Монополь 'т Хоофта–Полякова.

Модель Джорджи–Глэшоу: калибровочная теория $SU(2)$ со скалярным полем ϕ в присоединенном представлении,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(D_\mu \phi\right)^a \left(D_\mu \phi\right)^a - \frac{\lambda}{4} \left(\phi^a \phi^a - v^2\right)^2 ,$$

где

$$(D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a + g \epsilon^{abc} A^b_\mu \phi^c,$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g \epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu.$$

В унитарной калибровке: можно выбрать вакуум $\phi^a = v \delta^{a3}$, тогда ненарушенная подгруппа $U(1)$ соответствует генератору $\tau^3/2$, поле A^3_μ безмассовое (“электромагнитное”).

Статические солитоны удобно искать в калибровке $A^a_0 = 0$. Условие конечности энергии $\phi^a \phi^a = v^2$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$ приводит к отображению $S^2_\infty \to S^2_{\text{vac}}$, $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Подстановка

$$\phi^a = n^a v \left(1 - H(r)\right),$$

$$A^a_i = \frac{1}{gr} \epsilon^{aij} n^j \left(1 - F(r)\right)$$

проходит через уравнения. Граничные условия:

$$F(\infty) = H(\infty) = 0,$$

$$F(r) = 1 + O(r^2) \text{ при } r \to 0,$$

$$H(r) = 1 + O(r) \text{ при } r \to 0.$$

При отождествлении ненарушенной $U(1)$ с электромагнетизмом такой солитон имеет магнитный заряд $g_M = 1/g$. В явном виде найти решение удается в *пределе Богомольного (BPS)*, $\lambda \to 0$. Тогда устойчивый солитон – решение уравнений первого порядка

$$D_i \phi^a = H^a_i,$$

где $H^a_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^a_{jk}$.

Перевести поле из калибровки $A_0 = 0$, где $\phi^a = n^a v$ при $r \to \infty$, в унитарную калибровку, где $\phi^a = v \delta_{a3}$ при $r \to \infty$, всюду регулярным калибровочным преобразованием нельзя. Можно определить калибровочную функцию ω_N, регулярную везде, кроме малой окрестности Южного полюса, и ω_S, регулярную везде, кроме малой окрестности Северного полюса. Тогда $\Omega = \omega_S \omega_N^{-1}$ принадлежит ненарушенной $U(1)$ подгруппе и регулярно везде, кроме малых окрестностей полюсов. На экваторе отображение $S^1_{\text{экватор}} \to U(1)$ определяет топологическую классификацию. Степень отображения n связана с магнитным зарядом солитона $g_M = n/g$.

Инстантоны в теории Янга–Миллса.

Изучим чисто калибровочную теорию с группой $SU(2)$ в $(3+1)$-мерном пространстве-времени.

Классические вакуумы в калибровке $A_0 = 0$:

$$A_i = \omega \partial_i \omega^{-1}, \quad \omega(\mathbf{x}) \in SU(2).$$

- $A_i(|\mathbf{x}| \to \infty)$ изменяется $\Rightarrow$ бесконечно высокий барьер;
- иначе, без ограничения общности $\omega(|\mathbf{x}| \to \infty) = 1$.

Топологическая классификация *вакуумов* (статических решений в пространстве Минковского): отображение $\omega(\mathbf{x})$ с условием $\omega(|\mathbf{x}| \to \infty) = 1$ соответствет отображению S^3 (всего трехмерного пространства с отождествленной границей) в $SU(2)$ – множество вакуумов, параметризуемых ω. Соответствующее топологическое число

$$n(\omega) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \, \epsilon^{ijk} \, \mathrm{Tr} \left(\omega \partial_i \omega^{-1} \, \omega \partial_j \omega^{-1} \, \omega \partial_k \omega^{-1} \right) .$$

Инстантоны – конфигурации с конечым евклидовым $(4+0)$ действием. Конечность действия $\Rightarrow$ возможные асимптотики при $r \equiv \sqrt{x_\mu x_\mu} \to \infty$: $F_{\mu\nu} \to 0$, то есть $A_\mu = \omega \partial_\mu \omega^{-1}$, $\omega(x) \in SU(2)$. Отображение границы 4-мерного пространства (S^3) во множество возможных асимптотик (параметризуемое $SU(2)$) определяет топологическую классификацию *инстантонов*, соответствующее топологическое число

$$Q = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \; \mathrm{Tr} \left(F_{\mu\nu} \tilde{F_{\mu\nu}} \right) ,$$

где $\tilde{F_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$. Минимум евклидова действия при фиксированном Q достигается при $Q > 0$ на *самодуальных*, $F_{\mu\nu} = \tilde{F_{\mu\nu}}$, при $Q < 0$ – на *антисамодуальных*, $F_{\mu\nu} = -\tilde{F_{\mu\nu}}$, решениях. При этом $S_E = \frac{8\pi^2}{g^2}|Q|$.

Решение с $Q = 1$:

$$A_\mu^a = \frac{2}{g} \frac{x_\nu}{r^2 + \rho^2} \eta_{\mu\nu a},$$

где ρ – масштабный параметр (размер инстантона, может быть любым), а символы 'т Хоофта $\eta_{\mu\nu a}$ определяются выражениями

$$\eta_{00a} = 0,$$

$$\eta_{0ia} = -\eta_{i0a} = \delta_{ia},$$

$$\eta_{ija} = \epsilon_{ija}.$$

Полезные свойства символов 'т Хоофта:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_{\gamma\delta a} = \eta_{\alpha\beta a};$$

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta^\dagger = \delta_{\alpha\beta} + i \eta_{\alpha\beta a} \tau^a;$$

$$\left[\eta_{\mu\sigma a} \frac{\tau^a}{2}, \eta_{\nu\rho b} \frac{\tau^b}{2} \right] = i \frac{\tau^c}{2} \left(\delta_{\mu\nu} \eta_{\sigma\rho c} + \delta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu c} - \delta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu c} - \delta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho c} \right) .$$

Чтобы интерпретировать инстантон, надо перевести его в калибровку $A_0 = 0$. В ней асимптотика инстантонного решения имеет вид

$$A_i(\mathbf{x}, \tau \to -\infty) = 0,$$

$$A_i(\mathbf{x}, \tau \to \infty) = \Omega_1 \partial_i \Omega_1^{-1},$$

где

$$\Omega_1(\mathbf{x}) = \exp \left(-i \tau^a \frac{\pi x^a}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + \rho^2}} \right) .$$

Это соответствует туннелированию из вакуума с $n = 0$ в вакуум с $n = 1$. Вообще, решение с топологическим числом Q описывает туннелирование между вакуумами с $\Delta n = Q$. Структура вакуума аналогична абелевой модели Хиггса; θ-член имеет вид

$$-\frac{\theta}{16\pi^2}\int d^4x \ \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right).$$

Сфалерон

Решение с одной отрицательной модой, соответствующее седловой точке функционала статической энергии и определяющее высоту барьера между вакуумами. В теории Янга-Миллса в $(3+1)$ седлового решения нет из-за дилатационной инвариантности, поэтому потенциальный барьер сколь угодно мал. Туннелирование экспоненциально подавлено (баланс между потенциальным и кинетическим членами).

Сфалеронное решение есть, например, в теории $SU(2)$, полностью нарушенной дублетом скалярных полей:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - \lambda\left(\phi^\dagger\phi - \frac{1}{2}\phi_0^2\right)^2\right] \ , \tag{1}$$

оно имеет вид

$$A_\mu(x) = -i\varepsilon_{ija}\hat{x}_j\tau_a\frac{f(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|},$$

$$\phi(|\mathbf{x}|) = \phi_0 h(|\mathbf{x}|)(-i\tau_a\hat{x}_a)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

где функции f и h удовлетворяют условиям

$$f(\infty) = h(\infty) = 1,$$

$$f(0) = h(0) = 0 \ .$$

Задачи.

1. Показать, что функции $F(r)$ и $H(r)$ стремятся к своим вакуумным значениям при $r \to \infty$ экспоненциально, если $m_H \sim m_W$. Исследовать их асимптотики в пределе Богомольного.

2. Найти число нулевых мод для малых возмущений около монополя.

3. Показать, что нельзя причесать ежа, то есть перевести монопольную конфигурацию из калибровки $A_0 = 0$ в унитарную калибровку всюду регулярным калибровочным преобразованием.

4. Добавляя в теорию с монополем 'т Хоофта–Полякова новые скалярные поля без вакуумного среднего, преобразующиеся по всевозможным представлениям группы $SU(2)$, показать, что минимальный возможный электрический заряд в этой модели равен $g/2$, так что условие квантования Дирака выполняется уже на классическом уровне.

5. Показать, что топологические солитоны возникают в моделях с нарушением любой компактной простой группы G до $U(1)$ по механизму Хиггса и что их магнитные заряды по этой $U(1)$ отличны от нуля. Изучить также случай полупростых групп G.

6. Доказать Полезные свойства символов 'т Хоофта.

7. Евклидово действие теории Янга-Миллса с группой $SU(2)$ в 4-мерном пространстве инвариантно относительно группы $SO(4)$ евклидовых пространственных вращений и группы $SU(2)$ глобальных преобразований из калибровочной группы. Относительно какой подгруппы группы $SO(4)\times SU(2)$ глобальных симметрий инвариантно инстантонное решение?

8. "Куда смотрит инстантон?" Описать пространственную ориентацию $SU(2)$-компонент векторного поля в инстантонном решении.

9. Найти калибровочное преобразование, переводящее инстантон в калибровку $A_0 = 0$.

10. В модели (1) оценить энергию сфалерона вариационным методом, выбрав

$$f = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^2 + \rho^2} \ ,$$

$$h = \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + \rho^2}}$$

и варьируя параметр ρ^2.