность энергии обычного барионного вещества. Согласно одной из гипотез, темная материя частично состоит из зеркального вещества, частицы которого принимают участие в зеркальных сильном, слабом и электромагнитном взаимодействиях. Подобно тому, как распределение частиц видимой материи определяется силой Лоренца и силой тяготения, соответствующие зеркальные поля должны оказывать влияние на положение зеркальных частиц темной материи. В связи с этим было бы интересно узнать величину зеркального магнитного поля во Вселенной, чему и посвящена данная работа.

Современное значение крупномасштабного магнитного поля в галактиках порядка 1 мкГс. Каким образом возникло галактическое магнитное поле до сих пор точно не известно, однако на этот счёт существует множество теорий. Приведём их краткий обзор.

Наиболее ранние механизмы предполагали существование сравнительно сильного первичного космологического магнитного поля, замороженного в плазму. За счёт стягивания магнитных силовых линий при образовании неоднородностей должно было наблюдаться усиление поля до современного значения. Данный подход считается устаревшим, поскольку включает искусственное введение определенного начального магнитного поля, природа которого никак не объясняется [1].

Большая группа теорий основана на принципе работы "батарей": в них силы не электромагнитной природы заставляют электроны и ионы двигаться с разными скоростями. Различие в скорости движения заряженных частиц приводит к возникновению электрического тока, а следовательно и магнитного поля. Генерация поля может быть основана как на разнице в кинематических вязкостях электронов и ионов, так и на термоэлектрическом эффекте. В целом, значения индукции магнитного поля в таких теориях получаются небольшими ($10^{-22} - 10^{-17}$ Гс), и были бы не в состоянии объяснить текущие величины B , если бы не достижения теории динамо-эффекта.

Динамо-эффект – эффект самовозбуждения магнитного поля при определённых видах движений проводящей жидкости. Несмотря на многочисленные запреты (например, динамо-усиление невозможно при любых двумерных движениях), движения, осуществляющие динамо-эффект, оказываются вполне естественными. Эффект заключается в усилении, а не в возникновении: в отсутствие зародышевого поля механизм не работает. Экспоненциальный рост поля во времени даёт возможность использовать теории второго типа в сочетании с динамо-эффектом.

2 Используемые модели возникновения и роста магнитных полей

2.1 Механизм Гаррисона: возникновение магнитных полей на стадии преобладания излучения

Рассматривается область пространства на РД-стадии, претерпевающая расширение и обладающая угловым моментом. Область равномерно заполнена излучением плотностью ρ_γ и материей плотностью ρ (ионы и нерелятивистские электроны) с угловыми скоростями ω_γ и ω соответственно.

Пусть a - масштабный фактор, тогда при расширении $\rho a^3 = const$, $\rho_\gamma a^4 = const$. Если бы взаимодействие между фотонами, электронами и ионами отсутствовало, сохранился бы угловой момент и выполнялось $\rho \omega a^5 = const$, $\rho_\gamma \omega_\gamma a^5 = const$. Тогда $\omega \sim a^{-2}$, $\omega_\gamma \sim a^{-1}$ и видно, что при расширении вращение излучения замедлялось бы слабее, чем вещество.

Учитывая взаимодействие заряженных частиц с фотонами (томсоновское рассеяние), получим, что электроны увлекаются фотонным газом сильнее, чем тяжелые положительно заряженные ионы. Окончательно имеем положительно заряженный газ ионов с плотностью ρ и электронно-фотонный газ плотностью ρ_γ , движущиеся с различными угловыми скоростями. Фактически, возникает электрический ток, который создает магнитное поле.

В статье Гаррисона [2] показано, что величина магнитного поля для плазмы из протонов и электронов, сформированного по описанному выше механизму, составляет

$$\mathbf{B} = -\frac{2m_H c}{e} \left(1 - \frac{T}{T_1}\right) \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где T_1 и T - температуры в начале и конце действия механизма, $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость вращения протонов в конце генерации. Начало генерации определяется из условия

$$m_e c^2 = kT_1 :$$

ионы нерелятивистские, отсутствует образование лептонных пар и нет слабых взаимодействий. Спад генерации происходит при понижении ρ_γ до уровня, при котором кулоновское взаимодействие электронов и протонов начинает преобладать над томсоновским рассеянием, что случается при выполнении условия:

$$\rho \sim \rho_\gamma.$$

Оценка для ω проводится в предположении $\omega \simeq \omega_\gamma$. Гаррисон полагает меру неоднородности вращающегося участка

$$\chi_\gamma \simeq \frac{\omega_\gamma^2}{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2} = \frac{3\omega_\gamma^2}{8\pi G \rho_{rad}} \sim 1.$$

Тогда угловая скорость в конце генерации выражается следующим образом:

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{rad}}{3}}. \quad (2)$$

Оценка величины индукции магнитного поля для обычного (не зеркального) мира в конце эры излучения даёт

$$B \sim 10^{-16} \text{ Гс.}$$

2.2 Усиление первичного поля в пострекомбинационный период

Мишустин и Рузмайкин [3] предложили механизм генерации, схожий с [2], но протекающий после рекомбинации в эпоху Тёмных веков. В этот период Вселенная состоит в основном из нейтральных атомов H и He с концентрацией n_H , свободных электронов и протонов в ней существенно меньше: $n_e = n_p = yn_H$, где $y \simeq 3 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-5}$. После отделения вещества от излучения движение газа можно описывать относительно однородного радиационного фона.

Рассмотрим протогалактику, участвующую в расширении и одновременно вращающуюся относительно фонового излучения. Пусть $\omega(t)$ – угловая скорость атомов нейтрального вещества (H и He). Вращение протогалактики сопровождается относительным движением протонов и электронов и, как следствие, усилением магнитного поля, возникшего в эру излучения. Действительно, столкновения близких по массе протонов и нейтральных атомов с учетом $n_p \ll n_H$ вынуждают их двигаться с той же угловой скоростью $\omega(t)$. На движение протонов излучение практически не оказывает влияния, зато электроны об него тормозятся. Разность угловых скоростей протонов и электронов снова приводит к образованию электрического тока и магнитного поля.

Из уравнения движения электрона, уравнений Максвелла и Хаббловского расширения в первом приближении получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} a^2 \alpha \mathbf{V} = \frac{2}{\tau_{e\gamma}} \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

где a – масштабный фактор, $\tau_{e\gamma}$ – характерное время томсоновского рассеяния, σ_T – сечение рассеяния, $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{см}^2$,

$$\alpha = \frac{e}{m_e c}, \quad \frac{1}{\tau_{e\gamma}} = \frac{4\sigma_T \rho_\gamma c}{3m_e}. \quad (4)$$

Величина индукции магнитного поля

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\alpha a^2(t)} \left(\int_{t_r}^t \frac{2a^2 \boldsymbol{\omega}}{\tau_{e\gamma}} dt + (a^2 \alpha \mathbf{V})|_{t=t_r} \right). \quad (5)$$

Механизм начинает работу после отделения вещества от излучения (для обычного, т.е. не зеркального мира $z \sim 1100$). Основные предположения нарушаются при смене Хаббловского расширения собственным гравитационным сжатием: в рассматриваемой области начинает образовываться будущая галактика или их скопление. Для оценки значения \mathbf{B} требуется знать момент отделения вещества от излучения (t_r или a_r), момент начала формирования неоднородности (t_* или a_*), зависимости $t(a)$ и $\omega(a)$.

2.3 Эффект динамо

Основное усиление магнитного поля галактик до современного значения происходит после их формирования за счёт динамо-эффекта. Динамо преобразует кинетическую энергию движения проводящей среды в энергию магнитного поля, при этом величина поля экспоненциально растёт со временем. Важной особенностью магнитного поля в галактиках является его вмороженность в ионизованный межзвёздный газ: магнитное число Рейнольдса Re_m для движений газа в галактике на различных масштабах оказывается в пределах $3 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^7$ [4], иными словами, $Re_m \gg 1$, и кинетическая энергия газа во много раз превосходит омические потери.

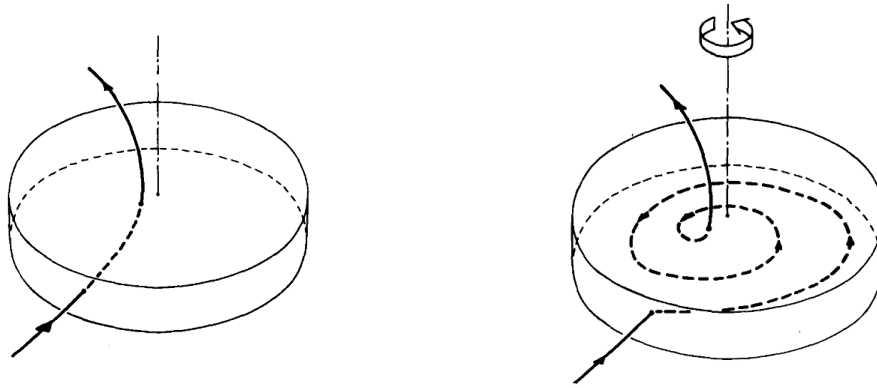


Рис. 1: Динамо-эффект. Образование магнитного поля при дифференциальном вращении (линии поля вморожены в плазму) [4]

Теория динамо – достаточно сложная с математической точки зрения теория, но качественно процесс усиления поля можно пояснить на следующих двух примерах. Пусть некая область пространства, например, диск галактики, дифференциально вращается, а газ совершает локальное турбулентное движение по спирали. Для экспоненциального роста магнитного поля со временем принципиально наличие самовозбуждающих движений. В рассматриваемой задаче на больших масштабах существенны две компоненты поля: тороидальная (в плоскости вращения) и полоидальная (вдоль оси вращения).

Сначала рассмотрим (рис. 1) линию магнитного поля, лежащую перпендикулярно плоскости вращения (полоидальная компонента). В силу того, что точки диска вращаются дифференциально, а линии магнитного поля вморожены в плазму, при повороте диска вокруг своей оси линия магнитного поля будет "наматываться" на ось вращения. Таким образом, наличие полоидальной компоненты поля будет усиливать тороидальную.

Наличие только описанного выше эффекта приводило бы к линейному росту поля со временем. Обратный процесс – усиление полоидальной компоненты за счёт тороидальной, изображен на рисунке 2. Линии поля по-прежнему вморожены в плазму и из-за турбулентных движений газа возможно локальное искривление тороидальной магнитной линии и образование небольших петель. Со временем так называемые ячейки турбулентности увеличиваются в размерах и для сохранения полного углового момента им необходимо замедлить своё вращение, что равносильно повороту в противоположную сторону относительно направления общего вращения диска. Вместе с газом поворачиваются и петли магнитного поля. У основания петель на небольшом расстоянии оказываются две магнитные линии, направленные в разные стороны. Спустя некоторое время из-за омических потерь петли естественным образом трансформируются и покидают место соприкосновения с исходной тороидальной линией. Данный вид усиления за счёт

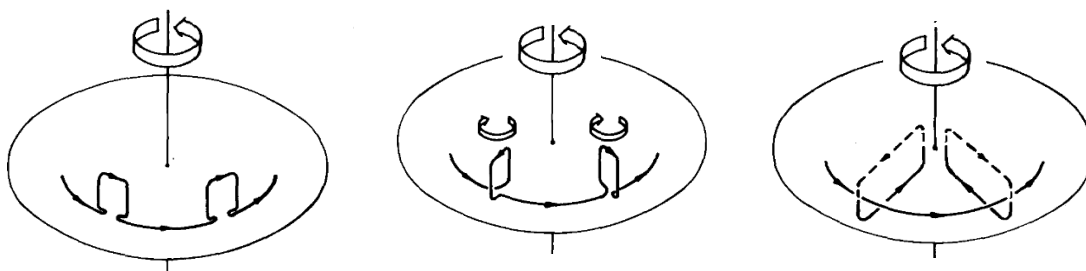


Рис. 2: Динамо-эффект. Турбулентное движение способствует образованию магнитного поля в диске [4]

спиралевидного турбулентного движения получил название α -эффекта.

В общем случае динамо-усиление магнитного поля в движущейся проводящей жидкости описывается уравнением магнитной индукции (получено из уравнений Максвелла и закона Ома):

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H},$$

где \mathbf{v} – скорость движения частиц среды, σ – её электропроводность.

В приближении слабых неоднородностей, идеально проводящей жидкости, движущейся со средней скоростью \mathbf{V} , и отсутствия вязкости среднее значение поля на крупных масштабах \mathbf{B} подчиняется уравнению [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \text{rot } \alpha \mathbf{B} - \text{rot} (\beta \text{rot } \mathbf{B}), \quad (6)$$

где α – средняя спиральность потока, β – коэффициент турбулентной диффузии.

Для галактики в форме диска толщины h , с характерным размером турбулентности l , скоростью турбулентного движения v и угловой скоростью Ω коэффициенты α и β могут быть оценены как

$$\alpha = \frac{\Omega l^2}{h}, \quad \beta = \frac{lv}{3}.$$

Вклад в усиление поля двух основных процессов – дифференциального вращения и α -эффекта – описывается безразмерными величинами R_ω и R_α , выражения для которых даются в [5]:

$$R_\omega = \frac{1}{\beta} \left(\frac{h}{500 \text{пк}} \right)^2 \left(\frac{\Omega}{20 \text{км с}^{-1} \text{кпк}^{-1}} \right), \quad R_\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{h}{500 \text{пк}} \right). \quad (7)$$

Число динамо D_d определяет общее действие механизма.

$$D_d = R_\omega R_\alpha \simeq 9 \left(\frac{h\Omega}{v} \right)^2$$

Экспоненциальный рост решения уравнения (6) со временем характеризуется скоростью роста динамо

$$\Gamma = D_d^{1/2} \frac{\beta}{h^2},$$

и для величины макроскопического магнитного поля имеем

$$B = B_0 e^{\Gamma t} = B_0 e^{\frac{\Omega t}{h}}. \quad (8)$$

Известно, что в определённый момент динамо-усиление достигает насыщения, и существует максимально достижимое значение индукции поля B_{eq} . Упрощенные оценки для B_{eq} связывают её с величиной поля \tilde{B} , при которой наблюдается равенство плотностей энергии кинетической энергии турбулентного движения и магнитного поля:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\tilde{B}^2}{8\pi}, \quad (9)$$

$$B_{eq} = \tilde{B} \sqrt{\frac{D_d}{D_{cr}} - 1}, \quad (10)$$

где D_{cr} – минимальное значение числа динамо, для которого динамо усиление преобладает над турбулентными диффузионными потерями, – определяется с помощью численного моделирования.

3 Зеркальный мир

Впервые подобие идеи зеркального мира было предложено Ли и Янгом в [6] после обнаружения несохранения Р-четности в слабых взаимодействиях. Для сохранения казавшейся естественной симметрии зеркального отражения они предположили существование левых и правых протонов, проявляющих себя по-разному при рождении в β -распаде. Тогда эксперименты по нарушению Р-чётности можно было бы объяснить следующим образом: в них наблюдался преимущественно один из типов протонов, например, левый. Правые протоны не были зарегистрированы потому, что их не было поблизости, то есть убедительных доказательств об отсутствии правых протонов в природе получено не было.

Впоследствии эта концепция была существенно улучшена и доработана. Согласно ей, наряду с известными на сегодняшний день (обычными) частицами существуют так называемые зеркальные частицы, а общее число элементарных частиц оказывается удвоенным. Кобзаревым, Окунем и Померанчуком было показано [7], что зеркальные частицы не могут принимать участие в обычном сильном, слабом и электромагнитном взаимодействиях. При этом зеркальная материя должна взаимодействовать с обычным веществом гравитационно, иначе её обнаружение было бы невозможным.

В наиболее простом случае зеркальная симметрия оказывается точной, а значит, в зеркальном мире частицы принимают участие в зеркальных сильном, слабом и электромагнитном взаимодействиях с неизменными значениями констант и зарядов [8]. Но зеркальный и обычный мир не идентичны друг другу. Из условий первичного нуклеосинтеза на число сортов нейтрино N_ν следует, что начальная температура зеркального сектора T' должна быть меньше, чем температура обычного T (здесь и далее величины, относящиеся к зеркальному миру, будем помечать штрихом). Поскольку взаимодействие между двумя секторами очень слабое, отношение температур $T'/T = x$ остаётся постоянным на всех дальнейших этапах эволюции Вселенной [9]. x является свободным параметром, для него существует лишь оценка сверху, полученная из ограничений первичного нуклеосинтеза ($\Delta N_\nu < 1$):

$$x < 0.64.$$

Поскольку зеркальное вещество наблюдатель из нашего мира может обнаружить только по гравитационному взаимодействию, зеркальная материя оказывается естественным кандидатом на роль тёмной материи. В данной работе предполагается, что зеркальная материя составляет основную часть тёмной материи. Рассматриваются вопросы, связанные с электромагнитным взаимодействием зеркального сектора, особенности зеркального слабого и сильного взаимодействий не учитываются. В связи с этим зеркальное вещество во Вселенной принимается состоящим в основном из зеркальных протонов p' , зеркальных электронов e' и зеркальных атомов водорода H' . Зеркальное вещество взаимодействует с зеркальными фотонами γ' , составляющими зеркальное излучение.

4 Генерация магнитных полей на РД-стадии для зеркального мира

Механизм, предложенный Гаррисоном [2], даёт индукцию магнитного поля

$$\mathbf{V}' = -\frac{2m_H c}{e} \left(1 - \frac{T'}{T'_1}\right) \boldsymbol{\omega}', \quad (11)$$

где T'_1 и T' – температуры в начале и конце действия механизма, $\boldsymbol{\omega}'$ – угловая скорость вращения ионов в зеркальном мире. Генерация начинается, когда зеркальные электроны становятся нерелятивистскими:

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= kT'_1 \\ T'_1 &= m_e c^2 / k = 6 \times 10^9 K, \end{aligned} \quad (12)$$

а завершается при равенстве плотностей энергии зеркальной материи и зеркальных фотонов:

$$\begin{aligned} \rho_d &= \rho'_\gamma \\ \Omega_d \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 &= \Omega'_\gamma \left(\frac{a_0}{a}\right)^4, \end{aligned}$$

где Ω_d , Ω'_γ – современные доли плотностей энергии тёмной материи и зеркальных фотонов соответственно.

Выразим плотность энергии зеркальных фотонов ρ'_γ . Соотношение между температурами нашего и зеркального мира остаётся постоянным [9]

$$x = T/T' = T_0/T'_0 = \text{const.}$$

Поскольку плотность энергии излучения связана с температурой как

$$\rho_{\text{rad}} = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4,$$

где g_* – эффективное число степеней свободы [10], в любой момент времени

$$\frac{\rho'_\gamma}{\rho_\gamma} = x^4, \quad \frac{\Omega'_\gamma}{\Omega_\gamma} = x^4. \quad (13)$$

Тогда из условия равенства плотностей энергии находим момент завершения генерации:

$$\frac{a_0}{a} = \frac{\Omega_d h^2}{\Omega'_\gamma h^2} = \frac{0.119}{2.5 \times 10^{-5} x^4} = 4760 x^{-4} = \frac{T'}{T'_0}. \quad (14)$$

Используя $T_0 = 2.73 K$, находим температуру зеркального мира в это время:

$$T' = 13 \times 10^3 x^{-3} K. \quad (15)$$

Естественным ограничением на x в нашей модели является соотношение между начальной и конечной температурами зеркального вещества: $T'_1 \geq T'$, или

$$x > 0.013. \quad (16)$$

Оценка для $\boldsymbol{\omega}'$ проводится аналогично (2). Для зеркального мира

$$\boldsymbol{\omega}' \simeq \boldsymbol{\omega}'_\gamma \simeq \sqrt{\frac{8\pi G(\rho_{\text{rad}} + \rho'_{\text{rad}})}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{\text{rad}}(1 + x^4)}{3}}. \quad (17)$$

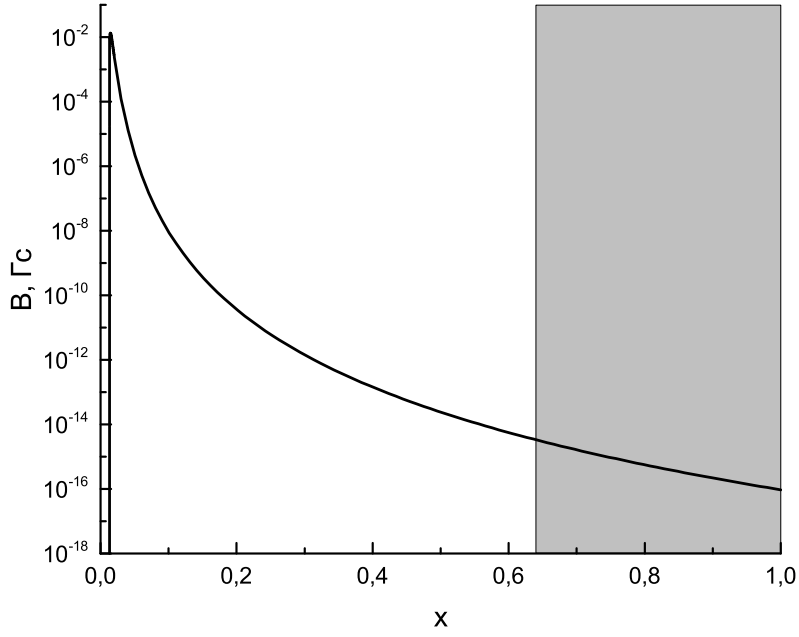


Рис. 3: График зависимости величины магнитного поля, полученного по механизму Гаррисона в конце РД-стадии, от параметра x

Современная плотность энергии фотонов [10] $\rho_{\gamma 0} = 2.55 \times 10^{-10} \text{ГэВ}/\text{см}^3$. Тогда в момент завершения генерации, определяемый формулой (14),

$$\rho_{rad} = 1.68 \rho_{\gamma 0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 = 3.9 \times 10^{-19} x^{-16} \text{Г}/\text{см}^3. \quad (18)$$

Из (11), (12), (15), (17), (18) получаем:

$$B' = -9.4 \times 10^{-17} x^{-8} (1 - 2.2 \times 10^{-6} x^{-3}) \text{Гс}. \quad (19)$$

На рисунке 3 представлен ход зависимости зеркального магнитного поля B' от параметра x . Область $x > 0.64$, запрещенная в используемой модели, затемнена. Вклад поправки $\left(1 - \frac{T'}{T_1}\right)$ мало отличается от единицы при $x \gg 0.014$, поэтому в дальнейшем будем пренебрегать им.

5 Рост магнитного поля после рекомбинации в зеркальном мире

Уравнение Фридмана, описывающее расширение Вселенной, можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \left((\Omega_b + \Omega_d) \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (\Omega_{rad} + \Omega'_{rad}) \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda \right), \quad (20)$$

где a – масштабный фактор, a_0 – его современное значение, ρ_c – критическая плотность, Ω_b, Ω_{rad} (Ω_d, Ω'_{rad}) – современные доли плотности энергии обычной (зеркальной) материи и излучения соответственно [10]. Красное смещение z связано с масштабным фактором a как:

$$\frac{a_0}{a} = 1 + z.$$

5.1 Характерные моменты времени для второго механизма.

5.1.1 Равенство плотностей энергии материи и излучения

Определим момент равенства плотностей энергии всей (и зеркальной, и обычной) материи и всего излучения (**matter-radiation equality**) [9].

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \Omega_b + \Omega_d & \Omega_r &= \Omega_{rad} + \Omega'_{rad} \\ \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 &= \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \end{aligned}$$

Используя (13), выражение для современной доли энергии излучения [10]:

$$\Omega_{rad} h^2 = 1.68 \Omega_\gamma h^2 = 4.2 \times 10^{-5},$$

и данные эксперимента Planck [11]:

$$\Omega_b h^2 = 0.022, \quad \Omega_d h^2 = 0.119,$$

получим

$$\begin{aligned} 1 + z_{eq} &= \frac{\Omega_m h^2}{\Omega_r h^2} = \frac{0.141}{4.2 \times 10^{-5}(1 + x^4)} = \frac{3360}{1 + x^4} \\ a_{eq} &= \frac{a_0}{1 + z_{eq}} = a_0 \frac{1 + x^4}{3360}. \end{aligned} \quad (21)$$

5.1.2 Отделение фотонов от вещества

Сделаем оценку для момента отделения фотонов от вещества (**photon decoupling**). В обычной Вселенной отделение происходит при температуре $T_{dec} \simeq 0.26$ эВ, что соответствует красному смещению $1 + z_{dec} = T_{dec}/T_0 \simeq 1100$. В [9] показано, что температура отделения для зеркального сектора может быть вычислена так же, как для обычного, поэтому $T'_{dec} \simeq T_{dec}$, а красное смещение

$$1 + z'_{dec} = \frac{a_0}{a'_{dec}} = \frac{T'_{dec}}{T'_0} \simeq \frac{T_{dec}}{xT_0} = x^{-1}(1 + z_{dec}) \simeq 1100x^{-1}.$$

Масштабный фактор в момент отделения

$$a_r = \frac{a_0 x}{1100}. \quad (22)$$

5.1.3 Что раньше: a_{eq} или a_r ?

Из (21) и (22) видно, что от параметра x зависят моменты отделения фотонов и равенства плотностей энергий, а также их порядок следования. Рекомбинация в зеркальном мире наступает раньше, чем равенство плотностей энергии при

$$\begin{aligned} a_r &< a_{eq} \\ \frac{a_0 x}{1100} &< \frac{a_0(1+x^4)}{3360} \\ x &< 0.33. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, при $x < 0.33$ механизм протекает последовательно через РД- и МД-стадии, а при $x > 0.33$ усиление поля происходит только на МД-стадии. Это является существенным при вычислении (24) – нужно будет выбирать различные режимы $t(a)$ для стадий преобладания излучения и материи.

5.1.4 Образование неоднородности

Аналогично (5) для зеркального мира имеем

$$\mathbf{V}'(t) = \frac{1}{\alpha a^2(t_*)} \left(\int_{t_r}^{t_*} \frac{2a^2 \boldsymbol{\omega}'}{\tau'_{e\gamma}} dt + (a^2 \alpha \mathbf{V}')|_{t=t_r} \right). \quad (24)$$

Верхний предел интегрирования в (24) определяется началом формирования неоднородностей. Для того, чтобы вид зависимости $t(a)$ был единым на всем отрезке интегрирования в МД-стадию, определим t_* как момент времени, в который происходит начало формирования галактики массой M . Пусть R – современный размер области пространства с плотностью ρ_{m0} , в котором содержится вещество массой M . R определяется из

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_{m0},$$

где $\rho_{m0} = \Omega_m \rho_c = 3.6 \times 10^{10} M_\odot / \text{Мпк}^3$. Размер $R = 1$ Мпк соответствует $M = 1.5 \times 10^{11} M_\odot$ – массе галактики средних размеров, а $R = 400$ кпк – массе наиболее крупных карликовых галактик $M = 1.0 \times 10^{10} M_\odot$. Получим оценку для a_* .

Следуя [12], проведём оценку дисперсии сглаженного контраста

$$\sigma_R^2(t) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k, t) \frac{9j_1^2(kR/a_0)}{(kR/a_0)^2}. \quad (25)$$

Качественное обсуждение вклада в значение интеграла различных величин k подробно приведено в [12]. Основываясь на этом, найдём значение интеграла (25) для областей $\eta_{eq}^{-1} \lesssim k \lesssim a_0/R$ и $k \sim a_0/R$. Здесь η_{eq} – конформное время РД/МД-перехода,

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}} (\sqrt{2} - 1).$$

Будем считать

$$\mathcal{P}(k, z) = F^2(z) \mathcal{P}_\Phi(k) \ln^2(0.2k\eta_{eq}).$$

Правый сомножитель в (25) для k вплоть до a_0/R можно приближенно считать равным 1, откуда

$$\sigma_{R,1}^2(z) = F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \int_{\eta_{eq}^{-1}}^{a_0/R} \frac{dk}{k} \ln^2(0.2k\eta_{eq}) = \frac{1}{3} F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \ln^3(0.2k\eta_{eq}) \Big|_{\eta_{eq}^{-1}}^{a_0/R}. \quad (26)$$

Для значений $k > a_0/R$ следует учесть убывание сферической функции Бесселя $j_1(kR/a_0)$. Удобно отсчитывать k в единицах a_0/R : $k = a_0/R y$.

$$\sigma_{R,2}^2(z) = F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \int_1^{y_m} \frac{dy}{y} \ln^2 \left(\frac{0.2a_0\eta_{eq}}{R} y \right) \frac{9j_1^2(y)}{y^2}. \quad (27)$$

Построим график функции $j(y) = \frac{9j_1^2(y)}{y^2}$ (см. рис. 4). В области $y > 1$ функция $j(y)$ быстро убывает по сравнению с медленным ростом квадрата логарифма. Видно, что уже при $y = 4$ вклад подынтегральной функции в (27) оказывается подавлен $j(y)$, поэтому можно принять верхний предел интегрирования $y_m = 4$. По интегральной теореме о среднем вынесем за знак интеграла значение медленно меняющейся функции в точке $y_1 \in [1, y_m]$:

$$\sigma_{R2}^2(z) \simeq F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \ln^2 \left(\frac{0.2a_0\eta_{eq}}{R} y_1 \right) \int_1^{y_m} \frac{dy}{y} \frac{9j_1^2(y)}{y^2}. \quad (28)$$

Теперь значение интеграла не зависит от размера неоднородности R , и его можно найти численно. Имеем

$$\int_1^4 \frac{dy}{y} \frac{9j_1^2(y)}{y^2} = 0.573, \quad \int_1^{100} \frac{dy}{y} \frac{9j_1^2(y)}{y^2} = 0.575,$$

чем обосновывается наш выбор значения $y_m = 4$.

По графику $j(y)$ выберем y_1 , соответствующий значению $j(y_1) = 0.60$: $y_1 = 1.57$. Проверим соответствие значений интеграла (27) приближенным значениям, полученным по

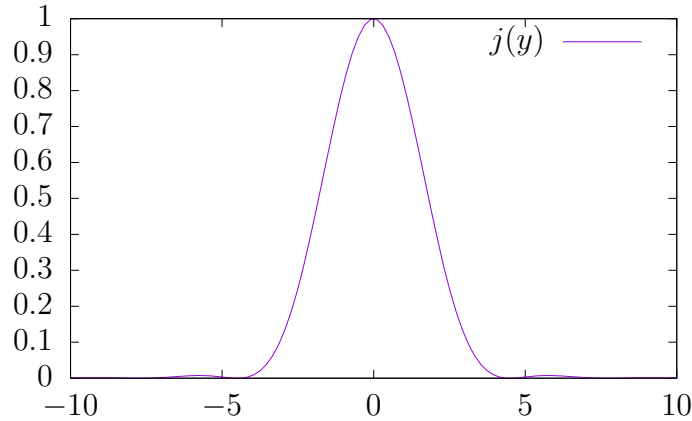


Рис. 4: График функции $j(y) = 9j_1^2(y)/y^2$ — правого сомножителя в (27)

формуле (28) с $y_1 = 1.57$, $y_m = 4$ для размеров неоднородностей, соответствующих карликовым и небольшим галактикам. Значение $a_0\eta_{eq}$ примем равным 130 Мпк [12]. Пусть

$$I_1 = \int_1^4 \frac{dy}{y} \ln^2 \left(\frac{0.2a_0\eta_{eq}}{R} y \right) \frac{9j_1^2(y)}{y^2},$$

$$I_2 = \ln^2 \left(\frac{0.2a_0\eta_{eq}}{R} y_1 \right) \int_1^4 \frac{dy}{y} \frac{9j_1^2(y)}{y^2}.$$

Как видно из таблицы 1, в пределах используемой точности можно находить $\sigma_{R,2}^2$ по приближенной формуле (28) или

$$\sigma_{R,2}^2(z) \simeq F^2(z) \mathcal{P}_\Phi \ln^2 \left(\frac{26 \text{Мпк}}{R} \times 1.57 \right) \times 0.57.$$

R	I_1	I_2
1 Мпк	7.88	7.88
400 кпк	12.24	12.26
100 кпк	20.67	20.97
40 кпк	27.45	27.50

Таблица 1: Проверка справедливости выбранного приближения

Уточненная формула для дисперсии сглаженного контраста принимает вид:

$$\sigma_R^2(z) \simeq \frac{1}{(1+z)^2} \left(0.57 \ln^2 \left(\frac{26 \text{Мпк}}{R} \times 1.57 \right) + \frac{1}{3} \ln^3 \left(\frac{26 \text{Мпк}}{R} \right) + 1.4 \right). \quad (29)$$

По этой формуле для $\sigma_R = 0.5$, что соответствует моменту, в который гравитационно связными оказалась небольшая часть всех галактик для полученных выше значений R имеем для карликовой галактики

$$R = 400 \text{ кпк}, \quad z_* = 11.3, \quad (30)$$

для галактики средних размеров

$$R = 1 \text{ Мпк}, \quad z_* = 8.1. \quad (31)$$

5.1.5 Угловая скорость вращения зеркальной протогалактики

Согласно [13], плотность вещества галактики ρ'_g в момент вириализации соотносится с плотностью окружающей материи как

$$\rho'_g \simeq 150\rho_{m*} = 150\rho_c\Omega_m \left(\frac{a_0}{a_*} \right)^3. \quad (32)$$

Оценим угловую скорость вращения зеркальной протогалактики ω'_* . Пусть ω'_{g0} , R_{g0} – современные угловая скорость вращения и радиус гало галактики, R_{g*} – радиус гало протогалактики. Тогда из закона сохранения момента импульса для сжатия протогалактики:

$$\omega'_* = \omega'_{g0} \left(\frac{R_{g0}}{R_{g*}} \right)^2.$$

Поскольку полная масса вещества сохраняется,

$$M = \frac{4}{3}\pi \times 150\rho_{m*}R_{g*}^3 \quad R_{g*} = \left(\frac{M}{200\pi\rho_{m*}}\right)^{1/3}$$

$$\omega'_* = \omega'_{g0}R_{g0}^2 \left(\frac{200\pi\Omega_m\rho_c}{M}\right)^{2/3} \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^2. \quad (33)$$

5.1.6 Время образования протогалактики

Наконец, выразим время t_* . Для этого решим уравнение Фридмана (20) для характерных значений a_* . Формулы (30), (31) дают $z_* = 8 - 11$. Таким образом, для рассматриваемых a_* целесообразно учитывать вклад материи и космологического Λ -члена.

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_m a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right)$$

$$H_0(t_0 - t_*) = \int_{a_*}^{a_0} \frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_m a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2}} = \int_{a_*}^{a_0} \frac{a^{1/2} da}{\sqrt{\Omega_m a_0^3 + \Omega_\Lambda a^3}} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_{u_*}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \text{где } u^2 = \frac{\Omega_\Lambda a^3}{\Omega_m a_0^3}$$

Получаем выражение для времени формирования неоднородности

$$t_* = t_0 + \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0} \left(\text{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \left(\frac{a_*}{a_0}\right)^3} - \text{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right)$$

$$t_* = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0} \text{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \left(\frac{a_*}{a_0}\right)^3}. \quad (34)$$

5.2 Зеркальное магнитное поле при $x < 0.33$

При значениях x , определяемых (23), усиление происходит как в эру излучения, так и в эру вещества. Перепишем (24) с учетом введенных обозначений.

$$\mathbf{B}'(t) = \frac{1}{\alpha a_*^2} \left(\int_{t_r}^{t_{eq}} + \int_{t_{eq}}^{t_*} \right) \frac{2a^2\omega'}{\tau'_{e\gamma}} dt + \left(\frac{a_I}{a_*}\right)^2 \mathbf{B}_I = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \left(\frac{a_I}{a_*}\right)^2 \mathbf{B}_I. \quad (35)$$

Здесь a_I – масштабный фактор в конце работы первого (гаррисоновского) механизма, B_I – соответствующее магнитное поле. Воспользуемся (14) и (19), предполагая $x \gg 0.014$,

$$a_I = \frac{a_0 x^4}{4760}, \quad B_I = -9.4 \times 10^{-17} x^{-8} \text{Гс}. \quad (36)$$

Используя (4), (13) и закон сохранения момента импульса, получаем:

$$\frac{2a^2\omega'}{\tau'_{e\gamma}} = \frac{8\sigma_{TC}}{3m_e} \rho_{\gamma 0} x^4 \frac{a_0^4}{a^4} a_*^2 \omega'_*. \quad (37)$$

Для $t_r < t < t_{eq}$:

$$t = a^2 \cdot \text{const} \quad dt = t_{eq} \frac{2ada}{a_{eq}^2},$$

для $t_{eq} < t < t_*$:

$$t = a^{3/2} \cdot const \quad dt = t_* \frac{3a^{1/2} da}{2a_*^{3/2}}.$$

$$B_1 = \frac{8\sigma_T c^2}{3e} \rho_{\gamma 0} x^4 \omega'_* t_* \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{3/2} \left(\left(\frac{a_0}{a_r}\right)^2 \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{1/2} - \left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{5/2} \right) \quad (38)$$

$$B_2 = \frac{8\sigma_T c^2}{5e} \rho_{\gamma 0} x^4 \omega'_* t_* \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{3/2} \left(\left(\frac{a_0}{a_{eq}}\right)^{5/2} - \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{5/2} \right) \quad (39)$$

Для галактики М33 (галактика средних размеров), подставляя $v' = 180 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$, $M' = 6 \times 10^{10} M_{\odot}$, $R_{g0} = 17 \text{ кпк}$, получаем

$$\begin{aligned} a_0/a_* &= 10.3 \\ \omega'_* &= 6.0 \times 10^{-16} \text{ с}^{-1} \\ t_* &= 1.6 \times 10^{16} \text{ с} \\ B_{II} &= ((3.3x^2 - 12x^4) \times 10^{-17} - 4.4 \times 10^{-22}) \text{ Гс} \end{aligned} \quad (40)$$

5.3 Зеркальное магнитное поле при $x > 0.33$

Аналогично (35),

$$\mathbf{V}'(t) = \frac{1}{\alpha a_*^2} \int_{t_r}^{t_*} \frac{2a^2 \omega'}{\tau'_{e\gamma}} dt + \left(\frac{a_I}{a_*}\right)^2 \mathbf{V}_I = \mathbf{V}_3 + \left(\frac{a_I}{a_*}\right)^2 \mathbf{V}_I. \quad (41)$$

Повторяя выкладки предыдущего пункта (ср. с (39)), находим

$$B_3 = \frac{8\sigma_T c^2}{5e} \rho_{\gamma 0} x^4 \omega'_* t_* \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{3/2} \left(\left(\frac{a_0}{a_r}\right)^{5/2} - \left(\frac{a_0}{a_*}\right)^{5/2} \right). \quad (42)$$

Оценка величины индукции магнитного поля для нашей галактики в этом случае (исходные данные и значения a_0/a_* , ω'_* , t_* те же):

$$B_{II} = (1.1x^{3/2} \times 10^{-17} - 9.7x^4 \times 10^{-23} - 9.7 \times 10^{-23}) \text{ Гс} \quad (43)$$

5.4 Результаты расчетов

На рисунке 5 представлена зависимость величины индукции зеркального магнитного поля в момент отделения неоднородности от параметра x для нашей галактики. Области, запрещенные в используемой модели, затемнены. Приведены две кривые: для $x < 0.33$ и $x > 0.33$. Несмотря на то, что вид зависимости $B(x)$ в этих двух случаях заметно отличается, в точке $x = 0.33$ значения B сходятся, что говорит о правильности способа нахождения B .

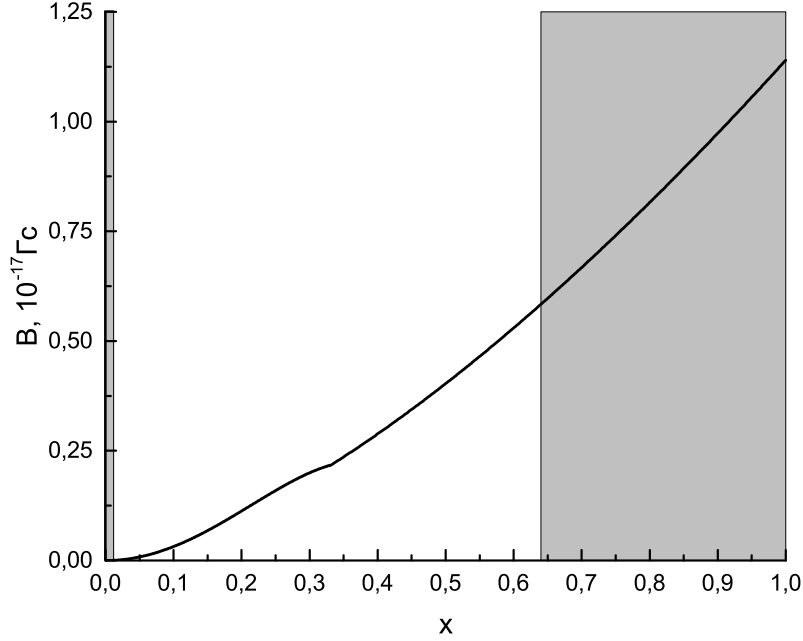


Рис. 5: График зависимости величины магнитного поля, полученного по механизму Мишустина и Рузмайкина в пострекомбинационную эпоху, от параметра x

6 Динамо-усиление зеркального магнитного поля

В теории динамо-эффекта предполагается вмороженность линий магнитного поля в межзвёздную среду. Как было указано выше, критерием сохранения магнитного потока и тем самым, вмороженности линий магнитного поля, может считаться условие $\text{Re}_m \gg 1$, где Re_m – магнитное число Рейнольдса, определяемое как

$$\text{Re}_m = \frac{ul \cdot 4\pi\sigma}{c^2}, \quad (44)$$

где u, l – характерные скорости и размеры турбулентности проводящей жидкости, σ – её проводимость [14]. Для зеркального мира из общих соображений можем считать

$$u' \sim u, \quad l' \sim l.$$

Скорость турбулентных движений межзвёздного газа оценивается по дисперсии скорости газа в галактиках. Для галактик с различной скоростью звездообразования это значение остаётся примерно постоянным и равным $u = 10$ км/с [15]. Размер ячеек турбулентности в галактиках принимается равным $l = 100$ пк. Для гало тёмной материи в [5] берутся значения $u' = 20$ км/с и $l' = 200$ пк.

Поскольку температура зеркального мира T' ниже температуры обычного T , возможность процессов звездообразования и реионизации зеркальной материи остаётся неясной (более подробное обсуждение см. [16]). Будем считать, что эти процессы протекают, но с меньшей интенсивностью, поэтому межзвёздное пространство заполнено частично ионизированной водородной плазмой, степень ионизации и температура электронной компоненты которой – свободные параметры задачи.

6.1 Проводимость зеркальной плазмы

Проведём оценку проводимости частично ионизованной плазмы и сделаем вывод о применимости теории динамо для зеркального мира. Пусть $n'_e, n'_p, n'_H, v'_e, v'_p, v'_H$ – концентрации и скорости соответствующих зеркальных частиц. Тогда плотность тока j определяется стандартным образом:

$$j = (-n'_e v'_e + n'_p v'_p) e. \quad (45)$$

Для движения электронов существенным является взаимодействие с протонами, протонов – взаимодействие с электронами и упругие столкновения с атомами водорода. Запишем уравнения движения электронов и ионов, считая что сила Лоренца компенсирует торможение за счёт обменом импульса с другими частицами (магнитная компонента силы Лоренца опущена, учёт её в [17] даёт значение проводимости того же порядка):

$$-eE = m_e v'_e \nu'_{ep} \quad eE = m_p v'_p (\nu'_{pe} + \nu'_{pH}), \quad (46)$$

где ν'_i – характерные частоты передачи импульса соответствующими частицами. Подставляя (45) и (46) в закон Ома $j = \sigma E$ получаем выражение для σ :

$$\sigma = e^2 \left[\frac{n'_e}{m_e \nu'_{ep}} + \frac{n'_p}{m_p (\nu'_{pe} + \nu'_{pH})} \right]. \quad (47)$$

Частота протон-электронных столкновений описывается формулой [17]

$$\nu'_{ep} = \frac{4\pi e^4 n'_e L_e}{(T'_e)^{3/2} m_e^{1/2}},$$

где L_e – кулоновский логарифм, $L_e \sim 10$, T'_e – температура электронной компоненты плазмы в энергетических единицах, для упругих столкновений протонов и атомов водорода полное сечение $\sigma_{pH} \sim 10^{-15}$ см², так что

$$\nu'_{pH} = \sigma_{pH} n'_H \nu'_p.$$

С учётом этого выразим проводимость в явном виде:

$$\sigma = \frac{(T'_e)^{3/2}}{4\pi e^2 L_e m_e^{1/2}} \left[1 + \frac{m_e}{m_p} \frac{1}{\left(1 + \sigma_{pH} \frac{n'_H}{n'_p} \frac{(T'_e)^2}{4\pi e^4 L_e} \right)} \right].$$

Найдём степень ионизации, при которой правое слагаемое в круглых скобках оказывается не более 0.01 и, следовательно, вносит небольшой вклад в проводимость плазмы.

$$\frac{n'_p}{n'_H} \geq \frac{100 \sigma_{pH} (T'_e)^2}{4\pi e^4 L_e} = 0.038 (T'_e / \text{эВ})^2. \quad (48)$$

При значениях степени ионизации, для которых выполнено неравенство (48), можем считать

$$\sigma = \frac{(T'_e)^{3/2}}{4\pi e^2 L_e m_e^{1/2}}. \quad (49)$$

Используя выражение для проводимости (49) и определение магнитного числа Рейнольдса (44), можно выразить необходимую температуру электронной компоненты для возможности динамо-усиления: для $Re_m \geq 100$ должно быть $T'_e \geq 6 \times 10^{-8}$ К, что точно достигается в зеркальном мире. Таким образом, возможен экспоненциальный рост зеркального магнитного поля со временем.

6.2 Усиление поля на малых масштабах

Рост поля начинается с динамо-усиления на малых масштабах в пределах одной ячейки турбулентности (так называемое быстрое динамо, предложенное Зельдовичем). В соответствии с (9) насыщение достигается при мелкомасштабном поле

$$b' = u' \sqrt{4\pi\rho_d} = 5.0 \times 10^{-5} \text{ Гс}, \quad (50)$$

где $u' = 20$ км/с – характерная скорость турбулентного движения для тёмной материи, ρ_d – плотность тёмной материи в галактике, $\rho_d \simeq 5\rho_b = 5 \times 10^{-23}$ г/см³ [5]. Рост поля по закону

$$B' = B'_0 e^{t/\tau_s}$$

определяется характерным временем $\tau_s = l'/u' = 3.1 \times 10^{14}$ сек. Тогда рост магнитного поля со значения $B'_0 \simeq 10^{-17}$ Гс (см. рисунок 5) до величины насыщения b' , определяемого формулой (50), занимает

$$t_1 = \tau_s \ln \frac{b'}{B'_0} = 9 \times 10^{15} \text{ сек} = 3 \times 10^8 \text{ лет}. \quad (51)$$

6.3 Усиление поля на масштабах галактики

Крупномасштабная компонента, определяемая при усреднении мелкомасштабных полей по всем N ячейкам турбулентности, даётся формулой [5]

$$B' = b' N^{-1/2}. \quad (52)$$

Для сферического гало радиуса $R = 17$ кпк (М33) находим

$$B' = b' \left(\frac{l'}{R} \right)^{3/2} = 6.4 \times 10^{-8} \text{ Гс}.$$

Возможно дальнейшее усиление этого поля до наибольшего значения, определяемого формулой (10), изменённой для случая сферического тела [5]:

$$B'_{eq} = u' \sqrt{4\pi\rho_d} \sqrt{\frac{9}{D_{cr}} \left(\frac{R\Omega}{u'} \right)^2 - 1} = 6.0 \times 10^{-5} \text{ Гс}, \quad (53)$$

где $D_{cr} = 300$ – наименьшее критическое значение числа динамо для сферического тела. Характерное время в этом случае

$$\tau_l = \frac{3}{9^{2/3}} \left(\frac{u'}{R\Omega} \right)^{1/3} \frac{R}{\Omega u'} = 8.4 \times 10^{13} \text{ сек}.$$

Время роста поля составляет

$$t_2 = \tau_l \ln \frac{B'_{eq}}{B'} = 6 \times 10^{14} \text{ сек} = 2 \times 10^7 \text{ лет}. \quad (54)$$

Таким образом, крупномасштабное зеркальное магнитное поле величиной $B'_{eq} = 6.0 \times 10^{-5}$ Гс (примерно в 60 раз больше обычного магнитного поля) возникает задолго до настоящего времени.

7 Заключение

В данной работе были использованы три механизма усиления и генерации магнитных полей. На их основе получена величина зеркального магнитного поля в различные моменты эволюции Вселенной в зависимости от отношения температур зеркального и обычного мира (x).

В конце РД-стадии величина зеркального магнитного поля в зависимости от параметра x может изменяться в широких пределах от 10^{-2} до 10^{-14} Гс. К моменту образования галактик ($z \sim 10$) зеркальное магнитное поле для галактики средних размеров (МЗЗ) оказывается порядка 10^{-17} Гс. Современное значение величины зеркального магнитного поля для МЗЗ примерно в 60 раз превышает величину галактического магнитного поля и составляет 6.0×10^{-5} Гс.

Список литературы

- [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Структура и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.
- [2] Harrison E. R., *Mon. Not. R. astr. Soc.* **147**, 279-286 (1970).
- [3] Mishustin I. N., Ruzmaikin A. A., *JETP*, **34**, 233-235 (1972).
- [4] Ruzmaikin A. A., Shukurov A. M., Sokoloff D. D. Magnetic fields of galaxies. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [5] Arshakian T. G., Beck R., Krause M., Sokoloff D. *A&A*, **494**, 29-32 (2009).
- [6] Lee T. D., Yang C. N. *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956).
- [7] Кобзарев И. Ю., Окунь Л. Б., Померанчук И. Я. *ЯФ*, **3**, 1154 (1966).
- [8] Foot R., [hep-ph/0207175] (2002).
- [9] Berezhiani Z. *Int. J. Mod. Phys. A*, **19**, 3775 (2004).
- [10] Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. – М.: ЛКИ, 2008.
- [11] Planck Collaboration *A&A*, **594**, A13 (2016)
- [12] Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория. – М.: КРАСАНД, 2010.
- [13] Malcolm S. Longair *Galaxy formation*. Springer, 2008.
- [14] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1992.
- [15] Dib S., Bell E., Burkert A. *ApJ*, **638**, 797-810 (2006).
- [16] Blinnikov S. I., Khlopov M. Yu. *Astron. Jn.*, **60**, 632-639 (1983).
- [17] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Т. X. / Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979.