московский государственный университет имени м.в.ломоносова
физический факультет
кафедра физики частиц и космологии

Многомерное туннелирование

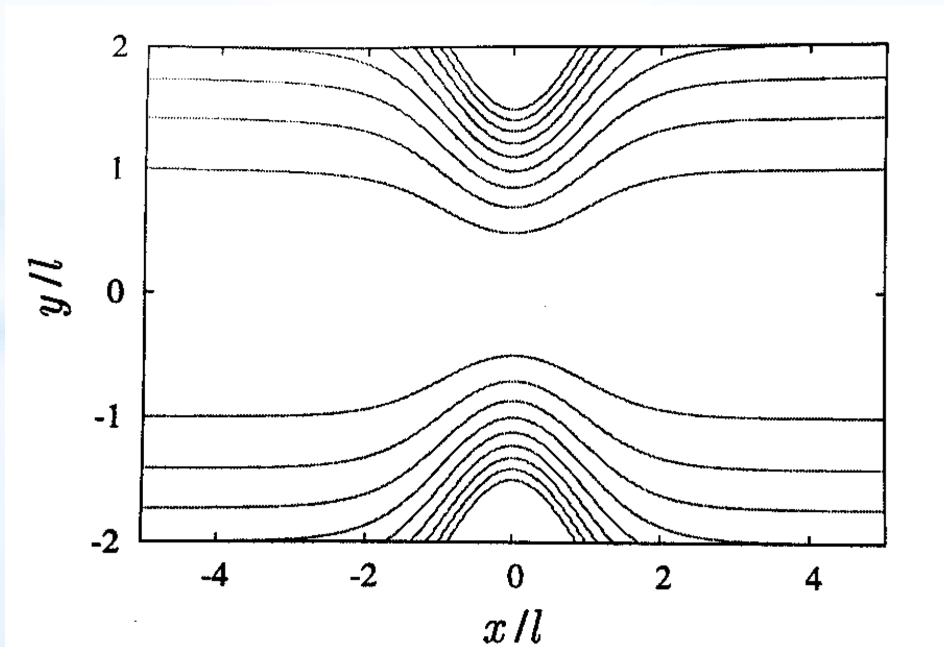
Курсовая работа
студента 216 группы
Петрова Павла
Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук
Левков Дмитрий Геннадиевич

Постановка задачи

$$H = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_x^2}{2m} + \frac{mw^2(x)y^2}{2} \qquad (1)$$

$$w(x) = w_0 + \frac{w_1}{ch^2(x/l)} \qquad (2)$$

(система 1)



Классический анализ системы в адиабатическом приближении

* Адиабатическое приближение $\left|\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dt}\right| \sim \left|\frac{1}{lw_0}\sqrt{E/w_0}\right| \ll 1$

* Движение системы эффективно одномерное

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + w(x)I \quad , \quad I = \frac{E_y}{w(x)}$$

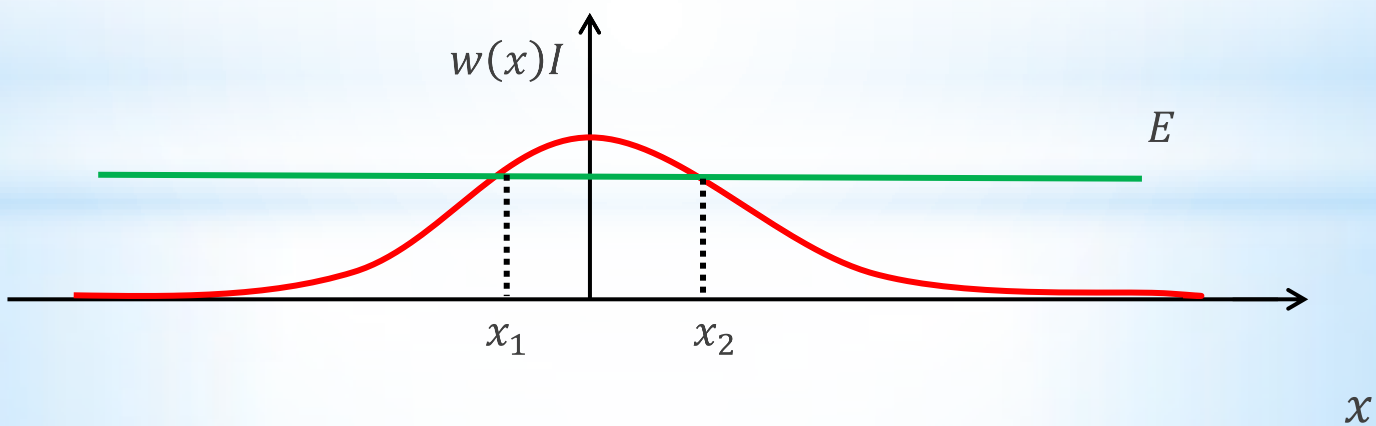


рис. 1

Классический анализ системы в адиабатическом приближении

* *A* – частица проходит через барьер,
  в этой области возможно надбарьерное отражение

* *B* – частица отражается от барьера,
  в этой области возможно туннелирование.

$$k = \frac{(w_0 + w_1)}{w_0}$$

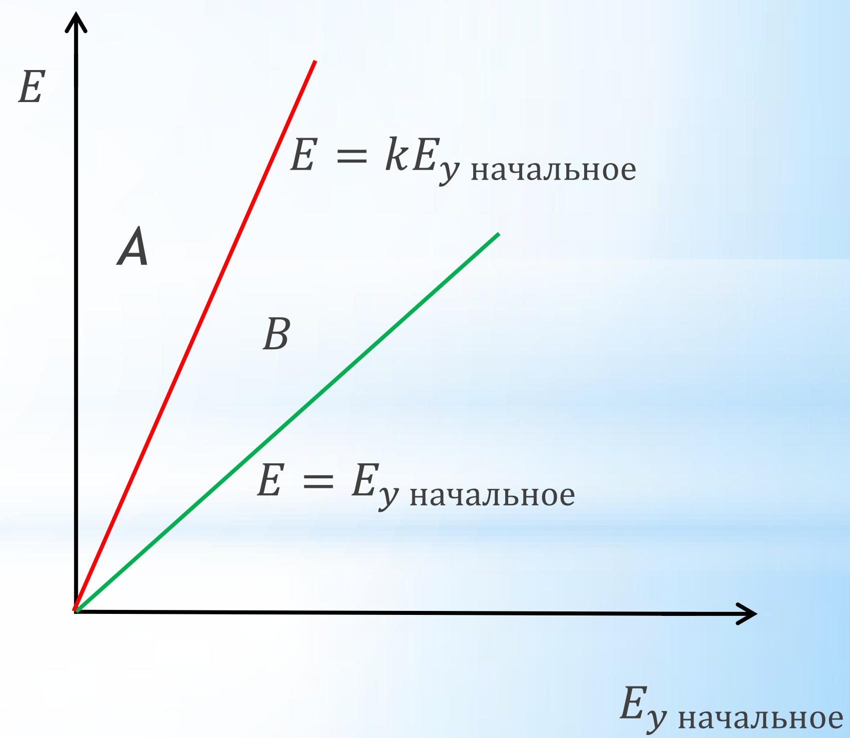


рис. 2

Два механизма туннелирования

1) Без переходов между поперечными колебательными уровнями системы

$$I = \frac{E_y}{w} = const$$

2) С перекачкой энергии между поперечными колебательными уровнями системы

$$E_{y\,\text{конечное}} \neq E_{y\,\text{начальное}}$$

1)Туннелирование в адиабатическом и квазиклассическом приближениях

* Квазиклассическое приближение $\left|\frac{d\lambda}{dx}\right| \sim \left|\frac{mEl^2}{h^2}\right| \ll 1$

* Область пересечения двух приближений $\frac{h^2}{m^2 l^3 {w_0}^2} \ll 1$

* Вероятность перехода

$$P_{\text{тунн.}} = \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E}\, dx\right) =$$

$$= exp\left((const)l\left(\sqrt{E - E_{0y}} - \sqrt{\frac{w_1 E_{0y}}{w_o}}\right)\right) \quad , \quad V(x) = I\left(w_0 + \frac{w_1}{ch^2(x/l)}\right)$$

2)переходы с перекачкой энергии между поперечными колебательными уровнями системы

* Будем оценивать вероятность такого перехода P как :

$$P = P_1(E - \Delta E)P_2(\Delta E)$$

* P_1 - вероятность совершить туннельный переход, сохраняющий адиабатический инвариант, при условии, что система 1 обладает энергией $E - \Delta E$.

* $P_2(\Delta E)$ - вероятность модельной системы 2 совершить переход из состояния с энергией E в состояние с энергией $E - \Delta E$.

$$H = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{mw^2(t)y^2}{2}$$

$$w(t) = w_0 + \frac{w_1}{ch^2(bt)}$$

b- адиабатически малый параметр

(система 2)

2)переходы с перекачкой энергии между поперечными колебательными уровнями системы

Пусть система 2 находится в состоянии $|n\rangle$, $n \to \infty$.

положим ΔE=$2w_0$, тогда:

$$P_2(\Delta E) = \left|\langle n-2\left|\widehat{U}(t \to +\infty)\right|n\rangle\right|^2$$

Перейдём в представление Гейзенберга и получим операторное уравнение на $\hat{y}$:

$$\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} = -w^2(t)\hat{y} \quad (3)$$

Применив аппарат квазиклассики к уравнению (3), получим его решение в виде:

$$\hat{y}(t \to -\infty) = \sqrt{1/2}\,(\,\hat{a}^+ y^+(t) + \hat{a} y^-(t))$$

$$\hat{y}(t \to +\infty) = \sqrt{1/2}\,(\,\hat{b}^+ y^+(t) + \hat{b} y^-(t))$$

2)переходы с перекачкой энергии между поперечными колебательными уровнями системы

* Сшив решения уравнения (3) в окрестности точки поворота $w(t_1) = 0$, получим связь между операторами $\hat{b}$ и $\hat{a}$:

$$\hat{b} = \hat{a} + \bar{r}\,\hat{a}^{+}$$, r - коэффициент Боголюбова

$$r = \exp\left(-\frac{i\pi}{2} - Im\left(\int_0^{t_1} w(t)dt\right)\right) = \exp\left(-\frac{i\pi}{2} - \frac{\pi w_0}{2b}\right)$$

* Вычислим матричный элемент A : $A = \frac{1}{\sqrt{(n-2)!n!}}\left\langle 0\middle|\hat{b}^{n-2}(\hat{a}^{+})^{n}\middle|0\right\rangle$

* Возвращаясь в представление Шредингера, заключаем, что:

$$P_2(\Delta E) = |A|^2 = r\bar{r}B_n^2 = B_n^2\exp\left(-\frac{\pi w_0}{b}\right) \quad , B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(n-k)!}$$

2)переходы с перекачкой энергии между поперечными колебательными уровнями системы

* Сравним значение вероятностей при E_{0y} , близких к E .
* $F(E) = const\left(\sqrt{E - E_{0y}} - \sqrt{\frac{w_1 E_{0y}}{w_o}}\right)$
* $P \propto exp\left(lF\left(E_{0y} - \Delta E_{0y}\right)\right) exp\left(-\frac{\pi w_0}{b}\right)$ - вероятность неадиабатического туннельного перехода.
* $P_1 \propto exp\left(lF\left(E_{0y}\right)\right)$ - вероятность туннельного перехода, сохраняющего адиабатический инвариант.
* Сравнение: $\frac{P}{P_1} \propto \exp\left(-l\Delta E\frac{dF\left(E_{0y}\right)}{dE_{0y}}\right)\exp\left(-\frac{\pi w_0}{b}\right) \gg 1$, при $E_{0y} \to E$

Спасибо за внимание