

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

“Численная оценка минимальных углов смешивания  
между активными и стерильными нейтрино”

Выполнил студент

443 группы

Краснов И. В.

\_\_\_\_\_  
(подпись студента)

Научный руководитель:

Доктор физ.-мат. наук,

Горбунов Д. С,

\_\_\_\_\_  
(подпись научного руководителя)

Допущен к защите 19.04.2016

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_  
(подпись зав. кафедрой)

Москва

2016 г.

# Оглавление

Введение	3
1. Модель	4
2. Параметризация	5
3. Объект изучения	7
4. Численные вычисления	8
4.1. Нулевые фазы . . . . .	8
4.2. Свободные фазы . . . . .	11
Заключение	17

# Введение

Осцилляции нейтрино очевидно указывают на неполноту Стандартной Модели физики частиц (СМ), и одним из наиболее активно развивающихся направлений исследований является разработка моделей и экспериментальный поиск новых частиц, называемых стерильными нейтрино. В этих моделях в лагранжиан включаются три новых майорановских фермиона  $N_I, I = 1, 2, 3$ , не заряженных по калибровочной группе СМ,  $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U(1)_Y$  (отсюда и прилагательное стерильные). Эти фермионы смешиваются с нейтрино СМ (“активными” нейтрино), что дает последним массу и смешивание между нейтрино разных типов.

Было показано, что подобные теории можно сделать перенормируемыми, а значениями модельных параметров возможно распорядиться так, чтобы объяснить не только нейтринные осцилляции, но и барионную асимметрию Вселенной через механизм лептогенезиса в первичной плазме. Кроме того, в некоторой области модельных параметров легчайшее из трех стерильных нейтрино может претендовать на роль частицы темной материи.

Помимо этого, с помощью механизма “качели” (I типа) элегантно объяснение получает факт малости значений масс нейтрино по сравнению с другими частицами СМ.

Отдельное внимание уделяется моделям, где некоторые из стерильных нейтрино имеют массу порядка 1 ГэВ, так как в этом случае они должны рождаться в распадах тяжелых адронов, что напрямую должно регистрироваться в экспериментах.

Данная работа направлена на расчет минимальных возможных значений смешивания между стерильными и активными нейтрино, разрешенных механизмом “качели” I типа для случая нескольких нейтрино массы порядка 1 ГэВ. В сравнении с прошлыми работами [1] отдельно исследуется зависимость от CP-нарушающих фаз. Значение смешивания необходимо для расчета чувствительности будущих экспериментов, направленных на исследование всей области значений модельных параметров, разрешенных механизмом “качели” I типа для нейтрино интересующих нас масс.

# 1. Модель

Добавление стерильных нейтрино  $N_I, I = 1, 2, 3$  приводит к тому, что к обычному лагранжиану СМ можно прибавить взаимодействие вида:

$$\mathcal{L} = i\bar{N}_I\gamma^\mu\partial_\mu N_I - \frac{1}{2}M_{N_I}\bar{N}_I^c N_I - Y_{\alpha I}\bar{L}_\alpha\tilde{H}N_I + h.c., \quad (1)$$

где  $M_{N_I}$  это майорановские массы, а  $Y_{\alpha I}$  это матрица юкавского взаимодействия с лептонными дублетами  $L_\alpha, \alpha = e, \mu, \tau$  и Хиггсовским дублетом СМ ( $\tilde{H}_a = \epsilon_{ab}H_b^*$ ).

Когда поле Хиггса принимает свое вакуумное значение  $\frac{v}{\sqrt{2}}$ , юкавское взаимодействие в (1) приводит к смешиванию между активными и стерильными нейтрино:

$$\begin{aligned} V_N &= \frac{v}{\sqrt{2}}Y_{\alpha I}\bar{\nu}_\alpha N_I + \frac{1}{2}M_{N_I}\bar{N}_I^c N_I + h.c. = \\ &= (\bar{\nu}_1, \dots, \bar{N}_1^c, \dots) \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{Y} \\ \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{Y}^T & \hat{M}_N \end{pmatrix} (\bar{\nu}_1, \dots, \bar{N}_1^c, \dots)^T, \end{aligned}$$

где ”крышка“ обозначает матричную величину. Здесь на главной диагонали стоит матрица майорановских масс стерильных нейтрино, а на вспомогательной – дираковские массы.

Введя иерархию этих масс, мы получаем объяснение малости масс активных нейтрино через механизм ”качели” I типа, а именно:

$$\hat{M}_N \gg \hat{M}_D = \frac{v}{\sqrt{2}}\hat{Y}^T.$$

С помощью ортогональных преобразований можно устранить смешивание между активными и стерильными нейтрино. В результате появится смешивание отдельно в активном и стерильном секторах, причем, за счет за-

явленной иерархии:

$$\begin{aligned}\hat{M}_N &\simeq \text{diag}\{M_1, M_2, M_3\}, \\ \hat{M}_\nu &= -\hat{M}_D \frac{1}{\hat{M}_N} \hat{M}_D^T \ll \hat{M}_N\end{aligned}\quad (2)$$

Таким образом мы получили, что диагонализуя матрицу в стерильном секторе мы приходим к массовым состояниям, очень близким к ароматовым состояниям стерильных нейтрино, а активные нейтрино получают смешивание и их масса дважды подавлена отношением дираковских масс к майорановским. Иерархия усилена, это и есть механизм “качелей”.

## 2. Параметризация

Как видно, введение стерильных нейтрино привносит в теорию 18 новых модельных параметров: 9 элементов  $\hat{M}_N$  и 9 элементов  $\hat{Y}$ , причем согласно (2) 6 недиагональных элементов  $\hat{M}_N$  мало отличимы от 0.

Рассмотрим параметризацию  $\hat{Y}$ , впервые предложенную в [2].

Введем в формуле (2) новое обозначение:

$$k \equiv -\frac{2}{v^2} \hat{m}_\nu = \hat{Y}^T \frac{1}{\hat{M}_N} \hat{Y}\quad (3)$$

В флэйворном базисе  $k$  приобретает диагональный вид:

$$(\hat{U}_{PMNS}^\dagger)^T \cdot k \cdot \hat{U}_{PMNS}^\dagger = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\} \equiv D_k,\quad (4)$$

где  $\hat{U}_{PMNS}$  – матрица перехода от массового состояния к флэйворному (матрица Пантекорово-Маки-Накагава-Саката):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \hat{U}_{PMNS}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

Майрановский тип массового члена обеспечивает возможность введения

двух дополнительных CP-нарушающих фаз  $\alpha_1, \alpha_2$

$$\hat{U}_{PMNS} = \hat{V} \cdot \text{diag}\{e^{-i\frac{\alpha_1}{2}}, e^{-i\frac{\alpha_2}{2}}, 1\}, \quad (5)$$

где матрица  $\hat{V}$  – матрица Пантекорово-Маки-Накагава-Саката стандартного вида:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{23}s_{12} - c_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - c_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

С другой стороны, мы знаем, что в массовом базисе матрица  $\hat{M}_\nu$  диагональна:

$$\hat{m}_\nu = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\} \equiv D_M \quad (7)$$

Тогда, объединяя формулы (3 – 7) получим:

$$D_k = (\hat{U}_{PMNS}^\dagger)^T \cdot \hat{Y}^T D_{M^{-1}} \hat{Y} \cdot \hat{U}_{PMNS} = (\hat{U}_{PMNS}^\dagger)^T \cdot \hat{Y}^T D_{\sqrt{M^{-1}}} D_{\sqrt{M^{-1}}} \hat{Y} \cdot \hat{U}_{PMNS}^\dagger, \quad (8)$$

где  $D_{\sqrt{A}} = \sqrt{D_A}$ . Умножая (8) слева и справа на  $D_{\sqrt{k^{-1}}}$ , получим:

$$1 = [D_{\sqrt{M^{-1}}} \hat{Y} \hat{U}_{PMNS}^\dagger D_{\sqrt{k^{-1}}}]^T [D_{\sqrt{M^{-1}}} \hat{Y} \hat{U}_{PMNS}^\dagger D_{\sqrt{k^{-1}}}] \quad (9)$$

Введя новое обозначение  $\hat{R} \equiv D_{\sqrt{M^{-1}}} \hat{Y} \hat{U}_{PMNS}^\dagger D_{\sqrt{k^{-1}}}$ , получаем простое условие на  $\hat{R}$ :  $\hat{R}^T \cdot \hat{R} = 1$ , где элементы  $\hat{R}$  могут принимать комплексные значения.

Удобно выбрать параметризацию  $\hat{R}$  следующим образом:

$$\hat{R} = \text{diag}\{\pm 1, \pm 1, \pm 1\} \times \begin{pmatrix} c_2c_1 & c_2s_1 & s_2 \\ -c_3s_1 - s_3s_2c_1 & c_3c_1 - s_3s_2s_1 & s_3c_2 \\ s_3s_1 - c_3s_2c_1 & -s_3c_1 - c_3s_2s_1 & c_3c_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $c_i = \cos z_i$ ,  $s_i = \sin z_i$ , а  $z_i$  – три комплексных угла.

Таким образом матрица юкавского взаимодействия параметризуется

как:

$$\hat{Y} = D_{\sqrt{M}} \hat{R} D_{\sqrt{k}} \hat{U}_{PMNS}^\dagger = \frac{i\sqrt{2}}{v} \sqrt{\hat{M}_N \hat{R}} \sqrt{\hat{m}_\nu} \hat{U}_{PMNS}^\dagger \quad (11)$$

Нас будет интересовать матрица взаимодействия между стерильными и активными нейтрино, которую можно записать как:

$$\hat{U} = \frac{v}{\sqrt{2}} \hat{M}_N^{-1} \hat{Y} = i \hat{M}_N^{-\frac{1}{2}} \hat{R} \hat{m}_\nu^{\frac{1}{2}} \hat{U}_{PMNS}^\dagger \quad (12)$$

Экспериментально были измерены значения углов  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{13}$ ,  $\theta_{23}$  матрицы  $\hat{U}_{PMNS}$ , разницы квадратов масс нейтрино. Вот значения этих параметров, использовавшиеся в работе, если специально не оговорено иначе:

$$\begin{aligned} m_{atm} &= 5.01 \times 10^{-2} \text{эВ} \\ m_{sol} &= 8.73 \times 10^{-3} \text{эВ} \\ \theta_{12} &= 34.45^\circ \\ \theta_{23} &= 51.53^\circ \\ \theta_{13} &= 9.02^\circ \end{aligned} \quad (13)$$

В итоге матрица  $\hat{U}$  зависит как от “свободных” параметров от

- трех масс стерильных нейтрино  $M_{N_I}$ ,  $I = 1, 2, 3$
- массы легчайшего активного нейтрино  $m_{lightest}$
- иерархии масс активных нейтрино
- трех комплексных углов  $z_i$  матрицы  $\hat{R}$
- трех, пока неизвестных  $CP$ -нарушающих фаз матрицы  $\hat{U}_{PMNS}$ .

### 3. Объект изучения

Уровень предполагаемого сигнала, вызванного, например, распадами стерильного нейтрино, определяется значениями модулей элементов матрицы  $|U_{I\alpha}|^2$ ,  $I = 1, 2, 3$ ;  $\alpha = e, \mu, \tau$ .

Для разных соотношений масс стерильных нейтрино наибольшее смешивание получают различные комбинации стерильных и активных нейтрино. Рассмотрим их отдельно.

Полагая массы  $M_1 > 2\text{ГэВ}$ ,  $M_2 > 2\text{ГэВ}$ ,  $M_3 < 2\text{ГэВ}$  мы получаем ситуацию, в которой интересными для экспериментаторов являются значения  $|U_{3e}|$  и  $|U_{3\mu}|$ . Однако эти значения могут равняться нулю, если  $N_3$  смешивается только с  $\nu_\tau$ , или же не смешивается с активными нейтрино вовсе в случае безмассового легчайшего нейтрино.

Нетривиальной является ситуация, когда  $M_1 < 2\text{ГэВ}$ ,  $M_2 < 2\text{ГэВ}$ ,  $M_3 > 2\text{ГэВ}$ . В данном случае наблюдаемыми становятся величины смешивания  $N_1$  и  $N_2$  с  $\nu_e$  и  $\nu_\mu$ :

$$\begin{aligned} U_e &\equiv |U_{1e}|^2 + |U_{2e}|^2 \\ U_\mu &\equiv |U_{1\mu}|^2 + |U_{2\mu}|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

В данной работе исследовались кривые минимальных возможных значений этих величин и их зависимость друг от друга.

Случай всех трех масс меньших, чем 2 ГэВ мало интересен, так как, воспользовавшись унитарностью матрицы  $U$ , его возможно решить аналитически.

Аккуратно расписывая значения  $U_e$  и  $U_\mu$  можно заметить отсутствие в них зависимости от  $M_3$ .

## 4. Численные вычисления

### 4.1. Нулевые фазы

Для начала, положив все  $CP$ -нарушающие фазы нулю, при фиксированных значениях  $U_e$  искалось минимальное возможное значение  $U_\mu$ .

Эти графики должны повторять те, что были указаны в статье [1], однако различия между ними составляют до 10% значений функций, что требовало своего объяснения.

Обсуждения с авторами [1] привели к выводу, что заявленные в статье



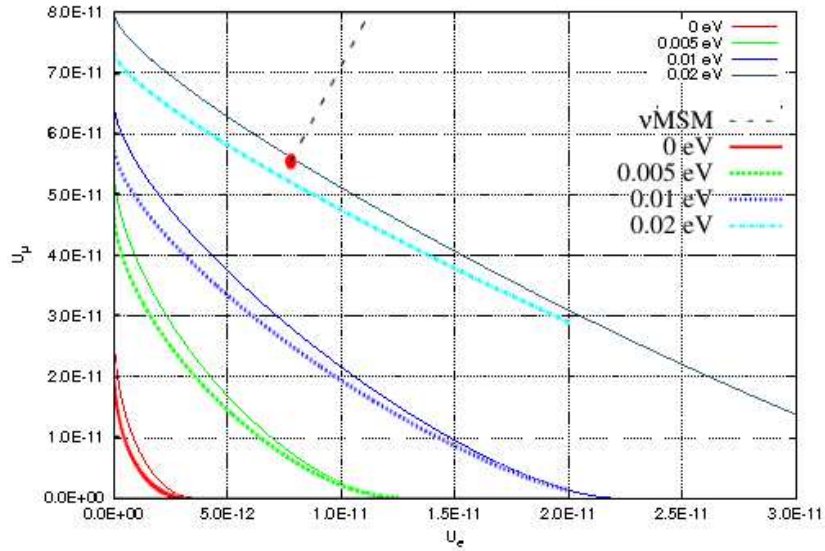


Рис. 1. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Для сравнения на график наложены линии из [1]. Фиксированы фазы  $\delta = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ .

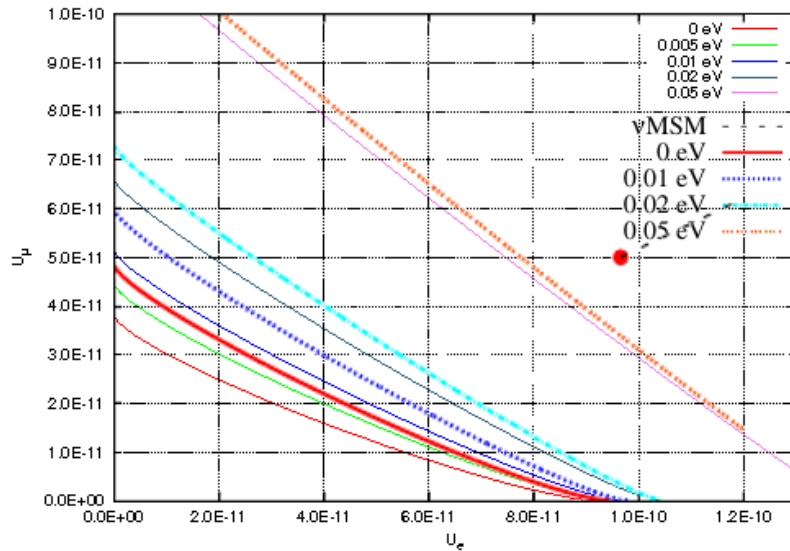


Рис. 2. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и инверсной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Для сравнения на график наложены линии из [1]. Фиксированы фазы  $\delta = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ .

[1] значения экспериментальных данных (совпадают с 13) отличались от тех, что были использованы при построении графиков, а именно:

$$\begin{aligned}
 m_{atm} &= 5.00 \times 10^{-2} \text{эВ} \\
 m_{sol} &= 8.75 \times 10^{-3} \text{эВ} \\
 \theta_{12} &= 33.80^\circ \\
 \theta_{23} &= 45.5^\circ \\
 \theta_{13} &= 8.82^\circ
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Построенные с данными значениями параметров кривые совпадают с предоставленными в статье.

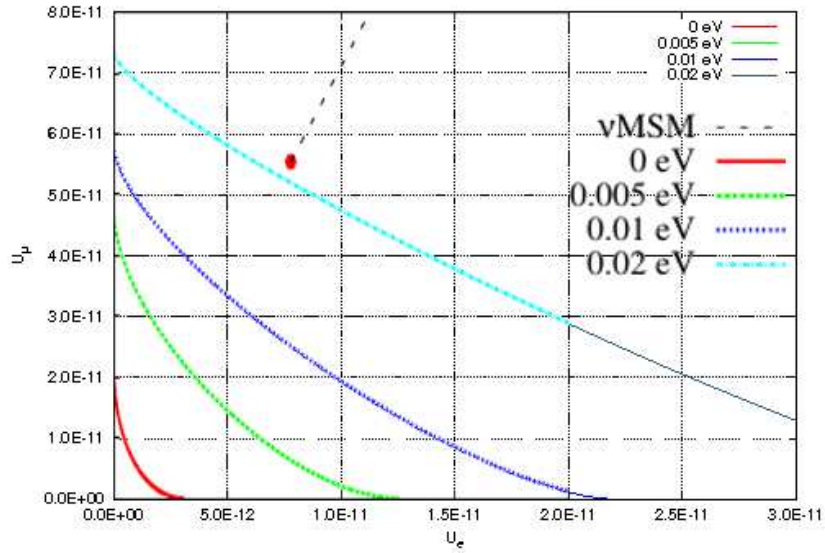


Рис. 3. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Для сравнения на график наложены линии из [1]. Фиксированы фазы  $\delta = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ .

## 4.2. Свободные фазы

Дальнейшим развитием было “отпускание” CP-нарушающих фаз. Для наглядности предоставлены графики для различных фиксированных значений  $\delta$ . Сканировалась фаза  $\alpha_1$ , для ускорения расчетов для начала фаза  $\alpha_2$  полагалась равной 0.

Из формулы (12) видно, что в случае  $m_{lightest} = 0$  зависимость матрицы  $\hat{U}$  от  $\alpha_1$  пропадает, что также отражается и на графиках. Кроме того, среди всех значений  $\delta$  наименьшие углы смешивания достигаются при  $\delta = 0$ .

Для невырожденного случая варьирование CP-нарушающих фаз позволяет значительно понизить минимальные углы смешивания. Включение фазы  $\alpha_2$  также занижает значения минимальных углов смешивания.

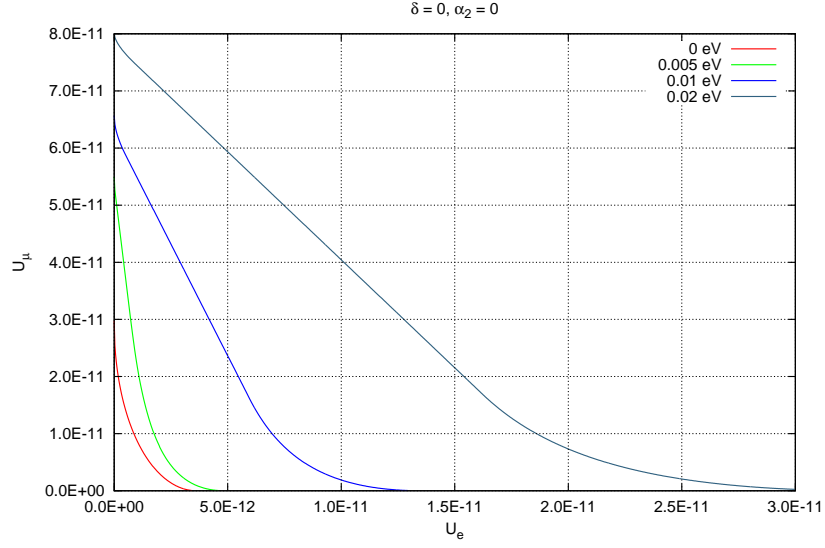


Рис. 4. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = 0, \alpha_2 = 0$ .

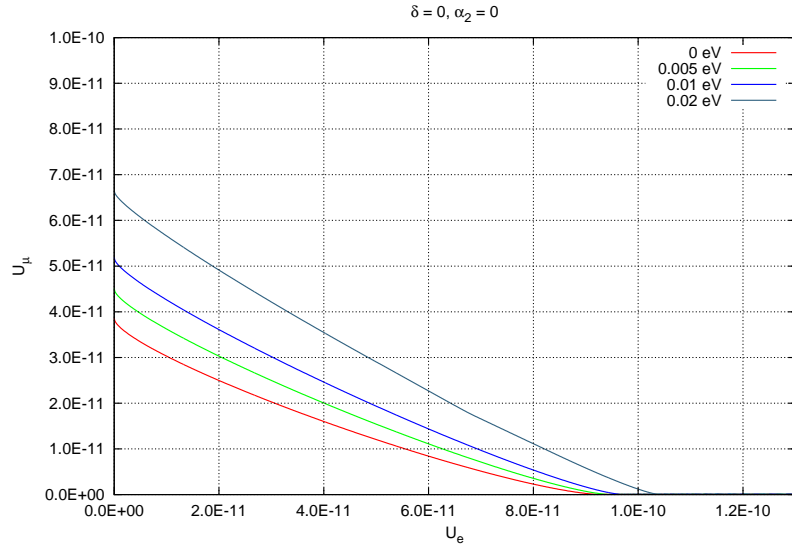


Рис. 5. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и инверсной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = 0, \alpha_2 = 0$ .

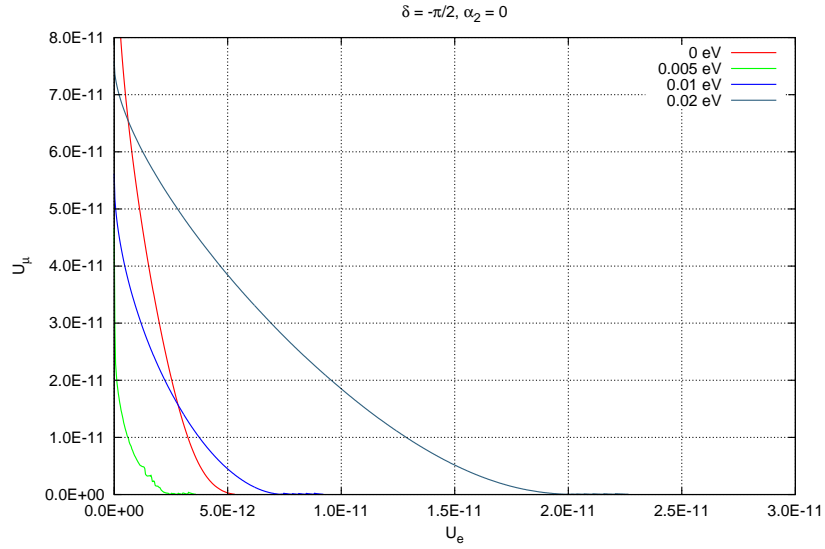


Рис. 6. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = 0$ .

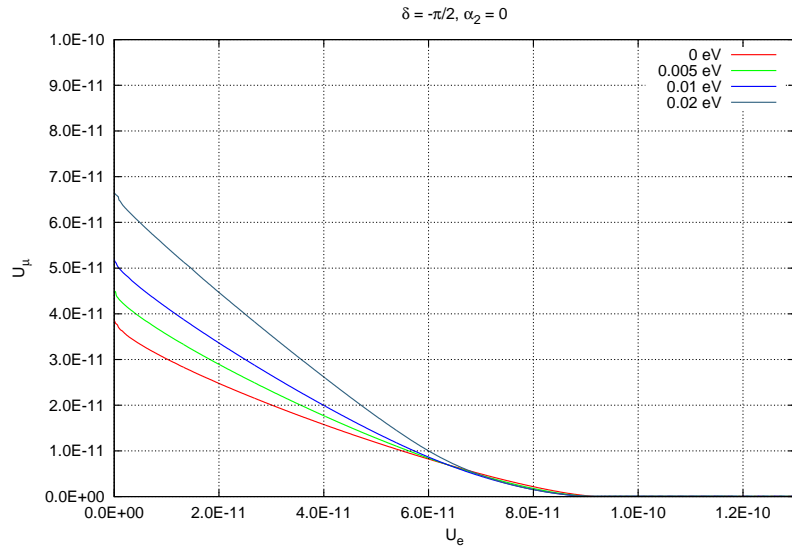


Рис. 7. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и инверсной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = 0$ .

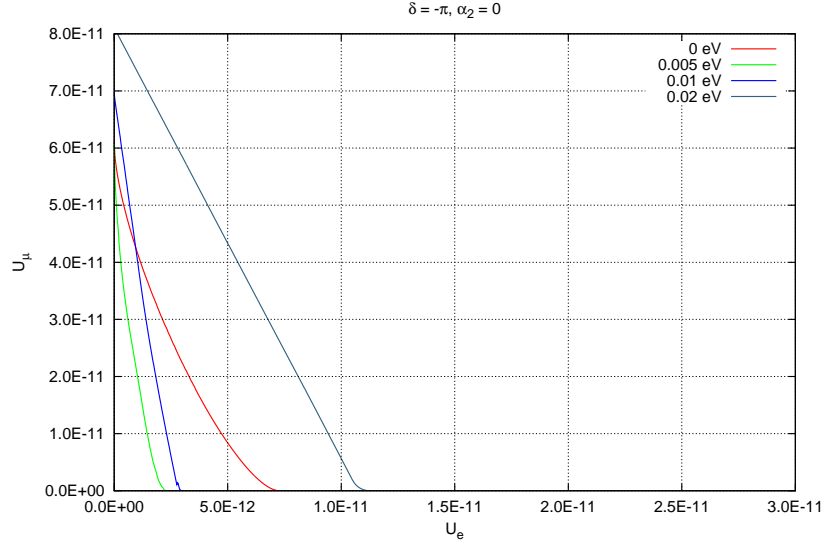


Рис. 8. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = -\pi, \alpha_2 = 0$ .

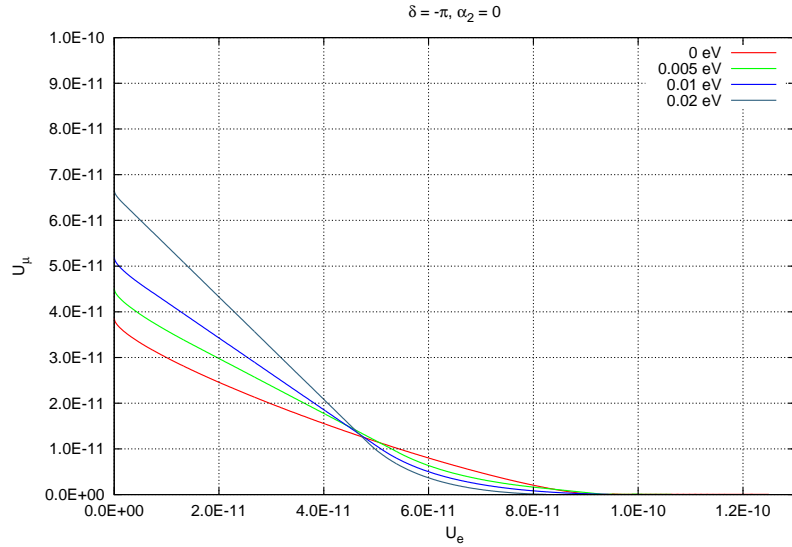


Рис. 9. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и инверсной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = -\pi, \alpha_2 = 0$ .

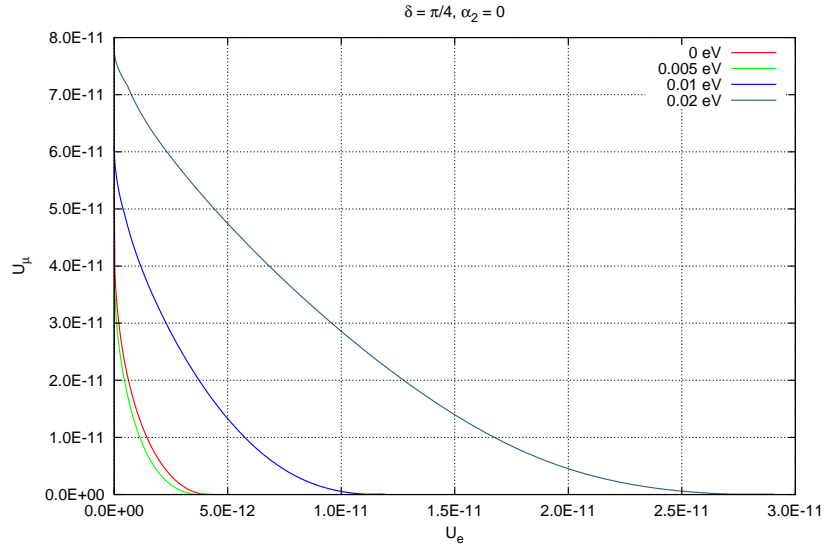


Рис. 10. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_2 = 0$ .

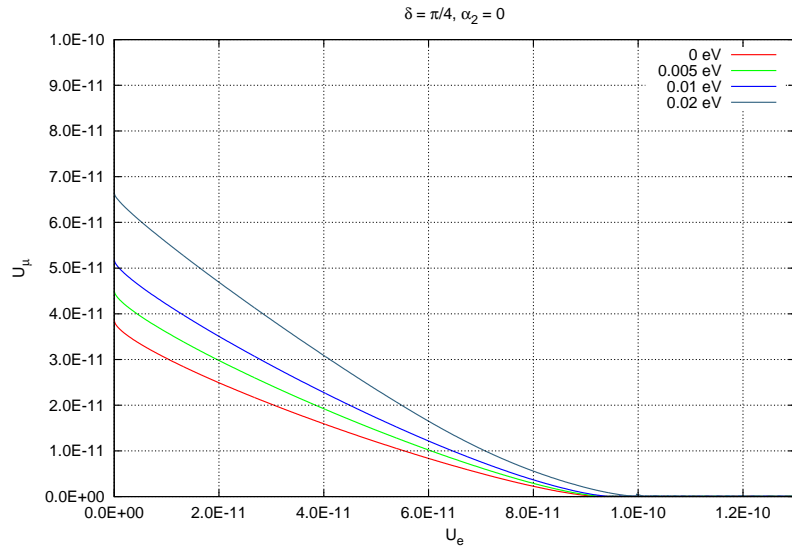


Рис. 11. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и инверсной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксированы фазы  $\delta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\alpha_2 = 0$ .

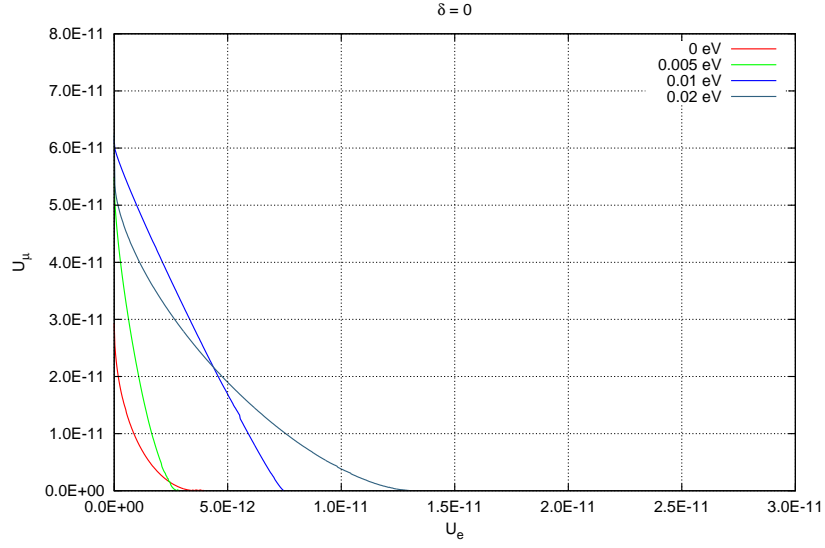


Рис. 12. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и нормальной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксирована фаза  $\delta = 0$ .

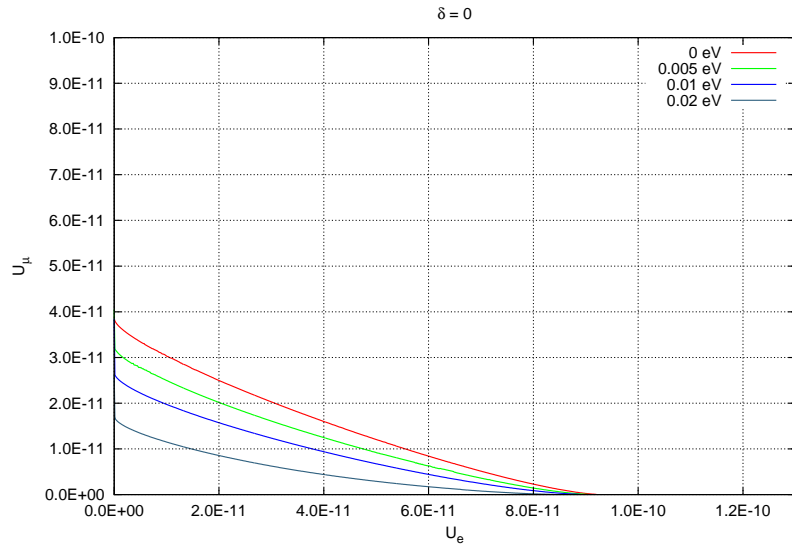


Рис. 13. Минимальные значения углов смешивания для  $M_1 = M_2 = 500$  МэВ и инверсной иерархии масс активных нейтрино. Различные линии соответствуют различным значениям массы легчайшего из активных нейтрино  $m_{lightest}$ . Фиксирована фаза  $\delta = 0$ .



## Заключение

Были найдены минимальные значения смешивания стерильных нейтрино с активными нейтрино в случае механизма “качели” I типа для тех стерильных нейтрино, чья масса не превышает 2ГэВ. Результаты совпали с результатами, полученными ранее ([1]), однако данная работа позволяет изучить зависимость смешивания от CP-нарушающих фаз.

## Список использованных источников

- [1] D. Gorbunov and A. Panin, Phys. Rev. D 89, 017302 (2014) [arXiv:1312.2887 [hep-ph]]
- [2] J. A. Casas and A. Ibarra, Nucl. Phys. B 618, 171 (2001) [hep-ph/0103065]