Задачи коллоквиума, весна 2017.

1. Заряженная частица во внешнем поле.
Написать полное действие для заряженной точечной частицы и электромагнитного поля. Будем считать поле внешним, пренебрегая тем самым изменениями напряженности при движении частицы. Вычислить гамильтониан частицы и найти его производную по времени в системе наблюдателя.

2. Дилатационная симметрия.

1) Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля в 4-мерном пространстве-времени, описываемую действием

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4\right] .$$

Показать, что действие инвариантно относительно преобразований дилатации

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = \alpha\varphi(\alpha x) ,$$

где α — действительный параметр. Найти соответствующий сохраняющийся ток. Подобрать тензор энергии-импульса $T^\mu{}_\nu$ так, чтобы след его был равен нулю на уравнениях поля, $T^\mu{}_\mu = 0$.

2) Найти аналог дилатационной симметрии в модели Лиувилля в двумерном пространстве-времени с действием

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - a\mathrm{e}^{b\varphi}\right] ,$$

где $\mu = 0, 1$; a, b — некоторые постоянные, φ — действительное скалярное поле.

3. Слабое явное нарушение симметрии и массы "псевдоголдстоуновских" бозонов.

Рассмотрим теорию двух действительных скалярных полей с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 ,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^1\partial^\mu\varphi^1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^2\partial^\mu\varphi^2 + \frac{\mu^2}{2}[(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2] - \frac{\lambda}{4}[(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2]^2$$

и

$$\mathcal{L}_1 = \varepsilon U(\varphi_1) ,$$

причем ε — малый параметр, U нетривиально зависит только от компоненты φ_1. Часть $\mathcal{L}_0$ полного лагранжиана инвариантна относительно глобальной $SO(2)$ симметрии.

1) Найти основное состояние, сохраняющийся ток и намбу-голдстоуновскую моду при $\varepsilon = 0$.

2) Найти легчайшую моду и ее массу при $\varepsilon \neq 0$ в главном порядке по ε (такую моду называют псевдоголдстоуновской).

3) Найти связь между четырехдивергенцией тока, построенного в п. 1), с псевдоголдстоуновской модой в низшем порядке по полям отклонений от основного состояния и в низшем нетривиальном порядке по ε.

4. Солитоны в модели нескольких полей.
Рассмотрим теорию N действительных скалярных полей ϕ_a, $a = 1, \ldots, N$, в (1+1)-мерном пространстве–времени. Пусть потенциал имеет вид

$$V = \frac{1}{2}\sum_a \left(\frac{\partial U}{\partial \phi_a}\right)^2 ,$$

где $U(\phi_1, \ldots, \phi_N)$ – функционал полей ϕ_a, называемый суперпотенциалом.

1. Показать, что экстремумы суперпотенциала соответствуют минимумам потенциала.

2. Пусть суперпотенциал выбран так, что имеется дискретное множество вырожденных вакуумов $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$, ... Тогда могут существовать статические топологические солитоны, интерполирующие между различными вакуумами (аналоги кинка). Используя вспомогательное неравенство
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \sum_i \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial\phi_i}\right)^2 \geq 0,$$
показать, что энергия $E_{\alpha\beta}$ солитона, интерполирующего между вакуумами $\phi^{(\alpha)}$ и $\phi^{(\beta)}$, ограничена снизу, $E_{\alpha\beta} \geq \Sigma_{\alpha\beta} = |U[\phi^{(\alpha)}] - U[\phi^{(\beta)}]|$, и минимум энергии достигается на решениях уравнений первого порядка. Показать, используя гидродинамическую аналогию, что решения этих уравнений существуют. Показать, что эти решения удовлетворяют уравнениям поля, полученным из исходного лагранжиана, то есть в модели существуют стабильные статические солитоны с энергией $\Sigma_{\alpha\beta}$, интерполирующие между вакуумами $\phi^{(\alpha)}$ и $\phi^{(\beta)}$.

3. Пусть $N = 2$,
$$U = \frac{m^2}{\lambda}\phi^1 - \frac{\lambda}{3}\phi_1^3 - \alpha\phi_1\phi_2^2.$$
Найти множество вакуумов в модели. Используя результаты пункта 2, показать, что имеется непрерывное семейство вырожденных по энергии солитонов, интерполирующих между вакуумами с наибольшей разницей $\Sigma_{\alpha\beta}$. Найти эти солитоны — явно при $\rho \equiv \lambda/\alpha = 1$ и $\rho = 4$, в квадратурах при остальных значениях ρ. Построить графики, изображающие различные солитоны из этого семейства при $\rho = 4$. Найти солитоны, интерполирующие между остальными вакуумами.

5. Кинки с модифицированным кинетическим членом.
Рассмотрим теорию одного действительного скалярного поля в (1+1)-мерном пространстве-времени с лагранжианом
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{\alpha}{4}\left(\partial_\mu\phi\right)^2\left(\partial_\nu\phi\right)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(1 + \frac{3}{2}\alpha\lambda v^4\right)\left(\phi^2 - v^2\right)^2, \quad \mu = 0, 1.$$
Показать, что в теории существуют решения типа кинка при любых α. Найти решение явно при $\alpha \to \infty$.

6. V–потенциал.
Рассмотрим теорию одного комплексного скалярного поля ϕ в $(d+1)$-мерном пространстве-времени с лагранжианом
$$\mathcal{L} = |\partial_\mu\phi|^2 - \lambda|\phi|, \tag{1}$$
где $\lambda > 0$.

1. Найти размерность параметра λ.

2. Найти глобальную симметрию и сохраняющийся заряд Q.

3. Описать множество вакуумов. Что можно сказать о малых возмущениях около вакуума в модели (1)? Регуляризовать потенциал вблизи малых значений поля. Что происходит с массой возбуждений над вакуумом в пределе снятия регуляризации?

4. Показать, что в модели имеются солитонные решения с конечным зарядом Q и конечной энергией E, то есть Q-шары. Найти зависимость $E(Q)$ для таких решений, обсудить устойчивость.

5. Для $d = 1, 2, 3$ найти Q-шары в явном виде. Изучить поведение поля вдали от центра Q-шара.

7. Взаимодействие с нестатическим источником.
Изучим взаимодействие комплексного скалярного поля ϕ в двумерной теории с внешним источником вида $J(t,x) = j(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, где функция $j(x)$ локализована в пространстве, а ω – размерный параметр. Рассмотрим действие

$$\int (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - V(\phi\phi^*) + J(t,x)\phi^* + J^*(t,x)\phi)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

с $U(1)$-инвариантным потенциалом V. На уравнениях движения глобальный заряд и полная энергия, возникающие в теории без внешнего источника, не сохраняются. Объясните причину нарушения соответствующих тождеств. Найдите сохраняющуюся линейную комбинацию.

8. SUSY QM и солитоны.
Сделать доклад по работе 1703.00277.