Неабелевы калибровочные теории.

Калибровочное поле A_μ – матрица, принадлежащая алгебре Ли калибровочной группы G.

Рассмотрим случай симметрии $G = SU(N)$ с полями материи в фундаментальном представлении.

При калибровочных преобразованиях:

$$\phi \mapsto \omega(x)\phi, \quad \omega \in SU(N)\ \forall x,$$

$$A_\mu \mapsto \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \partial_\mu \omega^{-1}. \tag{2}$$

Ковариантная производная

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi.$$

Действие:

$$S = \int d^4x\ (\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\phi), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}), \tag{4}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu];$$

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi - V(\phi^\dagger\phi).$$

Действительные компоненты A^a_μ, $F^a_{\mu\nu}$ вводятся выражениями

$$A_\mu = -igt^a A^a_\mu, \qquad F_{\mu\nu} = -igt^a F^a_{\mu\nu},$$

где t^a – эрмитовы генераторы алгебры $SU(N)$, образующие ортонормированный базис, $\mathrm{Tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$.

Обобщение на другие группы: в матричных обозначениях следить за i у генераторов; на ответ в действительных компонентах не влияет.

Обобщение на другие представления полей материи:

$$\phi(x) \mapsto T\left(\omega(x)\right)\phi(x),$$

где $T\left(\omega(x)\right)$ – оператор некоторого представления группы G. Тогда ковариантная производная – своя для каждого представления,

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + T(A_\mu))\phi,$$

где $T(A_\mu)$ – соответствующее ($T(\omega) = T(1+\epsilon A) = 1 + \epsilon T(A)$) представление алгебры Ли. В компонентах:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igT(t^a)A^a_\mu)\phi.$$

Уравнения поля:

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^a = g j^a_\nu, \tag{5}$$

где

$$j^a_\nu = -i\left(\phi^\dagger T^a D_\nu\phi - (D_\nu\phi)^\dagger T^a\phi\right);$$

$$D_\mu D_\mu \phi + \frac{dV}{d(\phi^\dagger\phi)}\phi = 0. \qquad (6)$$

Механизм Хиггса

Пусть есть калибровочная группа G, которая спонтанно нарушается до некоторой подгруппы H. Тогда, в отличие от случая с глобальной симметрией, для каждого *нарушенного* генератора из G/H соответсвующее калибровочное векторное поле становится массивным, а голдстоуновского бозона не возникает.

Пример. Калибровочная группа $SU(2)$ и комплексное скалярное поле в фундаментальном представлении.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger D_\mu\varphi - V(\varphi^\dagger\varphi), \qquad (7)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \qquad A_\mu = -ig\frac{\tau^a}{2}A^a_\mu\ ,$$

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi &= (\partial_\mu + A_\mu)\varphi\ ,\\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\ ,\\ V(\varphi^\dagger\varphi) &= -\mu^2\varphi^\dagger\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2 + c\ .\end{aligned}$$

Вакуум без потери общности можно выбрать в виде

$$A_\mu = 0\ , \quad \varphi^{vac} = \begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\ . \qquad (8)$$

Квадратичная часть лагранжиана соответствует трем массивным векторным полям A^a_μ с массой $m_V = \frac{gv}{2}$ и действительному скалярному полю χ с массой $m_\chi = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}v$. В полном лагранжиане, написанном в терминах полей A^a_μ, χ и $\omega(x)$ калибровочная инвариантность не пропала, но вид калибровочных преобразований изменился, так что, в действительности, симметрия, в отличие от случая с глобальной симметрией, не нарушилась.

Отметим, что в исходном лагранжиане было $3\times 2 = 6$ степеней свободы у безмассовых калибровочных полей и 4 степени свободы у двух комплексных скаляров, что в целом дает 10 степеней свободы. В модели с нарушенной симметрией в унитарной калибровке имеется 3 массивных векторных поля ($3\times 3 = 9$ степеней свободы) и один действительный скаляр, что в сумме дает те же самые 10 степеней свободы.

Литература:

В.А. Рубаков. Классические калибровочные поля. Бозонные теории.

Задачи.

1. Показать, что лагранжиан (4) инвариантен относительно калибровочного преобразования (2).

2. Показать прямым вычислением, что $F_{\mu\nu}\phi = [D_\mu, D_\nu]\phi$.

3. Показать, что для ковариантной производной справедливы формулы дифференцирования произведения функций и сложной функции (считать, что функции являются величинами, преобразующимися по некоторым, вообще говоря, разным, представлениям калибровочной группы).

4. В калибровочных теориях, кроме $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}^2)$, имеется еще одна калибровочно- и Лоренц-инвариантная величина, квадратичная по F, а именно $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda})$ (для электромагнитного поля – $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}$). Показать, что и в абелевом, и в неабелевом случаях эта величина представляет собой полную четырехдивергенцию $\partial_\mu K_\mu$ и что добавление такого слагаемого в лагранжиан не изменяет классических уравнений поля. Найти выражение для K_μ.

5. Выписать наиболее общий калибровочно инвариантный лагранжиан, содержащий взаимодействия полей не выше четвертой степени, для модели с калибровочной группой $SU(4)$ и одним поколением скалярной материи, содержащим одно поле в антисимметричном тензорном и одно поле в сопряженном фундаментальному представлении. То же для двух поколений.

6. Рассмотрим теорию с группой симметрий $SU(2) \times U(1)$ и скалярными полями материи ϕ_1 и ϕ_2 в фундаментальном представлении $SU(2)$ (комплексные дублеты) с зарядами q_1 и q_2 по группе $U(1)$ и комплексным синглетом χ, имеющим заряд $\pm(q_1 + q_2)$ по $U(1)$. Построить инвариантное относительно $SU(2) \times U(1)$ кубичное взаимодействие полей. Рассмотреть случай, когда симметрия калибровочная; построить полный лагранжиан. Выписать в компонентах законы преобразования всех полей и выражения для ковариантных производных.

7. Показать, что тензор $F_{\mu\nu}$ удовлетворяет тождеству Бьянки $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(D_\nu F_{\lambda\rho})^a = 0$.

8. Вывести и записать в компонентах уравнения движения для теории с калибровочной группой $SU(2)$ и скалярным полем, преобразующимся по присоединенному представлению.

9. Доказать тождество
$$(D_\mu D_\nu F_{\mu\nu})^a = 0 \ .$$
Показать, что левая и правая части уравнения (5) преобразуются по присоединенному представлению калибровочной группы.

   Показать, что если удовлетворяются уравнения (6), то для тока j_μ^a выполнено соотношение
$$(D_\mu j_\mu)^a = 0 \ ,$$
где ковариантная производная понимается в смысле присоединенного представления. Таким образом, уравнения (5) и (6) непротиворечивы и согласованы друг с другом.

10. Калибровочная теория с действием (3) инвариантна, в частности, относительно глобальных преобразований
$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1}, \\ \varphi &\mapsto \varphi' = T(\omega)\varphi \ , \end{aligned}$$
где $\omega \in G$ не зависит от x. Найти нетеровский ток, соответствующий этим преобразованиям. Совпадает ли он с током j_μ^a, фигурирующим в уравнении поля (5)? Ковариантен ли нетеровский ток относительно калибровочных преобразований?

Равен ли нетеровский ток нулю в отсутствие полей материи? Записать уравнение поля (5) через нетеровский ток и тензор $F^a_{\mu\nu}$.

11. Рассмотреть теорию с калибровочной группой $SU(2)$ и скалярным полем ϕ в присоединенном представлении. Пусть потенциал скалярного поля имеет вид

$$V = -\mu^2 \mathrm{Tr}\phi^2 + \lambda \mathrm{Tr}\phi^4 + c,$$

где $\mu^2 > 0$. Выбрать один из вакуумов и найти спектр масс малых возбуждений векторных и скалярных полей около него.

12. Построить модель с полностью нарушенной калибровочной $SU(2)$-симметрией, в которой массы всех трех векторных бозонов различны.