

1. Рассмотрим модель двух комплексных скалярных полей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_1^* \partial_\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^* \partial_\mu \varphi_2 - \lambda(\varphi_1^* \varphi_1 - \varphi_2^* \varphi_2 - v^2)^2$$

- 1) Найти группу глобальной симметрии этого лагранжиана (указание: ограничиться компактными группами).
- 2) Найти множество классических вакуумов в модели. Найти ненарушенную подгруппу для каждого вакуума.
- 3) Найти спектр малых возмущений относительно каждого из вакуумов. Какие вакуумы являются физически эквивалентными, а какие — нет? Выполняется ли теорема Голдстоуна? Совпадает ли количество безмассовых возмущений с количеством ненарушенных генераторов? Почему?
- 4) Введя соответствующие калибровочные поля, построить теорию, в которой найденная в п. 1 группа симметрии была бы калибровочной. Найти спектр малых возмущений относительно каждого из вакуумов в полученной калибровочной теории. Остаются ли в спектре безмассовые скалярные возмущения?

2. Модель с двумя полями Хиггса.

Пусть имеется два скалярных поля  $\phi_1$  и  $\phi_2$  с гиперзарядом  $Y = 1/2$  и вакуумными средними  $v_1$  и  $v_2$  соответственно.

- (a) Найдите массовую матрицу калибровочных бозонов в этом случае.
- (b) Наложите симметрию  $\phi_1 \rightarrow -\phi_2$  и найдите условия на параметры наиболее общего потенциала не выше четвертой степени, при которых основное состояние устойчиво.

3. Теория с произвольной компактной калибровочной группой  $G$  и скаляром  $\varphi$  в некотором представлении инвариантна, в частности, относительно глобальных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1}, \\ \varphi &\mapsto \varphi' = T(\omega)\varphi, \end{aligned}$$

где  $\omega \in G$  не зависит от  $x$ . Найти нетеровский ток, соответствующий этим преобразованиям. Совпадает ли он с током  $j_\mu^a$ , фигурирующим в уравнении поля? Ковариантен ли нетеровский ток относительно калибровочных преобразований? Равен ли нетеровский ток нулю в отсутствие полей материи? Записать соответствующее уравнение поля через нетеровский ток и тензор  $F_{\mu\nu}^a$ .

4. Рассмотрим теорию с калибровочной группой  $SU(5)$ .

1) Подобрать представление скалярных полей и скалярный потенциал так, чтобы  $SU(5)$  нарушилась до  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , где  $SU(3)$  и  $SU(2)$  вложены в  $SU(5)$  следующим образом

$$\left( \begin{array}{c|c} SU(3) & 0 \\ \hline 0 & SU(2) \end{array} \right)$$

а группа  $U(1)$  диагональна в  $SU(5)$ .

2) Найти массы векторных бозонов и их представления относительно ненарушенной калибровочной группы.

- 3) Скалярное поле в каком представлении  $SU(5)$  нужно добавить, чтобы обеспечить дальнейшее нарушение до  $SU(3) \times U(1)$ , причем так, что  $SU(2) \times U(1)$  нарушается до  $U(1)$  аналогично стандартной модели? Подобрать полный скалярный потенциал для нарушения  $SU(5) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ .
5. Найти тензор энергии-импульса для теории Янга-Миллса варьированием по метрике. Совпадает ли он с нетеровским?