МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики частиц и космологии

Многомерное туннелирование

Курсовая работа
студента 2 курса
Петрова Павла Константиновича

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат.наук,
Левков Дмитрий Геннадиевич

Москва, 2016

Содержание

Введение

Процесс квантомеханического туннелирования в двумерной системе качественно отличается от туннелирования в одномерной системе. Если в одномерном случае факт туннелирования однозначно определятся энергосистемой и высотой потенциального барьера, то в двумерном случае факт туннелирования определяется не только энергосистемой, но и её динамикой. Например, при движении частицы в гармоническом волноводе с переменной частотой возможен процесс туннелирования даже при нулевой высоте потенциального барьера. Также при определённых условиях квантовая частица может протуннелировать в классически нестабильное состояние, которое затем разрушается квантовыми флуктуациями.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод о том, что туннельные процессы в многомерных системах обладают целым рядом свойств. В этой связи можно говорить о новом механизме многомерного туннелирования.

В данной курсовой работе изучается явление туннелирования на примере простой двумерной системы, а именно движение частицы в гармоническом волноводе с переменной частотой.

Глава 1

1. Классическое описание системы.

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_x^2}{2m} + \frac{mw^2(x)y^2}{2}$$

При $T\,\frac{dw}{dt} \ll w$ систему можно описывать адиабатически, и величина $I = \frac{E_y}{w}$ будет адиабатическим инвариантом,

где $E_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{mw^2(x)y^2}{2}$ и

$E_x = \frac{P_x^2}{2m}$, а E_{0x} и E_{0y} – соответственно начальные значения E_x и E_y.

T - период поперечных колебаний.

Тогда $E = \frac{P_x^2}{2m} + w(x)I = const$

Возьмём модельный потенциал:

$$w(x) = w_0 + \frac{w_1}{ch^2(ax)} \quad ,$$

где w_0 по порядку величины сравнимо с w_1 .

Условие применимости адиабатического приближения для него:

$$\frac{a}{w_0}\sqrt{\frac{E}{m}} \ll 1$$

Тогда при

1. $E > E_{0y}$ и $E - \frac{E_{0y}}{w_0}(w_0 + w_1) > 0$ частица проходит через барьер. Возможно лишь надбарьерное отражение в квантовом случае.

При

2. $E > E_{0y}$ и $E - \frac{E_{0y}}{w_0}(w_0 + w_1) < 0$ частица не проходит через барьер. Возможно лишь туннелирование в квантовом случае.

При

3. $E < E_{0y}$ ситуация физически не может реализоваться в рамках рассматриваемой задачи.

2. Туннелирование в адиабатическом случае и квазиклассическом приближении.

Гамильтониан системы в адиабатическом приближении:

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + w(x)I$$

описывает систему с одной степенью свободы. Вычислим вероятности туннелирования и надбарьерного отражения в квазиклассическом приближении.

Условия применимости квазиклассического приближения:

$$\left|\frac{d\lambda}{dx}\right| \ll 1 ,$$

где $\lambda = h/2\pi p$ и $p = \sqrt{2m(w(x)I - E)}$.

Для модельного потенциала получаем:

1) Условия применимости квазиклассического приближения: $E \gg \frac{h^2 a^2}{m}$
2) Условия применимости адиабатического приближения: $E \ll \frac{m{w_0}^2}{a}$

Легко заметить, что эти условия совместны и допускают одновременное выполнение обоих приближений, при:

$$\frac{h^2 a^3}{m^2 {w_0}^2} \ll 1.$$

Отсюда искомые вероятности:

$$P_{\text{туннелирования}} = exp\left(-\frac{4\pi^2\sqrt{2m}}{ha}\left(\sqrt{\frac{w_1 E_{0y}}{w_o}} - \sqrt{E - E_{0y}}\right)\right)$$

$$P_{\text{отражения}} = exp\left(-\frac{4\pi^2\sqrt{2m}}{ha}\left(-\sqrt{\frac{w_1 E_{0y}}{w_o}} + \sqrt{E - E_{0y}}\right)\right)$$

3. Нарушение адиабатического приближения.

Заметим, что процесс туннелирования может происходить с нарушением адиабатического приближения, несмотря на то, что с классической точки зрения система является адиабатической. Продемонстрируем это на примере простой одномерной системы с гамильтонианом:

$$H = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{mw^2(t)y^2}{2}$$

Возьмём модельный потенциал:

$w(t) = w_0 + \frac{w_1}{ch^2(at)}$, где w_0 по порядку величины сравнимо с w_1 .

Условие применимости адиабатического приближения для него:

$$\left|\frac{a}{w_0}\right| \ll 1$$

Будем решать задачу в представлении Гейзенберга.

Получим уравнение, описывающие эволюцию оператора $\hat{y}$:

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{2\pi i}{h}[\hat{H}, \hat{y}]$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{2\pi i}{h}[\hat{H}, \hat{p}]$$

Отсюда получаем:

$$m\frac{d\hat{y}}{dt} = \hat{p} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} = -w^2(t)\hat{y} \quad (2)$$

Уравнение (2) по структуре аналогично стационарному уравнению Шредингера, с точностью до замены x на t . Воспользуемся методами квазиклассики для решения уравнения. Решение уравнения (2) :

$$\hat{y} = \hat{A}y^+(t) + \hat{B}y^-(t)$$

где: $y^{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{w(t)}}\exp(\pm i\int_0^t w(t)dt)$

Условие применимости аппарата квазиклассики к этой задаче: $\left|\frac{a}{w_0}\right| \ll 1$ совпадает с условием применимости адиабатического приближения.

Наложим коммутационные соотношения:

$[\hat{p}\,, \hat{y}] = -ih/2\pi$

Тогда получаем условие на $\hat{A}$ и $\hat{B}$: $[\hat{B}, \hat{A}\,] = h/4\pi$,

и из самосопряжённости $\hat{y}$ следует что $\hat{A}^{\,+} = \hat{B}$

Тогда возможна замена: $\hat{a} = \sqrt{4\pi/h}\,\hat{B}$ и $\hat{a}^{\,+} = \sqrt{4\pi/h}\,\hat{A}$,

где $\hat{a}$ и $\hat{a}^{\,+}$ - операторы рождения и уничтожения для осциллятора.

Пусть в начальный момент времени:

$\hat{a} = \hat{c}$ и $\hat{a}^{\,+} = \hat{c}^{\,+}$,а в конечный момент времени:

$\hat{a} = \hat{b}$ и $\hat{a}^{\,+} = \hat{b}^{+}$.

$$\hat{y}_2 = \sqrt{h/4\pi}\,(\,\hat{b}^{+}y^{+}(t) + \hat{b}y^{-}(t))$$

$$\hat{y}_1 = \sqrt{h/4\pi}\,(\,\hat{c}^{+}y^{+}(t) + \hat{c}y^{-}(t))$$

Воспользуемся правилом сшивки квазиклассических решений и получим: $\hat{b}^{+} = \hat{c}^{+} + r\hat{c}$ $\quad \hat{b} = \hat{c} + \bar{r}\,\hat{c}^{+}$

$r = \exp(-\frac{i\pi}{2} - 2Im(\int_0^{t_1} w(t)dt))$

t_1-точка поворота , $w(t_1) = 0$.

Ситуация аналогична случаю надбарьерного отражения, t_1- находится в комплексной области.

Пусть осциллятор находится в n-том энергетическом состоянии.

$$\langle n|\hat{c}^{\,+}\,\hat{c}\,|n\rangle = n$$

$$\left\langle n\middle|\hat{b}^{\,+}\,\hat{b}\,\middle|n\right\rangle = n + r\bar{r}(n+1) = n + \exp(-\frac{\pi w_0}{a})(n+1)$$

Отсюда можно видеть, что средняя энергия в конце не равна начальной средней энергии системы, что в свою очередь означает возможность нарушения адиабатического приближения. Или, переходя обратно к представлению Шредингера, можно сделать вывод о возможности перехода осциллятора из n-того энергетического состояния в другие состояния.

4. Выводы.

Список литературы.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В 10 т. Т. I. Механика. –5-е изд., стереот. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В 10 т. Т. 3. Квантовая механика(нерелятивисткая теория). –6-е изд., испр.–М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

3.Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика (с задачами). -2-е изд., перераб. -М: ФИЗМАТЛИТ, 2001.